代数曲線に触れる:補足

松本　眞[*]

平成 21 年 12 月 2 日

目 次

1　局所環 **1**

2　ネーター環 **4**

3　近代的代数幾何（空間概念とスキーム論） **5**

3.1　アフィンスキーム：集合から関数環へ 6

4　層 **10**

4.1　カテゴリー（圏） 10

1　局所環

定理 1.1. R を (単位的) 可換環、$I \neq R$ をそのイデアルとする。このとき I を含む極大イデアルが存在する。

証明. R 自身以外のイデアルの集合に包含関係で順序をいれると、帰納的順序集合になっている。（上限として、union をとることができる。union は 1 を含まないので、R に一致しない。）よって、Zorn の補題により極大元がある。それは、定義より極大イデアル。 □

R を可換環、m をそのイデアルとする。m が R の極大イデアルであり、他に極大イデアルが存在しないときに R を局所環という。上の定理を使

*広島大学理学部数学科 m-mat@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

えば、$R-m$ の元は全て可逆とわかる。すなわち、非可逆元 a があれば (a) は R でないイデアルとなり、それを含む極大イデアルは m にはなりえないから。

定義 1.2. R が局所環であるとは、R の非可逆元全体がイデアルとなっていること。このイデアルを m であらわす。ただ一つの極大イデアルとなる。

例 1.3. 可換環 R, 素イデアル p に対し、局所化 $R_p := R(R-p)^{-1}$ をとると、局所環となる。イデアルは $p(R-p)^{-1}$ となる。

定理 1.4. (中山の補題、Krull-Azumaya の補題) R, m を局所環とする。A を有限生成 R 加群とする。$mA \subset A$ で、A の元の m 係数線形結合の全体をあらわす。もし、$A = mA$ ならば、$A = 0$ である。

証明. A が $a_1, \ldots, a_n$ で R 上生成されるとしてよい。$a_i \in A = mA$ から、a_i は A の元の m 係数線形結合でかける。このことから、

$$\mathbf{a} := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

となる m 成分の行列 M が存在することがわかる。したがって $(I-M)\mathbf{a} = 0$. しかるに、$\det(I-M)$ は、対角成分は modulo m で 1 で他は modulo m で 0 であることから、$\det(I-M) - 1 \in m$ がわかる。局所環だから、$\det(I-M)$ は R で可逆。よって、$I - M$ は R 係数行列として可逆（余因子行列を考えよ）。したがって $\mathbf{a} = 0$、よって $A = 0$。 □

系 1.5. R を局所環、A を有限生成 R 加群とする。A の元 $a_1, \ldots, a_n$ が A を R 上生成する必要十分条件は、R/m-ベクトル空間 A/mA が $a_1, \ldots, a_n$ で生成されること。

証明. $a_1, \ldots, a_n$ が生成する部分空間を B とする。$A' := A/B$ を考えると、$A' = mA'$ である。なぜなら、A' の任意の元にたいし、それを代表する $a \in A$ を考えると、$a - b \in mA$ となる $b \in B$ が条件よりとれる。すなわち、$\bar{a}$ は $\bar{a}_i$ の R/m 一次結合でとれるから、それの R 係数への持ち上げをとればよい。

いいかえると、$A' = mA'$ である。定理より、$A' = 0$、すなわち $A = B$。逆はあきらか。 □

定理 1.6. 平面代数曲線の非特異点における局所環は、離散付値環である。

証明. $\mathbb{C}[x,y]/(f(x,y))$ の点 P における局所化 R をとる。必要ならば平行移動して、$x = 0, y = 0$ が点 P であるとしてもよい。（したがって $f(0,0) = 0$。）x,y の R における像を無神経にも x,y であらわす。（したがって $m = (x,y)$。）非特異点だから、（必要なら x,y を交換して）$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \neq 0$ としてよい。すなわち $\frac{\partial f}{\partial x} \notin m$。一般に、定数項が 0 の多項式においては

$$f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y + \text{ 2 次以上の項}$$

である。R においてはこの式は 0 である。すなわち、$x \in (y) + m^2$.

