# 代数学 II 演習 No. 13

**[ 72 ]** 2 次実直交群 O(2) が $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}),\times)$ の正規部分群か判定せよ.

**[ 73 ]** (1) 群 $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}),\times)$ の部分集合 $H \overset{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ が $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}),\times)$ の部分群であることを示せ.

(2) $H$ が $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}),\times)$ の正規部分群か判定せよ.

(3) $C_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})}(H)$ ([70] 参照) を求めよ.

**[ 74 ]** 群準同型定理を用いて, 乗法群 $(\mathbb{R}^\times,\times)$ の商群 $\mathbb{R}^\times/\{\pm1\}$ と加法群 $(\mathbb{R},+)$ が群同型であることを示せ.

**[ 75 ]** (1) $\mu_\infty(\mathbb{C}) \overset{\text{def}}{=} \{\, a \in \mathbb{C}^\times \mid \exists n \in \mathbb{N},\ a^n = 1 \,\}$ が乗法群 $(\mathbb{C}^\times,\times)$ の部分群であることを示せ.

(2) 群準同型 $f\colon (\mathbb{Q},+) \to (\mathbb{C}^\times,\times)$ であって, $f$ に群準同型定理を用いると群同型 $\overline{f}\colon \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mu_\infty(\mathbb{C})$ が得られるものを一つ見つけよ.

**[ 76 ]** $(G,\circ)$ を群とし, $H$ を $(G : H) = 2$ となる $(G,\circ)$ の部分群とする. $\forall g \in G,\ g^2 \in H$ を示せ.

**[ 77 ]** $(G,\circ)$ を群とし, $S \subseteq G$, $[S] \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{K\colon G \text{ の部分群で } S\subseteq K} K$ とする.

(1) $[S]$ が $(G,\circ)$ の部分群であることを示し, $[\emptyset]$ を求めよ.

(2) $\langle S\rangle = [S]$ ([71] 参照) を示せ.

**[ 78 ]** $(G,\circ)$ を群とし, $S \subseteq G$, $\langle S\rangle_{\mathrm{nor}} \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{K\colon G \text{ の正規部分群で } S\subseteq K} K$ とする.

(1) $\langle S\rangle_{\mathrm{nor}}$ が $(G,\circ)$ の正規部分群であることを示せ.

(2) $(G',*)$ を群とし, $f\colon G \to G'$ を $S \subseteq \ker f$ となる群準同型とする. 群準同型 $h\colon G/\langle S\rangle_{\mathrm{nor}} \to G'$ であって, $f = h \circ q$ ($q\colon G \to G/\langle S\rangle_{\mathrm{nor}}$ は商写像) が成立するものが唯一つ存在することを示せ.

**[ 79 ]** (1) $S \subseteq S_3$ を 3 次対称群 $S_3$ に含まれる互換全体の集合とする. $\langle S\rangle = S_3$ ([71] 参照) を $\langle\ \ \rangle$ の定義通りに示せ.

(2) 互換 $(1\ 2) \in S_3$ に対し, $\langle\{(1\ 2)\}\rangle_{\mathrm{nor}}$ を求めよ.

**[ 80 ]** $(F,+,\times)$ を体とし, $(F^\times,\times)$ をモノイド $(F,\times)$ の可逆元全体のなす群とする. $(F^\times,\times)$ の有限部分群は巡回群であることを示せ.

**[ 81 ]** (1) $n$ を 2 つ以上の異なる素数で割り切れる自然数とする. 濃度が $n$ の可換体は存在しないことを示せ.

(2) $p$ を素数とし, $n$ を自然数とする. 濃度が $p^n$ の可換体が存在することを示せ.

**発表状況についての QR コード**

(E208 用)

(E211 用)