

# 代数学II：環と加群

松本 眞<sup>1</sup>

平成30年4月9日

<sup>1</sup>広島大学理学研究科 [m-mat@hiroshima-u.ac.jp](mailto:m-mat@hiroshima-u.ac.jp) <http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~m-mat/TEACH/teach.html>

# 目次

<b>第 1 章 環上の加群</b>	<b>3</b>
1.1 環上の加群	3
1.2 直和と直積と自由加群	6
1.3 完全系列と可換図式	8
1.4 単因子論	9
1.5 PID 上有限生成加群の構造 (有限生成アーベル群の構造) 定理	12
1.6 Jordan 標準形	15
<b>第 2 章 テンソル積</b>	<b>18</b>
2.1 テンソル積の定義	18
2.2 平坦加群・射影的加群・単射的加群	24
2.2.1 平坦加群	24
2.2.2 射影的加群	27
2.2.3 単射的加群	30
<b>第 3 章 Noether 環と Noether 加群</b>	<b>32</b>
3.1 Noether 性	32
3.2 可換 Noether 環上有限生成な可換環なら Noether	34
<b>第 4 章 既約性・アルティン性・半単純環</b>	<b>36</b>
4.1 群環	36
4.2 既約、完全可約、直既約	36
4.3 Artin 性、組成列	38
4.4 根基と中山の補題	40
4.5 Wedderburn の定理 (半単純環の構造定理)	41

# 第1章 環上の加群

## 参考文献

- 「代数学 II 環上の加群」桂利行著 東京大学出版会:入手しやすい。おおむねこれに沿って講義する。以下、「参考書」といったらこれを指す。
- 「岩波講座 基礎数学 ホモロジー代数 I」河田敬義著 岩波書店:5-lemma, 9-lemma, snake-lemma のステートメントと証明はこちらを見るとよい。
- 「岩波基礎数学選書 環と加群」山崎圭次郎著 岩波書店:きっちり書いてあるので、不思議に思ったことがあったらこれを見るとよい。

## 半群、モノイド

定義 1.0.1.  $S$  を集合とする。 $S$  上の二項演算 (binary operation) とは、

$$\circ: S \times S \rightarrow S$$

なる写像のことである。二項演算の指定された集合  $(S, \circ)$  をマグマという (めったに言わない)。マグマの二項演算が結合律

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

を満たすとき、 $(S, \circ)$  を半群という。(暗黙のうちに、 $a, b, c$  は  $S$  の任意の元を走ることになっている。)

マグマにおいて、 $e \in S$  が単位元であるとは、単位法則

$$a \circ e = a = e \circ a$$

を満たすことである。単位元は存在すれば一意。単位元の存在する半群  $(S, \circ, e)$  をモノイドという。

## 1.1 環上の加群

環  $R$  といったら、零環  $= \{0\}$  を許し、非可換環も許すが、積の単位元  $1$  を持つことは仮定する (積の単位元を持つ環を単位的環という)。特に単位的であることが重要であるとき、つい「単位的環」と書くことがある。整域とは、可換環  $R$  で  $R - \{0\}$  が積についてモノイド (単位元を持つ半群) となるものを指す。体とは、さらに  $R - \{0\}$  が群となるものを指す。従って、零環は整域でも体でもない。準同型、同型の「型」の字は「形」にはしないほうがいいかも知れないが、僕は字の区別ができないので混用する。

**定義 1.1.1.**  $R, M$  を集合とする。写像 (演算)

$$R \times M \rightarrow M, \quad (r, m) \mapsto r \bullet m \in M$$

のことを、 $R$  の  $M$  への作用という。

集合  $M, N$  に対し、 $M$  から  $N$  への写像の全体を  $\text{Map}(M, N)$  であらわす。

上のような作用を与えることと、

$$R \rightarrow \text{Map}(M, M)$$

を与えることとは同値。

**定義 1.1.2.**  $M$  を加法群、すなわち可換群であり、二項演算を  $+$  で、単位元を  $0$  で、逆元を  $-x$  で書いたものとする。加法群のことを単に**加群**ということもある。 $\text{End}(M)$  で、 $M$  からそれ自身への群準同形全体の集合を表す。 $\text{End}(M)$  は通常の加法により加法群、写像の合成を積として単位的環となる。

$R$  を環とする。作用  $R \times M \rightarrow M$  により  $M$  が左  $R$  加群であるとは、 $R \rightarrow \text{Map}(M, M)$  の像が  $\text{End}(M)$  に入り、

$$R \rightarrow \text{End}(M)$$

が単位的環準同形 (1 を 1 に送る環準同形) であること。(今後、環準同型といったら 1 を 1 におくことを仮定する。)

**例 1.1.3.**  $R$  が体のときは、 $R$  加群は線形代数でならうところの  $R$  線形空間となる。

**注意 1.1.4.**  $R \rightarrow \text{End}(M)$  が、環の積の順序をひっくり返すとき、すなわち  $(m \bullet r_1) \bullet r_2 = m \bullet (r_1 \cdot_R r_2)$  となるとき右  $R$  加群という。 $R$  が可換なときには左右の区別はない。

