代数学II演習No.14

[82] （群の表示）(presentation of group)

1. (S が生成する自由群) S を集合とする。各 $s \in S$ に対し、s^{-1} という記号を用意し、$T := \{s^{-1} \mid s \in S\}$ とする。$F(S)$ で、$S \coprod T$ の元の任意の長さの有限列であって、$s^{-1}s$ や ss^{-1} の形の部分列を含まないものとする。長さ 0 の列（空列という）も $F(S)$ の元とする。$w_1, w_2 \in F(S)$ に対し、演算 $w_1 \circ w_2$ を、「w_1 のあとに w_2 を繋げて、$s^{-1}s$ や ss^{-1} の形の部分列があったらそれを取り除くことを繰り返し、そのような部分列を持たない有限列にしたもの」と定義する。$F(S)$ が群であることを示せ。(S が有限で n 元からなるとき、$F(S)$ を n 元生成自由群という。)

2. (関係式と表示) 上で、$F(S)$ の元 $u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n$ が与えられたとき、$u_1 = v_1$, $\ldots$ $u_n = v_n$ の形の式を「関係式」という。「S で生成され関係式 $u_1 = v_1$, $\ldots$ $u_n = v_n$ を満たす群」とは、$F(S)/\langle u_1v_1^{-1}, \ldots, u_nv_n^{-1}\rangle_{\mathrm{nor}}$ (問題 [7 8] 参照) である。S が有限集合 $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ であるとき、上記の群を
$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_m \mid u_1 = v_1, \ldots, u_n = v_n\rangle$$
で表す。これを群の表示 (presentation) という。

   有る群 G とその元 $x'_1 \ldots, x'_m$ が、$u'_i = v'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を満たしているとする。ここで、u'_i, v'_i はそれぞれ u_i, v_i に現れる x_j を x'_j で置き換えて得られる G の元とする。このとき、$x_i \mapsto x'_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ を満たす群準同型
$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_m \mid u_1 = v_1, \ldots, u_n = v_n\rangle \to G$$
がただ一つ存在することを示せ。

3. $$\langle s, t \mid s^n = 1, t^2 = 1, ts = s^{-1}t\rangle$$
   が、n 次二面体群（[59] 参照）と同型であることを示せ。

[83]

1. p を素数とする。位数が p の群を分類せよ。

2. G を群、H をその指数 2 の部分群とすると、$H \triangleleft G$ となることを示せ。

3. p を素数とする。位数が $2p$ の非可換群には、位数が p の正規部分群が存在することを示せ。

   ヒント:G を位数 $2p$ の群とする。ラグランジュの定理より、全ての元の位数が $1, 2, p, 2p$ のいずれかである。全ての元の位数が 2 ならば問題 [49] により可換群となるので不可。位数が $2p$ の元があれば巡回群となり不可。よって位数が p の元がある。この元が生成する部分群が正規部分群となる。