代数学 II 演習 No. 15

群 $(G,\cdot)$ に対し, G 上の二項関係 $\sim_{\mathrm{conj}}$ を $g \sim_{\mathrm{conj}} h \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \exists k \in G,\ g = k \cdot h \cdot k^{-1}$ で定めると $\sim_{\mathrm{conj}}$ は G 上の同値関係になる. この同値関係を共役関係といい, 共役関係による同値類を共役類という.

$(G,\cdot)$ を有限群とし, $\mathrm{CC}(G) \overset{\mathrm{def}}{=} \{\, G$ の共役類$\,\}$ とする. 共役関係は G 上の同値関係であることから等式

$$\sharp(G) = \sum_{S \in \mathrm{CC}(G)} \sharp(S)$$

が成り立つ. この等式を群 $(G,\cdot)$ の類等式という. 例えば, 有限群 $(\mathbb{Z}/2,+)$ の類等式は $2 = 1 + 1$ で, 有限群 $(S_3,\circ)$ の類等式は $6 = 1 + 2 + 3$ となる.

[84] (1) 等式 $2017 = \sum_{1 \le i \le 2017} 1$ を類等式として持つ有限群を一つ見つけよ.

(2) 等式 $18 = 3 + 3 + 3 + 9$ が類等式になり得ないことを示せ.

(3) 等式 $4 = 1 + 1 + 2$ が類等式になり得ないことを示せ.

[85] $(G,\cdot)$ を有限群とし, $\mathrm{CC}'(G) \overset{\mathrm{def}}{=} \{\, S \in \mathrm{CC}(G) \mid \sharp(S) > 1 \,\}$ とする. 等式 $\sharp(G) = \sharp(Z(G)) + \sum_{S \in \mathrm{CC}'(G)} \sharp(S)$ が成り立つことを示せ. この等式を類等式とする流儀 (例えば, 松坂和夫「代数系入門」等) もある.

[86] ユークリッドの互除法を用いて, 次を満たす整数 n を一つ求めよ.

(1) $119 \times n \equiv 205 \mod 2018$.

(2) $(n \equiv 218 \mod 257) \wedge (n \equiv 329 \mod 413)$.

(3) $(n \equiv 9 \mod 13) \wedge (n \equiv 11 \mod 17) \wedge (n \equiv 18 \mod 19)$.

[87] $(G,\circ)$ を群とする. G を位相 $\mathcal{O}$ で位相空間とみなし, $G \times G$ を $\mathcal{O}$ の積位相で位相空間とみなした上で, $\circ\colon G \times G \to G$ と $G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$ が連続になるとき, $(G,\mathcal{O},\circ)$ を位相群という.

(1) $(G,\mathcal{O},\circ)$ を位相群とする. G の部分群 H が開集合であれば H は閉集合でもあることを示せ.

(2) $(G,\mathcal{O},\circ)$ を位相群とする. G の単位元 e に対し, $\{e\}$ の閉包は正規部分群であることを示せ.

(3) $(G,\circ)$ を有限群とする. $(G,\circ)$ が位相群となる G の位相が離散位相と密着位相のみであるためには, G の正規部分群が自明な部分群と G それ自身のみであることが必要十分であることを示せ.

発表状況についての QR コード

(E208 用)

(E211 用)