$n$  次元横ベクトルの空間  $V$  に、行列環  $M_n(R)$  を右からかけると右  $M_n(R)$  加群。

以後、 $R$  加群と言えは暗黙のうちに左  $R$  加群を指す。

$\{0\}$ : 零加群。 $R$  の作用はただ一つ定まる。

- $R$  加群準同形:  $f: M \rightarrow N$  なる  $R$  加群の間の写像で、 $R$  加群の演算 ( $R$  作用、和、 $0$ 、 $-$  の4つ) を保つもの。最後の二つを保つことは和を保つことから従う。 $R$ -hom と書く。
- $f$  が逆準同形を持つとき、同形という。準同形  $f$  に対しては、同形  $\Leftrightarrow$  全単射。
- 部分  $R$  加群:  $R$  加群の演算 ( $R$  作用、和、 $0$ 、 $-$  の4つ) で閉じている部分集合。 $R$  加群となり、うめこみは準同形。
- 商  $R$  加群:  $R$  加群  $M$  の商集合  $M'$  であり、標準全射  $M \rightarrow M'$  が  $R$  加群準同形となるもの。
- $M$  の任意の部分  $R$  加群  $N$  に対し、加法群としての商 (剰余) 群  $M/N$  は自然に  $R$  加群となる。その構造は、 $M \rightarrow M/N$  を  $R$  準同形とするようにすると一意に決まる。商と  $\text{Ker}$  の対応により商  $R$  加群は部分  $R$  加群と一対一に対応 (下記準同型定理使用)。
- $f: M \rightarrow M'$  を  $R$ -hom とすると、 $\text{Ker} f$  は  $M$  の部分  $R$  加群、 $\text{Im} f$  は  $M'$  の  $R$  部分加群。 $R$  加群としての同形  $M/\text{Ker} f \cong \text{Im} f$  を誘導する ( $R$  加群の準同形定理)。

- 余核:  $\text{Coker } f := M'/\text{Im } f$ . 余像:  $\text{Coim } f := M/\text{Ker } f$  と定義するがすぐには使わない。
- 零射.  $M, N$  を  $R$  加群としたとき、 $M$  の任意の元を  $N$  の  $0$  へ送る写像は  $R$ -hom. これを零射といい、単に  $0$  で表す。「射」という用語について: homomorphism (準同形) のことをしばしば「射」ともいう。

**定義 1.1.5.**  $M: R$  加群,  $S \subset M$  とする.  $\langle S \rangle_R \subset M$  を、 $S$  を含む最小の部分  $R$  加群をあらわす。これは、 $S$  の「任意の元を有限個とり、それらの  $R$  係数一次結合をとる」操作で得られる元の集合となり、 $S$  で  $R$  上生成される部分加群という。 $S$  が有限集合のとき、 $\langle S \rangle_R$  の形にあらわされる  $R$  加群を有限生成  $R$  加群という。 $S$  が空集合だと、定義からそれが生成するのは零加群。

$R^n$  は有限生成。

なお、 $n = 0$  のときは定義より  $R^0$  は  $0$  加群。

**命題 1.1.6.** (Universality of quotient)  $f: M \rightarrow M'$   $R$ -hom ( $R$  加群準同形のこと),  $S \subset M$  とする。

1.  $f(S) = \{0\}$  とすると、 $h: M/\langle S \rangle_R \rightarrow M'$  であって標準商写像  $q: M \rightarrow M/\langle S \rangle_R$  に対し  $h \circ q = f$  となるものがただ一つ存在する。

証明.  $f(S) = \{0\}$  と  $f$  が演算を保存することから  $f(\langle S \rangle) = \{0\}$ . よって、 $h$  は well-defined である (すなわち、 $m_1 - m_2 \in \langle S \rangle$  ならば  $f(m_1) - f(m_2) \in \{0\}$ ) から、写像としては存在。 $R$ -hom は機械的チェック。一意性は  $q$  の全射性から。□

とくに、 $S$  が部分  $R$  加群のとき ( $S = \langle S \rangle$ ) がよくつかわれる。

**注意 1.1.7.**  $\mathbb{Z}$  は単位的環の「圏」の「initial object」すなわち、任意の単位的環  $A$  に対してただ一つ環準同形  $\mathbb{Z} \rightarrow A$  が存在する。

$M$  を加法群とし、 $A := \text{End}(M)$  と置くと、上の事実から加法群はただ一通りの方法で  $\mathbb{Z}$  加群。加法群を加群と言うこともある。

## 圏 (カテゴリー)

圏論は扱わないが、圏の用語を使いたいのでさらっと紹介する。

**定義 1.1.8.** 圏 (カテゴリー)  $\mathcal{C}$  とは、次の4つの材料であって、次の二つの性質 (カテゴリーの公理という) を満たすもの。材料

**材料 1** (対象の集合と呼ばれる) 集合。  $\mathcal{C}_{obj}$  であらわす。その元を「 $\mathcal{C}$  の対象」と呼ぶ。

**材料 2** 各  $A, B \in \mathcal{C}_{obj}$  に対し、( $A$  から  $B$  への射の集合と呼ばれる) 集合。  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  で表す。  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  のことを  $f: A \rightarrow B$ ,  $A \xrightarrow{f} B$  などで表す。

