代数学II演習 No.16

[88]

1. 3次対称群 S_3 の元の位数は、1,2,3のいずれかであることを示せ。
2. S_5 の元の位数は、1,2,3,4,5,6のいずれかであることを示せ。(ヒント：巡回置換分解)
3. S_4 の部分集合 $K := \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ が S_4 の部分群であることを示せ。（K を S_4 のクライン群という。）
4. K が $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ と群同型であることを示せ。
5. K が S_4 の正規部分群であることを示せ。
6. S_4/K が S_3 と同型であることを示せ。（解き方のひとつ : T を $\{1, 2, 3, 4\}$ の2元ずつへの分割の集合とする。T は3つの元からなる。S_4 の元は T の置換を与え、$S_4 \to S_T$ なる群準同型が与えられる。この像と核を調べる。）

[89]

1. 群準同型 $\mathrm{sgn} : S_n \to (\{\pm 1\}, \times)$ であって、(12) の像が -1 となるようなものがただ一つ存在することを示せ。これを置換の符号という。
2. 巡回置換 $(1, 2, \ldots, k)$ の符号が $(-1)^{k-1}$ であることを示せ。
3. S_6 の次の元を巡回置換分解せよ。
   $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
4. 上の σ の符号を求めよ。
5. S_n が、巡回置換によって生成されることを示せ。（すなわち、巡回置換とその逆元の有限個の積として、S_n の元が表されることを示せ。）
6. S_n が、互換 $\{(12), (23), (34), \ldots, (n-1, n)\}$ で生成されることを示せ。
7. n 本線のあみだくじ（定義はネットで検索）が、横線の選択により任意の S_n の元を実現することを示せ。
8. S_n の部分群で、sgn の核として定義される正規部分群を A_n と書き、n 次交代群という。A_n の位数を求めよ。
9. A_n の元の位数で、1を超えているもののうち最小のものを求めよ。
10. A_n は、3次巡回置換たちにより生成されることを示せ。