$m = (y)$ を示そう。あきらかに $(y) \subset m = (x,y)$ である。しかるに、ここで、上の事実から $(y) + m^2 \supset (x,y) = m$。この式は、$m/m^2$ が y の像で生成されることを示している。中山の補題の系を m に使うと、$m = (y)$ がわかる。あとは、次の補題を使う。 □

可換環 R がネーター環であるとは、その任意のイデアルが R 上（加群として）有限生成であることである。

- ネーター環を係数とする多項式環はネーター
- ネーター環の剰余環はネーター
- ネーター環を積閉集合で可逆化（局所化）したものはネーター

であるので、代数曲線の点 P における局所正則関数の環はネーター環である。（環論の教科書や [2, 8-11 ページ] 参照）

補題 1.7. R, m がネーター局所環で、整域とする。すると、$R - 0$ の元はただ一通りに uy^n と書ける（$u \in R^\times$）。すなわち、離散付値環。

証明. R は整域なので m のべき乗はいつまでも 0 にはならない。どこかで $m^i = m^{i+1}$ となれば、中山の補題により $m^i = 0$ で矛盾である。したがって、m^i は真に単調に減少していく。m^i の全ての i にわたる共通部分を N とすると、$N = mN$。（ネーター性から N が有限生成で）再び中山により $N = 0$。

ここから、R の元で 0 でないもの a は、ただ一つの $m^i - m^{i+1}$ に入ることがわかる。$a = y^i u$ と書けるが、$u \in m$ だと矛盾するので $u \in R^\times$。 □

これらのことは、高次元の代数多様体に容易に一般化される。参考文献などを参照。

注意 1.8. Krull 次元が 1 のネーター局所整閉整域は、離散付値環となる。Krull 次元とは、素イデアルの増大列の長さの最大値-1 として定義される。

(既約で被約な) アファイン代数曲線とは、その関数環がネーター整域で Krull 次元が 1 のもの、として定義される。代数曲線においては、特異点の解消は「整閉包」をとることによりえられることが、上の注意からわかる。

2 ネーター環

定義 2.1. 単位的可換環 R がネーター環であるとは、R の全てのイデアルが R 加群として有限生成であること。

定義 2.2. 半順序部分集合 I がネーター的であるとは、可算上昇列 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \in I$ がどこかで停滞すること、すなわちある n よりさきでは $x_n = x_{n+1} = \cdots$ が成立すること。

定理 2.3. 以下は同値。

- R はネーター環
- R の任意のイデアルはネーター的
- R 係数の任意の有限生成加群について、その R-部分加群はネーター的
- R 係数の任意の有限生成加群について、その R-部分加群は有限生成

また、R がネーターのとき、R 上の多項式環、R の剰余環、局所化はネーター。

証明. [2] の８，９ページに証明付きで書いてある。 □

3　近代的代数幾何（空間概念とスキーム論）

連立方程式系 $f_1, \ldots, f_n \in K[x_1, \ldots, X_N]$ に対し、その零点集合を $V(f_1, \ldots, f_n)$ であらわし、アファイン代数的集合と言った。

これには、

- $x^2 + y^2 + 1 = 0$ のように、たとえば実数上では空集合になってしまうおそれがあった。
- 上の問題は K が代数閉体であることを仮定すると避けられないこともない。が、$f = g^2$ のときなどは集合として一致 $(V(f) = V(g))$ してしまう。
- $K = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{F}_p$ などでは「解の集合」の位相構造をどのように扱えばよいか。

といった問題点があった。

歴史的には、体は複素数体であり、代数関数は複素解析的な（極を持ちうる）有理関数の一種として定義されて取り扱われたので、これらの問題は生じなかった。

しかし、我々は、有限体や整数をより精密に調べたいという要求がある。２０世紀に入って発展した、有限体や整数を「幾何的対象」としてとらえ研究をする「数論幾何」(arithmetic geometry) は大きく発展した。フェルマー予想・志村谷山予想・セール予想といった多くの未解決問題が陥落している。

また、計算機分野のアルゴリズムでも、数論幾何に基づく暗号や符号が広く用いられている。デジタル計算機は、有限集合に対して有限の操作（演算）を行う機械である。したがって、有限体やそれらを係数とする多項式に対しては正確な演算をなしうるのであるが、実数や複素数に対しては常に「有限の精度（誤差つき）」の計算しかなしえない。したがって、数論幾何はデジタル計算機と相性がいいのである。

以下、意味不明なコメントを重ねる。１９世紀的な幾何においては、多様体は「局所的に、標準的なものと同一視される位相空間」であった。すなわち、「集合に、付加的な情報が追加されたもの」を部品として組み立てられたもの、なのである。