**材料 3** 各  $A, B, C \in \mathcal{C}_{obj}$  に対し、(射の合成と呼ばれる) 写像

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C).$$

$g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ ,  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  に対し、この写像による像を  $g \circ f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$  で表す。

**材料 4** 各  $A \in \mathcal{C}_{obj}$  に対し、( $A$  上の恒等射と呼ばれる)  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$  の元。  $\text{id}_A$  で表す。

性質 (圏の公理ともいう)

**性質 1** (結合則、associativity)

任意の  $A, B, C, D \in \mathcal{C}_{obj}$  と任意の射

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

に対し、

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

**性質 2** (単位則、unit law, identity law)

任意の  $A, B \in \mathcal{C}_{obj}$  と  $A \xrightarrow{f} B$  に対して  $f \circ \text{id}_A = f$ 。また任意の  $C, A \in \mathcal{C}_{obj}$  と  $C \xrightarrow{g} A$  に対して  $\text{id}_A \circ g = g$ 。(圏の定義終わり)

例：集合の圏 (対象は集合、射は集合間の写像)、群の圏 (対象は群、射は群準同型)、位相空間の圏 (対象は位相空間、射は連続写像)、 $R$  加群の圏 (対象は  $R$  加群、射は  $R$ -hom) などなど。

## 1.2 直和と直積と自由加群

**直積** :  $M_\lambda$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) を  $R$  加群の族とすると、

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$$

は成分ごとの演算により  $R$  加群となる。(直積の universality を満たす：演習。)

**直和** : **Universality** による定義  $M_\lambda$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) を  $R$  加群の族とすると、

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$$

なる  $R$  加群と、 $R$ -hom の族  $\iota_\mu$  ( $\mu \in \Lambda$ )

$$\iota_\mu : M_\mu \rightarrow \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$$

で、次の universality を持つものがある。任意の  $R$  加群  $N$  であつて、 $i_\mu : M_\mu \rightarrow N$  が各  $\mu \in \Lambda$  に与えられているとき、次の性質を満たす  $h : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \rightarrow N$  が一意に存在する。

$$\text{性質 } i_\mu = h \circ \iota_\mu \text{ (for all } \mu \in \Lambda \text{)}.$$

このようなものがあれば、「 $R$  加群の圏における」 $M_\lambda$  の直和という。

**直和構成** :  $\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$  において、有限個を除いて成分が 0 であるようなものの全体は部分  $R$  加群をなすが、これが上の性質を満たし、直和となる。

( $R$  加群の圏では)  $\Lambda$  が有限集合なら直和と直積は一致

直和 (部分加群として) 上記とは意味が少し違う

上のように無限個の族に対しても同様に定義できるが、気分を変えて有限個の場合を扱ってみる。

$N_1, \dots, N_n \subset M$ : 部分  $R$  加群

$N := N_1 + N_2 + \dots + N_n \subset M$ : それぞれの元の和の集合 ( $N_i$  たちが生成する部分  $R$  加群と言っても同じ)

(直和の universality から存在する、あるいはただ元の和により得られる)  $R$ -hom

$$\bigoplus_{i=1}^n N_i \rightarrow N$$

が同形るとき、 $N$  は  $N_i$  たちの直和であるという。

### 自由 $R$ 加群と基底

**定義 1.2.1.**  $M$  を  $R$  加群とする。元の集合  $x_\lambda \in M$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) が  $R$  上 **1 次独立**とは、有限一次結合  $\sum_{\lambda: \text{有限個}} a_\lambda x_\lambda$  が 0 のとき、常に  $a_\lambda = 0$  となること。さらに、 $x_\lambda$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) が  $M$  を  $R$  加群として生成するときに、 $x_\lambda$  を  $M$  の**基底**という。

**定義 1.2.2.** 基底の存在する  $R$  加群を自由  $R$  加群という。

このとき、 $M$  の基底  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  に対し、 $M_\lambda := R \bullet x_\lambda = \langle x_\lambda \rangle_R \cong R$  とおくと

$$M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R$$

すなわち、自由  $R$  加群とは  $R$  の (任意個の) 直和と同形な  $R$  加群に他ならない。

特に、自由かつ有限生成なら有限個 (たとえば  $n$  個) の基底がとれる (有限個の生成元をあらわすのに必要な基底をならべると、有限集合でありこれで生成されるから)。この場合には

$$M \cong R^n.$$

**定理 1.2.3.**  $R$  が体のとき、任意の  $R$  加群は自由である。(基底の存在定理)。基底の元の個数 (濃度) は基底の取り方によらない。

有限次元線形空間の場合については、線形代数でなっているはずである。実用上はその場合を知っていればたいてい十分である。無限次元の場合の証明は、基底の存在には Zorn の補題を使う。濃度の比較も含めて、ここではやらない。

**定理 1.2.4.**  $R$  が零環ではない単位的可換環のとき、自由  $R$  加群  $M$  の基底の元の個数 (より一般には濃度) は基底の取り方によらない。この数を  $M$  のランク (rank, 階数) という。  $R$  が体のときには線形空間  $M$  の次元という。

証明. 無限基底のときは、なんだか考えにくいので有限個の基底の場合のみ考えてもらってもいいです。

$R$  のイデアルで 1 を含まないもの全体は、包含関係に関して空ではない帰納的順序集合となる。(0 イデアルがあるから空でない、というところで「零環ではない」という条件を使う。) 従って、Zorn の補題により包含関係に関して極大な 1 を含まないイデアルがあり、これは  $R$  の極大イデアル  $m$  をあたえる。

