

代数学 B 演習 期末レポート・代数学 B 期末試験予習問題
(2008/1/23 出題)

以下の**いずれか**に解答せよ。

提出期限は 2 月 5 日の期末試験終了時です。(早めの提出を歓迎します。) 必要に応じて口頭試問を行う可能性があります。口頭試問を行う場合、もみじ経由のメールおよび数学事務室前の掲示板で 2 月 6 日午後 5 時までにお知らせします。

問 1 は代数学 B 期末試験の予習問題です。相談して解いても結構ですが、自分で内容を消化して書くこと。問 2 は幾分発展的な問題ですが、こちらを解く場合は他の人と相談しないで解いて下さい。

問 1. $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $E = F(\sqrt[4]{3})$ $\varphi(x) = x^4 - 3$ とおく。

- (1) $[E : F]$ を求めよ。(ヒント: $E' = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$ として $[E' : \mathbb{Q}]$, $[E : \mathbb{Q}]$ の順番で求めるのが容易だと思います。) 途中で必要となる多項式の既約性などについても説明せよ。
- (2) E が $\varphi(x)$ の F 上の最小分解体であり、したがって E/F がガロア拡大であることを示せ。
- (3) $\sigma \in \text{Gal}(E/F)$ は $\sigma(\sqrt[4]{3}) = (\sqrt{-1})^k \sqrt[4]{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$) を満たすことを示せ。また、 σ はこの条件によって $\text{Gal}(E/F)$ の元として(存在すれば)一意的に定まることを示せ。さらに、各 k に対しそのような σ が存在することを示せ。これを σ_k と書くことにする。
- (4) $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Gal}(E/F)$ を $k \mapsto \sigma_k$ によって定めるとき、準同型定理により $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong \text{Gal}(E/F)$ が導かれることを示せ。
- (5) E/F の (E, F 以外の) 中間体をすべて求めよ。証明も述べること。

問 2. (参考書 第 2 章の章末問題 (17)。略解の細部を埋めて下さい。) 1 の原始 7 乗根の一つを ζ とするとき、 $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ の中間体をすべて求めよ。