それに対し、Grothendieck や米田信夫らの発想は、「関係こそが実在（関数環や準同型がものの存在の実態）」というあらたな哲学を切り開いたと言える。

その一つの表れには、カテゴリー論：対象と射によって、事物をとらえて研究するという哲学がある。

またそれとは別のレベルとして、「環を所与のものとして、それを関数とみなすべき空間を作ろう」というスキーム論がある。

3.1 アフィンスキーム：集合から関数環へ

定義 3.1. 単位的可換環 A に対して、付随する位相空間 $\mathbf{Spec}A$ を以下のように定義する。$\mathbf{Spec}A$ は、点集合としては A の素イデアルの集合である。（スペクトラムといい、日本語では光符ということもある。美しくかつ実態をあらわした用語と思う。）

位相空間としては、Zariski 位相を考える。すなわち、$f \in A$ に対して、$p \in \mathbf{Spec}A$ が f の零点であるとは、$f \in p$ のことである。（関数とみなす元となる）$f \in A$ の零点集合とは、$f \in p$ となる p の全体である。この集合を

$$V(f) \subset \mathbf{Spec}A$$

であらわす。（以下の例により、この言葉「零点集合」の意味は明らかになるであろう。）$V(f)$ は $\mathbf{Spec}A$ の中で、（零点集合なのだから）閉集合とみなすべきであろう。補集合をとれば、$D(f) := V(f)^c := \{p \in \mathbf{Spec}A | f \notin p\}$ が開集合である。

一般に、イデアル I に対して

$$V(I) := \{p\mathbf{Spec}R | I \subset p\}$$

を、I の共通零点ないし I が定義する $\mathbf{Spec}A$ の (Zariski) 閉集合という。$D(I)$ を、$V(I)$ の補集合とする。これは、「I の元のどれか一つでも 0 にならないような点の集合である。

レポート問題 1.

1. 上の定義で、$D(I)$(I はいろいろ動く、0 も R 自身もとりうる) が開集合の公理系を満たすことを示せ。

   たとえば、$V(I) \cap V(J) = V(I+J)$, $V(I) \cup V(J) = V(IJ)$ などを示すのが一つのステップである。

2. $I = (f)$ のとき、$V(f) = V(I)$ を示せ。

3. m を極大イデアルとすると、$V(m)$ は m 一点からなる閉集合である。この点を閉点 (closed point) という。

4. 点 p の Zariski 閉包は $V(p)$ となることを示せ。

5. $R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ においては、$\mathbf{Spec}R$ の極大イデアルは $\mathbb{C}^n$ と一体一の関係があることを示せ。

6. 上で、$f(x_1, \ldots, x_n)$ の複素多項式としての零点集合が、$V(f)$ に属する極大イデアルと一対一対応することを示せ。

例 3.2. $R = \mathbb{C}[x]$, $X := \mathbf{Spec}R$. R は単項イデアル整域であり、極大イデアルは既約多項式が生成する。$\mathbb{C}$ が代数閉体だから、それは一次式 $(x - \alpha)$ と一対一に対応する。一方、(0) は（極大でない）素イデアルである。

R のイデアルは全て単項であり、$(g(x))$ とかける。これが素イデアルである必要十分条件は $g(x)$ が 0 または既約であることである（レポート問題)。

したがって、$X = \{(x - \alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\} \cup (0)$。位相を考える。極大イデアルは閉点である。したがって、$X - \{(0)\}$ に誘導位相をいれると、集合としては「$\mathbb{C}$」、位相としては離散位相が入ったものとなっている。

(0) の閉包を考えると $V(0) = X$。したがって、(0) を含む閉集合は X のみ。言い換えると、X の開集合は、空でなければ (0) を含む。この位相空間はハウスドルフ性をもたない。(0) を X の generic point（一般点）という。generic point は、初学者には躓きの石である。が、なれてくると非常に便利で自然な点であることがわかってくる。

標語的にいえば、generic point がなければ、点集合 $\mathbb{C}$ が「一つの曲線」であることを保証するものがない。

例 3.3. $\mathbf{Spec}\mathbb{Z} = \{(p) | p \text{ 素数}\} \cup \{(0)\}$。左は閉点の集合で、(0) は generic point。

例 3.4. $\mathbf{Spec}\mathbb{Q}[x] = \{(f) | f \text{ 非定数既約多項式}\} \cup \{(0)\}$.