いま、 $mM$  で  $M$  の元の  $m$  係数一次結合全体を表すと、これは  $M$  の部分  $R$  加群となる。商  $R$  加群  $M/mM$  には  $m$  は零倍で作用する。従って  $(R \rightarrow \text{End}(M/mM))$  の核が  $m$  を含むから  $M/mM$  は体  $R/m$  上の加群となる。ここで、 $M$  の基底を一つとると、その  $M/mM$  における像が  $R/m$  加群としての基底となることがわかる。 $(x_\lambda$  を  $M$  の基底としたとき、 $x_\lambda$  の像が  $M/mM$  を  $R$  上 ( $R/m$  上といっても同値) 生成することは自明。一次独立性だが、 $mM$  の元を  $x_i$  の一次結合で書くと定義から  $\sum m_i x_i$  ( $m_i \in m$ ) と一通りに書ける。いま、 $R$  の元の  $R/m$  への像、 $M$  の元の  $M/mM$  への像を  $\bar{a}$  であらわすと、 $\sum \bar{a}_i \bar{x}_i = 0$  ならば  $\sum a_i x_i \in mM$ 、上の注意により  $a_i \in m$  で  $\bar{a}_i = 0$ 。)

従って、基底の元の個数 (濃度) は、 $M/mM$  の体  $R/m$  線形空間の一つの基底の元の個数に一致する。(上の体に関する基底の定理から) それは基底の取り方によらない。

(ところで、細かいことですが、 $R$  が零環だと  $R$  加群は零加群しかありません。そこには  $\{0\}$  という一元からなる基底と、空集合という 0 個の元からなる基底があり、個数の一意性が成り立ちません。)  $\square$

こうして、自由  $R$  加群の同形類は、濃度と一対一となる。特に、有限生成自由  $R$  加群の同形類は階数により自然数と一対一。(自然数は 0 を含むとする。)

ねじれ元。  $R$  加群  $M$  の元  $x$  に対し、その annihilator

$$\text{Ann}(x) = \{a \in R \mid ax = 0\}$$

が  $\{0\}$  でないとき  $x$  をねじれ元という。  $\langle x \rangle_R$  が  $R$  と同形でない、と言っても同じ条件。

$R$  が整域なら、ねじれ元の全体が部分  $R$  加群をなす。ねじれ部分 (torsion part) という。

### 1.3 完全系列と可換図式

$R$  加群の列  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) と  $R$  加群準同型

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \rightarrow \dots \rightarrow M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+2} \rightarrow \dots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n$$

が与えられたとき、長さ  $n$  の系列という。左や右や両方に無限に伸びた系列も自然に考えられる。この系列が  $M_i$  において完全 (exact) であるとは、

$$\text{Im} f_{i-1} = \text{Ker} f_i$$

が成立することである。いたるところ完全な系列を完全系列 (exact sequence) という。  $0 \rightarrow M \rightarrow N$  が完全であることと  $M \rightarrow N$  の単射性は同値、  $M \rightarrow N \rightarrow 0$  が完全であることと  $M \rightarrow N$  の全射性は同値。

**定義 1.3.1.**  $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \rightarrow 0$  が完全系列であるとき、これを短完全系列 (short exact sequence) という。これは、 $f$  が単射、 $g$  が全射で、自然に誘導される  $N/\text{Im}(f) \rightarrow L$  が単射 (同型といっても同じ) であることと同値。

**可換図式** 図式を TeX で書くのが面倒なので黒板で説明するが、

$$\begin{array}{ccc} N_1 & \rightarrow & M_1 \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ N_2 & \rightarrow & M_2 \end{array} \quad (1.1)$$



などと書いたら、この  $\square$  の書いてある 4 角形の各辺の射の合成（この場合、左上から右下に行くのに二通りある）が一致すること。もともとは、建築現場で「ここにガラスが入っています」という記号らしい。

five lemma, nine lemma, snake lemma などはホモロジー代数の参考書を見てほしい。（参考書の演習問題にあらわれているこれらの補題は、一般的に使われているものより弱いのでお勧めしない。）

可換図式は universality を使って証明するときに便利である。

**例 1.3.2.** 命題 1.1.6 とその証明後のコメントの言い換えは、次のとおり。  $N \subset M$  を部分  $R$  加群とすると

$$0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow M/N \rightarrow 0$$

なる短完全系列がある。今、  $f: M \rightarrow L$  なる  $R$ -hom が与えられたとき、合成  $N \rightarrow M \rightarrow L$  が 0 になるならば  $f$  は  $M/N$  を経由する ( $f$  factors through  $M/N$ )、すなわち  $f$  はある  $h: M/N \rightarrow L$  により合成  $M \rightarrow M/N \rightarrow L$  と一致する。このような  $h$  はただ一つ存在する。

これを使うと上の可換図式 (1.1) に付随して、  $R$ -hom  $M_1/\text{Im}(N_1) \rightarrow M_2/\text{Im}(N_2)$  が誘導される。そこに登場した縦二本の  $R$ -hom が同形  $M_1 \cong M_2$ ,  $N_1 \cong N_2$  であるなら、誘導された  $R$ -hom も同型である。

