

先端数学課題

2015年7月3日 松本 眞

この課題は<http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~m-mat/TEACH/teach.html>からダウンロードできる。

1. \mathbb{F}_2 上の 4 次既約多項式を一つ見つけよ。
2. 上で見つけた既約多項式を特性多項式とする線形漸化式により生成された数列の周期を求めよ。
3. 任意の自然数 $d \geq 1$ に対し、 \mathbb{F}_2 係数の d 次多項式が存在し、それを特性多項式とする線形漸化式により生成された数列の周期が $2^d - 1$ となることを示せ (やや上級、できるところまでで良い)。

用語の説明 :

- $\mathbb{F}_2 := \{0, 1\}$ に、 $1 + 1 = 0$ と定義して体としたもの。 $\mathbb{Z}/2$ 。
- 体 k に対し、 $f(t) \in k[t]$ が既約とは、1 次以上の二つの多項式の積に書けないもの。
- 例えば 3 次多項式の場合、 $f(t) = t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 \in k[t]$ を特性多項式とする線形漸化式とは、 $x_0, x_1, \dots, \in k$ に対する漸化式

$$x_{n+3} = -(a_2x_{n+2} + a_1x_{n+1} + a_0x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

のこと。 $x_0, x_1, x_2 \in k$ を決めると x_3 以降は定まる。