例 3.5. $X := \mathbf{Spec}\mathbb{C}[x, y]$。$X$ の閉点は、$(x - \alpha, y - \beta)$ で $\mathbb{C}^2$ に一致する。その他に、既約多項式 f に対して (f) が（閉でない）点として存在する。証明はしないが、

$$X = \{(x - \alpha, y - \beta) | \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}\{(f(x, y)) | f \text{ 非定数既約多項式}\} \cup (0).$$

となることがわかる。閉点の集合は $\mathbb{C}^2$ である。二番目の種類の点 (f) に対して、その閉包を取ると $V(f)$。これにより、f は曲線 $V(f)$ を「代表

する一般的な点」とみなされ（意味不明かと思うが、いつかわかるかも）$V(f)$ の generic point と呼ばれる。

(0) の閉包は X で、X の generic point と呼ばれる。

定義 3.6. A を可換環とする。**Spec**A の関数環とは、A のことである。A の元を、「**Spec**A 上の正則関数」(regular function) と言うが、定義上はちっとも「関数」にはなっていない。

すなわち、スキーム論では、「関数」は通常の「集合から集合への写像」を意味しない。

定義 3.7. 環 A と位相空間 **Spec**A を組にして考えたものをアフィンスキームという。が、記号としては **Spec**A であらわす。位相空間 **Spec**A のことは、「**Spec**A の台集合 (underlying set)」と呼ぶことが多い。

定義 3.8. A, B を単位的可換環とする。**Spec**B から **Spec**A へのアフィンスキームの射とは、単位的環準同型 $f : A \to B$ のことを指す。

命題 3.9. $f : B \to A$ を単位環準同型とする。位相空間の間の写像として、$p \in \mathbf{Spec}A \mapsto f^{-1}(p) \in \mathbf{Spec}B$ がさだまり、これは連続である。f が **Spec**A の台集合に引き起こす射という。

例 3.10. $A = \mathbb{C}[x]$, $B = \mathbb{C}[y]$, $f : B \to A$ を $y \mapsto x^2$ で定義する。このとき、**Spec**B の閉点 $(x - \alpha)$ は **Spec**A のどこに行くか。

$$f^{-1}((x-\alpha)) = \{g(y) | g(x^2) \in (x-\alpha)\} = \{g(y) | g(\alpha^2) = 0\} = (y - \alpha^2)$$

である。したがって、閉点のみに着目すれば $\mathbf{Spec}B \to \mathbf{Spec}A$ は $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \alpha \mapsto \alpha^2$ を引き起こす。

ちなみに、generic point は generic point に移る。

より一般に、K 係数多項式 $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)$ が与えられたとき、$y_i \mapsto f_i$ によって $\mathbf{Spec}K[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbf{Spec}K[y_1, \ldots, y_m]$ なる射が定まる。その台集合の閉点の集合に引き起こされる写像は $K^n \to K^m$ であって、多項式写像 $(f_1, \ldots, f_m)$ が与えるものとなる。

こうして、かつて扱った「多項式写像」は「アフィンスキームの射」の特殊な場合となる。

定義 3.11. 閉部分アフィンスキーム。A を可換環とし、I を任意のイデアルとする。環準同型 $A \to A/I$ は、$\mathbf{Spec}(A/I) \to \mathbf{Spec}A$ を引き起こす。このとき、台集合上では

$$V(I) \to \mathbf{Spec}(A/I), \quad p \mapsto p/I$$

なる一対一対応により、$\mathbf{Spec}(A/I)$ の像は $\mathbf{Spec}A$ の部分集合として $V(I)$ に一致する。そして、A/I からくる位相と $\mathbf{Spec}A$ の制限からくる位相は一致する。$\mathbf{Spec}A/I$ を、(I が定める)$\mathbf{Spec}A$ の閉部分アフィンスキームという。

例 3.12. $f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y] =: A$ をとり、$I := (f)$ とする。A の閉部分アフィンスキーム $\mathbf{Spec}(\mathbb{C}[x,y]/(f))$ こそが、我々がかつて扱っていた「f の解集合として与えられる代数曲線」の「正しい、スキーム論的な」定義である。

$\mathbf{Spec}A$ の閉点の集合は $\mathbb{C}^2$ と自然に同一視された。$\mathbf{Spec}A/I$ の閉点の集合は $V(I) = V(f)$ の閉点の集合と一致する。それは、$f \in (x-\alpha, y-\beta)$ なる (α,β) の集合と同一視され、$\{(\alpha,\beta) | f(\alpha,\beta) = 0\}$ と同一視されるのである。