## 1.4 単因子論

行列について。  $R$  を可換環とする。  $M_{n,m}(R)$  で  $n \times m$  の  $R$  成分の行列の集合をあらわす。ランク  $nm$  の自由  $R$  加群となる。

$n = m$  のとき、  $M_n(R)$  で表す。積が入り、単位環となる。その積に関する (モノイドの) 可逆元の集合  $M_n(R)^\times$  は群をなす。これを  $\text{GL}_n(R)$  で表す。  $A \in M_n(R)$  が  $\text{GL}_n(R)$  に入る必要十分条件は、  $AB = E_n = BA$  なる  $B$  が存在することになる。このような行列を可逆行列という。

**命題 1.4.1.**  $A \in M_n(R)$  が可逆である必要十分条件は、  $\det A \in R^\times$  (ここで  $R^\times$  は  $R$  の乗法についての可逆元のなす群)。

証明.  $\tilde{A}$  を  $A$  の余因子行列とする。線形代数でならったように  $A\tilde{A} = \det(A) \cdot E_n = \tilde{A}A$  である。従って、  $\det(A)$  が  $R$  の可逆元ならば  $\frac{1}{\det(A)}\tilde{A}$  が  $A$  の逆元を与える。

逆に、  $A$  が可逆ならば  $AB = E_n$  の determinant をとって  $\det(A)\det(B) = 1$ 、すなわち  $\det(A) \in R^\times$ 。  $\square$

**注意 1.4.2.** 特に、  $R = \mathbb{Z}$  のとき、  $\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$  であるから、可逆行列とは行列式が  $\pm 1$  となる行列のことになる。このような行列を unimodular 行列という。

単項イデアル整域を PID と書く。

**定理 1.4.3.** (単因子形)



(1) 一列目に  $a_{11}$  の倍数でない元があるとき次のようにして減らせる。行入れ替えで  $a_{21}$  にその元を持ってくる。 $a_{11}, a_{21}$  に着目する。 $a_{11}$  に  $a_{21}$  の  $R$  の元倍を足して、Euclid 整域の意味で  $(1, 1)$  成分を  $a_{21}$  より小さくできる。次に、小さくなった  $a_{11}$  の定数倍を  $a_{21}$  に足すことで、 $a_{21}$  を  $a_{11}$  より小さくできる。これを繰り返すと、 $a_{11}$  と  $a_{21}$  の間で互除法をやっていることに他ならない。この、互除法をやるときに、成分  $a_{11}$  と  $a_{21}$  に着目しながら、「定数倍して相手に足す」という部分を 1 行目と 2 行目の間で、行基本変形として行列に作用させる。互除法の原理により、 $a_{11}$  と  $a_{21}$  のどちらかの成分が 0 になって止まり、0 でない方は  $a_{11}, a_{21}$  の最大公約数  $d$  (単元倍を除いて一意) となる。仮定より、 $d$  は  $a_{11}$  より真に小さいので、 $d$  を  $(1, 1)$  成分に行変形を用いて持ってきて「ステップが進んだ」。

(2) 一行目に  $a_{11}$  の倍数でない元があるとき列変形により、上と同じ議論により「ステップが進む」。

(3) 一行目、一列目が全て  $a_{11}$  の倍数となったとき一行目の  $R$  の元倍を 2 行目から引く、3 行目から引く、をくりかえして一列目を  $a_{11}$  以外全て 0 にできる。そののち、一列目の倍数をほかの列に足すことで一行目を  $a_{11}$  以外全部 0 にできる。

この状態 (\*) で、 $a_{11}$  によって割り切れていない成分  $a_{ij}$  があるとき、 $i$  行を 1 行に足す基本変形で  $a_{11}$  を変えないまま  $a_{ij}$  を  $a_{ij}$  にできる。すると、上の (2) の状態になって「ステップが進む」。

したがって、ステップが進まなくなるのは (\*) の状態であつ、全ての成分が  $a_{11}$  の倍数となったときである。このとき、一行目と一列目をとりさった残りの行列に帰納法を適用すると、単因子形が求まる。 $e_1 := a_{11}$  とおき、残りの行列の単因子を  $e_2, \dots, e_s$  とすれば  $e_1 | e_2$  で、 $A$  の単因子形が求まっている。

$R$  が一般の PID の場合上と同じ議論をするが、 $a_{11}$  を「小さく」する、という大きさを、整除関係によって定義する。すなわち、 $a|b$  かつ  $b$  が  $a$  の単元倍でないとき、 $a < b$  とする。これは、イデアルとして  $(a) \subset (b)$  かつ  $(a) \neq (b)$  と同値である。

PID はネーター環なので、減少列  $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$  は有限列である。(この事実の証明：減少列に対しイデアル  $(a_1, a_2, \dots)$  を生成する  $b$  をとれば、任意の  $a_i$  に対して  $(a_i) \subset (b)$  より  $b|a_i$  であり、かつ  $b$  は  $a_i$  の有限個の  $R$  係数一次結合だからその添え字の最大値  $j$  をとれば  $a_j|b$  となるから  $a_j|a_i$ 、 $a_j \leq a_i$  となり  $i$  は  $j$  を超えられない。)

**補題 1.4.4.**  $R$  を PID とする。 $x, y \in R$  とする。 $x, y$  が生成するイデアル  $(x, y)$  は PID の定義よりある  $d$  により  $(d)$  に一致する ( $d$  を  $x, y$  の最大公約元という、単元倍を除いて一意に定まる) となったとする。このとき、 $\begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(R)$  で

$$\begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるものがある。

証明は、 $d$  の定義から  $sx+ty = d$  となる  $s, t$  が存在し、このとき  $(x, y) = (d)$  から  $x = x_0d, y = y_0d$  なので  $u = -y_0, v = x_0$  とおけば  $ux+vy = 0$  であり、行列式  $sv-tu = sx_0+ty_0 = d/d = 1$  である (両辺を  $d$  倍するか、商体で考える)。

上の単因子形の存在証明では、 $a_{11}$  と  $a_{21}$  に着目して左から可逆行列を掛けてそれぞれ  $d, 0$  とできるという点で Euclid 性を使っていた。この補題により、このステップは一般の PID で

実行できることがわかる。(s, t, u, v からなる  $2 \times 2$  行列を左上にもち、残りは対角成分のみが1で他は0なる行列 (\*\*)) を左からかければよい。)  $a_{11}$  が真に減る回数には有限個であることも示されているので、単因子形を求めるアルゴリズムは停止する。

**系 1.4.5.**  $R$  を PID とする。  $M \in \text{GL}_m(R)$  は、行の単元倍行列、行入れ替え行列と (\*\*)) の形の行列の積によりあらわされる。

証明.  $M$  に、定理の前半を使うと、  $PMQ$  を単因子形にできる。このとき、その証明を使えば  $P$  と  $Q$  は入れ替え行列と (\*\*)) の形の行列の積であらわされる。さて、  $M \in \text{GL}_m(R)$  より、その行列式は  $R^\times$  であるから単因子は  $e_i \in R^\times$ ,  $s = m$  でなくてはならない。  $P$  にさらに行の単元倍行列を掛けることにより  $e_i = 1$  としてよい、すなわち  $PMQ = E_n$  としてよい。このとき移項して  $M = P^{-1}Q^{-1}$  であり、これは系を示している。  $\square$

#### 定理の後半：単因子形の一意性

**補題 1.4.6.**  $R$  を PID,  $A \in M_{m,n}(R)$  とする。  $l \leq \min\{m, n\}$  に対し、  $d(l, A)$  で「 $A$  の  $l$  次小行列式全ての最大公約数」を表す (単元倍の違いを除いて定義される)。このとき、可逆な  $P, Q$  に対して  $d(l, A)$  と  $d(l, PAQ)$  は単元倍しか変わらない。

証明. 系 1.4.5 により、  $d(l, A)$  が  $A$  に左から (さらに、右から) 行の単元倍行列、行入れ替え行列と (\*\*)) の形の行列を掛けたときに変わらないことを示せばよい。左から掛けたときについて考える。右から掛けたときも同様に示せる。

前半二つについては、行列式の線形性と交代性から従う。最後のものについては、小行列の位置に関して場合わけを行う。  $l$  次小行列が、1 行目、2 行目を含まないときには (\*\*)) を左からかけても変わらない。両方含むときには、 (\*\*)) の形の  $l$  次行列がこの小行列に掛け算されるから、行列式は変わらない。片方だけ含むとき、たとえば一行目だけを含むときは、  $l$  次小行列は (\*\*)) を掛けることによって一行目が  $sa_1 + ta_2$  の形に変わり、他は変わらない。その行列式は、一行目を  $a_1$  としたものの  $s$  倍と一行目を  $a_2$  としたものの  $t$  倍の和であるから、  $d(l, A)$  の倍数であることは示される。以上合わせて、  $P$  を (\*\*)) の形の行列としたときに  $d(l, A) | d(l, PA)$  が示される。  $P$  の逆行列  $P^{-1}$  も (\*\*)) の形をしているので  $d(l, PA) | d(l, P^{-1}PA)$  が言えて、  $d(l, A)$  と  $d(l, PA)$  が単元倍しか変わらないことがわかる。  $\square$

この補題から、  $A$  の単因子形の一つを  $M$  とすると  $d(l, A) = d(l, M)$  (単元倍を除いて)。単因子形に対しては  $d(l, M) = e_1 e_2 \cdots e_l$  であるから、  $e_i$  は  $A$  により  $d(i, A) / d(i-1, A)$  として単元倍を除いて一意に決まる。

**系 1.4.7.** 商集合  $\text{GL}_m(R) \backslash M_{m,n}(R) / \text{GL}_n(R)$  は、単因子形 (単元倍は同一視する) の集合と上の対応により全単射。

## 1.5 PID 上有限生成加群の構造 (有限生成アーベル群の構造)

### 定理

**定理 1.5.1.**  $R$  を PID とする。  $R$  上のランク  $m$  ( $m < \infty$ ) の自由  $R$  加群  $M$  の部分  $R$  加群  $N$  は、自由  $R$  加群である。さらに、  $N$  の階数は  $m$  以下となる。