より一般に、かつてあつかった「アフィン代数的集合」は、

$$\mathbf{Spec}\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$$

の閉部分スキーム

$$\mathbf{Spec}\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]/I$$

の閉点の集合にほかならない。

定義 3.13. 開部分アフィンスキーム。$\mathbf{Spec}A$ の開部分集合であって、$D(f)$ (f の零点集合 $V(f)$ の補集合）の形をしているものを考える。ここで、f が生成するモノイド（積閉集合）$S := \{1, f, f^2, \ldots\}$ を考えて、局所化

$$A[1/f] := A(S^{-1})$$

を考えると、環準同型 $A \to A[1/f]$ から $\mathbf{Spec}A[1/f] \to \mathbf{Spec}A$ が誘導されるが、その台集合での像は $D(f)$ と一致し、位相も $\mathbf{Spec}A$ から誘導される位相と $A[1/f]$ から来る位相は一致する。$\mathbf{Spec}A[1/f]$ を、f の非零点がなす $\mathbf{Spec}A$ の開部分アフィンスキームという。

例 3.14. $f, g \in \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ に対して g/f が $\mathbb{C}^n$ 上、f の零点を除いた（稠密な）開集合 $D(f)$ 上で定義されている、とかつて言った。今は

$$\mathbf{Spec}\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n][1/f] \to \mathbf{Spec}\mathbb{C}[t]$$

が $t \mapsto g/f$ により与えられている。すなわち、f/g は開部分アフィンスキーム上の射を与える。

さて、前半の授業で、「どうしてもわれわれは射影代数多様体を考えたい」すなわち「射影化の必要性」を見た。しかしながら、アフィンスキームの範疇では射影代数多様体を含むものは構成できない（と思う）。それは、たとえば次のような観察による。（ラフな考えなので、厳密ではない。）

定理 3.15. コンパクトな複素解析多様体 X において、X 全体で定義される正則関数（すなわち、$X \to \mathbb{C}$ なる正則関数）は定数のみ。

ここでは深入りしない。射影直線 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ においては、極を持たない関数が定数関数しかないことは複素一変数関数論の「最大値の定理」から従う。

さて、$\mathbb{C}$ に対応するアフィンスキームは $\mathbf{Spec}\mathbb{C}[t]$ であり、$\mathbf{Spec}A$ 上全体で定義された「正則」関数は、一つの射 $\mathbf{Spec}A \to \mathbf{Spec}\mathbb{C}[t]$ であり、これは $\mathbb{C} \subset A$ を仮定して $\mathbb{C}$ 上では $\mathbb{C}[t] \to A$ が恒等写像とする限り（つまり、$\mathbf{Spec}A$ 上の関数は複素定数を含むとする限り）、t の行き先である A の元を決めることに他ならない。というわけで、$\mathbf{Spec}A$ 上の正則関数は常に A 自身となり、定数だけになることはないからである（$A \neq \mathbb{C}$ であるかぎり）。

そこでわれわれは、「多様体」などがそうであったように、「アフィンスキームを部品として、貼りあわしてできたものの全体」を考えて、それを多様体の一般化＝（一般の）スキームとして定義する必要性にせまられる。

可微分多様体であれば、「位相空間 X」であって、局所的には開球と位相同型が与えられ（座標）、二つの位相同型（座標）は、重なっているところでは（座標間の）「可微分同相を与える」、という定義が可能であった。

スキーム論でも、実はほとんど同じ作戦をとることもできるのだが、ちょっと複雑になる。なぜ複雑になるのかを説明しようと試みたが、僕の力量ではできない。

結論からいうと、「位相空間上の環の層」で、局所的にアフィンスキームと同型になるもの、としてスキームを定義するのが最も標準的と思われる。

4　層

4.1　カテゴリー（圏）

定義 4.1. カテゴリー C とは、材料として次が与えられていて：すなわち

1. 「C の対象の集合」と呼ばれ $ob(C)$ と書かれる集合

2. 任意の二つの C の対象 $a, b \in ob(C)$ に対して「a から b への射の集合」と呼ばれ $\mathrm{H}om_C(a, b)$ と書かれる集合 (homomorphism set)