$m$  に関する帰納法を用いる。 $m = 0$  のときには示すべきことは自明である。 $m = 1$  のとき、 $R$  の部分  $R$  加群とはイデアルであり、PID だから単項生成で、 $0$  イデアルでなければ  $R$  と同形で自由となる。 $0$  イデアルでもランク  $0$  の自由  $R$  加群。

$m - 1$  での成立を仮定する。 $M \cong R^m$  を横ベクトルとみなし、右端の成分への射影を  $\text{pr}_m$  とすると

$$0 \rightarrow R^{m-1} \rightarrow M \xrightarrow{\text{pr}_m} R \rightarrow 0$$

なる短完全系列ができる。 $\text{pr}_m(N) \subset R$  は  $R$  加群であり、 $m = 1$  の場合からこれはランク  $0$  またはランク  $1$  の自由  $R$  加群である。

短完全系列

$$0 \rightarrow R^{m-1} \cap N \rightarrow N \xrightarrow{\text{pr}_m} \text{pr}_m(N) \rightarrow 0$$

は、右端が自由  $R$  加群なので分裂し、 $N$  は右と左の  $R$  加群の直和となる (演習)。左は帰納法の仮定より自由であり、自由加群の直和は自由 (基底は合併集合) となるので題意は証明された。

なお、上の定理で、次元に関する有限性の仮定は実は必要ない。

**定理 1.5.2.**  $R$  を PID とする。自由  $R$  加群  $M$  の部分  $R$  加群  $N$  は自由  $R$  加群である。

証明.  $M$  の基底を  $S$  とする。 $S$  の部分集合  $T$  であって  $N \cap \langle T \rangle$  が自由  $R$  加群であるものを考え、その基底  $U$  を一つ固定する。こうして得られるペア  $(T, U)$  の集合を  $\mathcal{M}$  であらわす。 $\mathcal{M}$  は空集合のペアを含むから空ではない。また、包含関係により帰納的順序集合となっているから、Zorn の補題により極大元  $(T_0, U_0)$  が存在する。いまもし  $T_0 = S$  であったとすると、 $U_0$  は  $N = N \cap \langle T_0 \rangle$  の基底を与えるから帰結が言える。いまもし  $T_0 = S$  ではなかったとすると、 $s \in S \setminus T_0$  が存在する。 $T_1 := T_0 \cup \{s\}$  とする。短完全系列

$$0 \rightarrow \langle T_0 \rangle \rightarrow \langle T_0, s \rangle \rightarrow \langle s \rangle \rightarrow 0$$

を考えて、真ん中を  $N$  に制限すると

$$0 \rightarrow N \cap \langle T_0 \rangle \rightarrow N \cap \langle T_0, s \rangle \rightarrow \text{pr}(N) \rightarrow 0$$

であるが、 $\text{pr}(N) \subset \langle s \rangle$  は  $R$  が PID ゆえ自由であるので、この短完全系列は分裂する。仮定より左端は自由。よって真ん中も自由  $R$  加群である。とくに、真ん中の基底として、左側の部分  $R$  加群の基底と、右側の分裂の像の基底の合併がとれるので、 $U_0$  を含む基底  $U_1$  がとれる。 $(T_1, U_1)$  の存在は、極大性に矛盾する。□

**定理 1.5.3.** (有限生成 PID 加群の構造定理)  $R$  を PID とし、 $M$  を有限生成  $R$  加群とする。ある自然数  $r \geq 0$  と  $R$  の元の列  $e_1 | e_2 | e_3 | \cdots | e_s$  であって、 $e_1$  が単元でなく  $e_s \neq 0$  なものが存在して

$$M \cong R^r \oplus R/(e_1) \oplus \cdots \oplus R/(e_s)$$

と  $R$  加群として同形となる。このような  $r$  は一意に定まり、 $M$  の (自由) ランクという。 $e_1, \dots, e_s$  は、単元倍を除いて一意に定まる。

このとき、 $M$  を  $R$  上生成するのに必要な最小生成元の個数は  $r + s$  となる。(演習)

証明. **同形の存在**  $M$  が  $m$  元で生成されるということと、 $R^m \rightarrow M$  なる  $R$  加群全射があることとは同値。この全射の核は、定理 1.5.1 により有限生成自由。したがって、

$$0 \rightarrow R^n \rightarrow R^m \rightarrow M \rightarrow 0$$

なる短完全系列がある。演習問題により、 $R^n \rightarrow R^m$  は（それぞれ縦ベクトルの集合とみなして）ある  $A \in M_{m,n}(R)$  を左から掛ける写像と一致させることができる。単因子形の存在定理 1.4.3 を用いると、ある可逆行列  $P, Q$  により  $PAQ$  は単因子形にできる。可換図式であらわすと

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & R^n & \xrightarrow{A} & R^m & \rightarrow & M \rightarrow 0 \\ & & Q \uparrow & & P^{-1} \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & R^n & \xrightarrow{\text{単因子形}} & R^m & \rightarrow & E \rightarrow 0 \end{array}$$

である。ここに、上向きの射は  $Q, P^{-1}$  をそれぞれ掛けることにより定義される同形射であり、右端の上向きの射はそこから例 1.3.2 により誘導される射で、同形となる。