3. 合成とよばれる写像

$$\mathrm{H}om_C(b, c) \times \mathrm{H}om_C(a, b) \to \mathrm{H}om_C(a, c), \quad (g, f) \mapsto g \circ f$$

4. 各対象 a ごとに恒等射と呼ばれる元 $\mathrm{id}_a \in \mathrm{H}om_C(a, a)$

が与えられていて、次の公理を満たすもの。

任意の $f \in \mathrm{H}om_C(a, b)$ に対して

$$\mathrm{id}_b \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_a$$

任意の「合成可能な射」に対して

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

例 4.2.
- 集合を対象とし、写像を射とするとカテゴリーになる。集合のカテゴリーという。
- 群を対象とし、群準同型を射とすると、群のカテゴリーを得る。
- 単位的可換環を対象とし、単位的準同型を射とすると単位的可換環のカテゴリーを得る。
- $\mathbf{Spec}A$ を対象とし、環準同型 $B \to A$ を $\mathbf{Spec}A$ から $\mathbf{Spec}B$ への射と定義すると、アフィンスキームのカテゴリーを得る。

例 4.3. X を位相空間とする。対象:X の開集合の全体射:埋め込み $U_1 \subset U_2$（$U_1 \subset U_2$ のとき、かつそのときに限りただ一つ存在する）として、X の開集合のカテゴリーが定義される。

定義 4.4. 関手 (functor) C, D をカテゴリーとする。C から D への関手 F とは、材料として写像

$$F_o : ob(C) \to ob(D)$$

および、各 C の対象のペア a, b に対して

$$F_{a,b} : \mathrm{H}om_C(a, b) \to \mathrm{H}om_D(F_o(a), F_o(b))$$

なる写像が与えられ、次の公理を満たすもの。

- $F_{a,a}(\mathrm{id}_a) = id_{F_o(a)}$.
- $F_{a,c}(g \circ f) = F_{b,c}(g) \circ F_{a,b}(f)$.

ただし、二番目の条件は任意の合成可能な射（言い換えると $g : b \to c$, $f : a \to b$）に課される。

通常、単に $F : C \to D$ と記述される。

定義 4.5. (opposite category) カテゴリー C に対し、その opposite カテゴリー C^{op} を $ob(C^{op}) = ob(C)$

$\mathrm{H}om_{C^{op}}(a, b) := \mathrm{H}om_C(b, a)$ 合成を

$g \circ_{C^{op}} f := f \circ_C g$ で定義する。

定義 4.6. C^{op} から D への関手を、C から D への半変関手 (contravariant functor) という。

定義 4.7. 前層 (presheaf) X を位相空間とし、$C(X)$ をその開集合がなすカテゴリーとする。D をカテゴリーとする。関手 $F : C(X)^{op} \to D$ を、D に値をとる前層という。

例 4.8. X を位相空間とする。たとえば複素数の集合とおもってもよい。X のある開集合上定義された実数関数の全体は、前層となる。D として、環のカテゴリーをとる。

$U \in ob(X)$ に対して、$F(U) := U$ 上の実数値関数の全体 をとる。$U_1 \subset U_2$ のとき、$F_{U_2,U_1} : F(U_2) \to F(U_1)$ は制限写像で与えられる。

同様の例は、X 上のある開集合上定義された実連続関数でもよい。

この例により、$\alpha \in F(U_2)$ に対し、$\alpha|_{U_1} \in F(U_1)$ で $F_{U_2,U_1}(\alpha)$ を表すことが多い。

定義 4.9. D を集合のカテゴリーの部分カテゴリーとする。前層 $F : C(X)^{op} \to D$ が層であるとは、次の二条件を満たすことである。

$$U = \cup_{i \in I} U_i$$

を、X の開集合 U とその開被覆とする。

- $F(U)$ の元 α, β は、$\alpha|_{U_i} = \beta|_{U_i}$ が全ての i で成立するならば $\alpha = \beta$.

- 各 i について $\alpha_i \in F(U_i)$ をとり、全てのペア $i, j \in I$ に対して

  $$\alpha_i|_{U_i \cap U_j} = \alpha_j|_{U_i \cap U_j}$$

  となったとする。このとき、$\alpha \in F(U)$ が存在して $\alpha|_{U_i} = \alpha_i$ となる（任意の i で）。

層の条件とは、「局所的に一致していたら、大域的に一致」「局所的に存在しているものが、共通部分で一致していたら貼りあって大域的に存在するものになる」という気持ちを公理化したものである。

X 上の実数関数の前層、実連続関数の前層などは層である。

前層だが層でないものの例として、X を非連結な位相空間とし、$F(U)$ を U 上定義された実定数関数として得られる前層がある。

たとえば $X = 1, 2$:離散位相とする。$F(X) = F(1) = F(2) = \mathbb{R}$ とし、$F(\emptyset) = \{0\}$ とする。制限写像は恒等写像とし、空集合への制限は 0 写像とすると、前層である。しかし、$\alpha_1 \in F(1), \alpha_2 \in F(2)$ を異なる実数とすると、これは X 上の元に貼り合わさらない。

次の注意は、理解するのが困難なので、最後の一行だけ信じればよい。

注意 4.10. F が X 上の層であるとすると、$F(\emptyset)$ は一元集合となる。というのは、$\emptyset$ の開被覆として $I = \emptyset$ という「0 個の集合からなる」被覆がとれる。このとき、$\prod_{i \in I} F(U_i)$ は一元集合 $\{\emptyset\}$ である (何もとってこない、という取り方)。これらは貼り合わせの条件を満たす。ので、これらを貼り合わせてえられる元が $F(\emptyset)$ にある。一方、「一意性」の条件から、他には元はない。

これにより、たとえば F が環のカテゴリーに値をとる層であるならば、$F(\emptyset)$ はただ一元からなる環であり、それは零環 $= \{0\}$ である。

例 4.11. アフィンスキームの正則関数の層 $O_{\mathbf{Spec}A}$: A を単位的可換環とする。$\mathbf{Spec}A$ 上に、環のカテゴリーに値をとる層 $O_{\mathbf{Spec}A}$ が次のようにして定義される。

- $O(D(f)) := A[1/f]$.
- より一般に、開集合 U に対して $U = \cup_{i \in I} D(f_i)$ とあらわしたとき、$O(U)$ の元 α とは、「$\alpha_i \in O(D(f_i))$ であって貼り合わせの条件を満たしているもの」を、同値関係「ある開被覆の細分がとれて、細分上で等しいものは同値」で割ったもの。

これが層の公理を満たすことは全く自明でないが、証明がスキーム論の教科書には載っている。

定義 4.12. F を X 上の集合のカテゴリーに値をとる前層とする。$P \in X$ における F の stalk F_P を、順極限

$$F_P := \lim_{P \in U} F(U)$$

で定義する。右辺の意味は、

$$(\coprod_{P \in U} F(U))/\sim$$

ここに、$\sim$ は「ある $V \ni P$ が存在してそこに制限すると等しい」という同値類。

定義 4.13. 局所環つき空間 (locally ringed space)。X を位相空間, F を X 上の環のカテゴリーに値をとる層とする。(X, F) が局所環つき空間であるとは、全ての $P \in X$ について F_P が局所環であること。

命題 4.14. $(\mathbf{Spec}A, O_{\mathbf{Spec}A})$ は局所環つき空間であり、$P \in SpecA$ における stalk は局所化 $A_{(P)} := A((A-P)^{-1})$ となる。

定義 4.15. 局所環つき空間 (X, F) から (Y, G) への射とは、連続写像 $f : X \to Y$ と、各 Y の開集合 U に対して環準同型 $f_U^{\#} : G(U) \to F(f^{-1}(U))$ が与えられて、制限 $G(U_2) \to G(U_1)$, $F(f^{-1}(U_2)) \to F(f^{-1}(U_1))$, とコンパチブルであり、stalk に引き起こされる写像 $G_{f(P)} \to F_P$ が局所環としての準同型、すなわち F_P の極大イデアルの逆像が $G_{f(P)}$ の極大イデアルに一致するもの。(たとえば $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}$ は、局所環としての準同型ではない。(0) の逆像が極大イデアルになっていない)

定義 4.16. スキーム (X, F) とは、局所環つき空間で、$X = \cup_{i \in I} U_i$ なる開被覆がとれて、制限 $(U_i, F|_{U_i})$ が局所環つき空間としてあるアフィンスキーム $(\mathbf{Spec}A_i, O_{\mathbf{Spec}A_i})$ と同型になるもの。

スキーム間の射は、局所環つき空間の射として定義される。

参考文献

[1] 「代数幾何学」、秋月康夫　中井喜和　永田雅宣　(岩波書店)

[2] 「代数幾何学」、宮西正宜　(裳華房)