ここで、 $E$  は、単因子形の形から

$$R/(e_1) \oplus R/(e_2) \oplus \cdots \oplus R/(e_s) \oplus R^{m-s}$$

と同形となる。 $e_i$  のうち単元であるものは  $R/e_i \cong \{0\}$  となるから取り除いて良く、定理のような表示が与えられた。

**一意性の証明** 同じ  $M$  が同様の条件を満たすように  $R^{r'} \oplus R/(e'_1) \oplus \cdots \oplus R/(e'_{s'})$  と部分  $R$  加群に直和分解されたとする。 $R$  が整域なので、ねじれ元は部分加群となる。 $M$  が上のような表示をもつ  $R$  加群であれば、ねじれ元の全体は  $R/e_1 \oplus \cdots \oplus R/e_s$  であらわされる部分となる。ここから  $M$  の部分集合としてねじれ部分群が

$$R/e_1 \oplus \cdots \oplus R/e_s = R/(e'_1) \oplus \cdots \oplus R/(e'_{s'}) \quad (1.3)$$

と一致する。従って、その商は自由  $R$  加群であるが、ランクの一意性 (定理 1.2.4) により  $r = r'$  となる。あとは、上の (1.3) が成立しているときに、 $s = s'$  かつ  $(e_i) = (e'_i)$  を言えばよい。

まず、一般に (1.3) の同形があつたら  $s = s'$  となることを示す。このねじれ加群を改めて  $M$  としよう。さて、 $e_1$  は単元でないから、 $e_1$  を含む極大イデアル  $p$  が  $R$  に存在する。一般に  $M$  に対し、イデアル  $p$  と  $M$  の元の積で生成される  $M$  の部分  $R$  加群を  $pM$  と書く。いまこの  $M$  は  $R/(e_i)$  の直和に分解されている。このことから、 $M/pM$  は  $(R/(e_i))/(pR/(e_i))$  の直和に分解されることがわかる（なぜでしょう）。 $(p) \supset (e_1) \supset \cdots$  により、各直和因子は  $(R/(e_i))/(pR/(e_i)) \cong R/p$  と  $R$  加群として同型になる。従って

$$M/pM \cong (R/p) \oplus \cdots \oplus (R/p) \quad s \text{ 個}$$

となる。同じことを  $e'_i$  の方でやろうとすると、 $(p) \supset (e_i)$  となる保証がない。しかし、 $(p) \supset (e_i)$  なら商は上のようなになるし、 $(p) \not\supset (e_i)$  でないなら極大性より  $(p) + (e_i) = R$  となり、 $(R/e_i)/(pR/e_i) = 0$  となる。従って、 $M/pM$  の体  $R/p$  上の次元は  $s'$  以下となる。これより  $s \leq s'$ 。逆に、 $(e'_1)$  を含む極大イデアル  $q$  をとって議論すれば  $s \geq s'$ 。よって  $s = s'$ 。

さて、あとは  $(e_i) \neq (e'_i)$  となるような  $i$  が存在しないことを示せばよい。存在したとして、そのようなもののうち  $i$  が最大のものを持ってくる。(1.3) の両辺に  $e_i$  を掛けると、 $e_i(R/e_j) = 0$  ( $j \leq i$ ) である。 $((e_j) \subsetneq (e_i))$  なる最初の  $j$  をとれば左辺は非零加群の  $s - j + 1$  個の直和

$$e_i R/e_j \oplus \cdots \oplus e_i R/e_s$$

となる。同じ加群 (1.3) の右辺に  $e_i$  を掛けると、 $i$  の最大性から、それを超えたら  $(e_{i+1}) = (e'_{i+1})$  であるから、少なくとも上の  $s - j + 1$  個の直和となる。ところが、このような条件の直和の個数は一定になることをたったいまみた。このことから、 $e_i(R/(e'_i)) = 0$  とならなくてはならず、 $e'_i|e_i$  が言えた。逆の議論により  $e_i|e'_i$  となり、仮定に矛盾。□

**系 1.5.4.**  $R$  を PID とし、 $M$  を有限生成  $R$  加群とすると、

$$M \cong R^r \oplus \bigoplus_{i=1}^k \bigoplus_{j=1}^{l_i} (R/(p_i^{e_{ij}}))^{\mu_{ij}}$$

と表せる。すなわち、相異なる (単元倍で写りあわない) 素元  $p_1, \dots, p_k$  があって、 $R/(p_i^{e_{ij}})$  の形の  $R$  加群の直和になり、その重複度は  $\mu_{ij}$  である ( $\mu_{ij} > 0$ )。このような標記の仕方は  $p_i$  の単元倍と順番の入れ替えを除いて一意。

**証明.** 存在上の定理において、 $R/e_i$  に対し  $e_i$  を素元分解して中国剰余定理を使うと存在が言える。 $(e_i$  と  $e_{ij}$  は無関係で、紛らわしい記法でごめんなさい。) **一意性**  $M$  において、素元  $p$  に対し、 $p$  を何度か掛けると  $0$  となる部分集合は  $R$  部分加群である。 $M$  の  $p$  部分 ( $p$ -part) とする。 $M$  が有限個の  $p$  に関して、 $p$  部分の直和にただ一通りに分解することを示すことができる。各  $p$  部分に対して、上の定理の一意性の証明と同様の、しかしより簡単な議論を適用すれば一意性が出る。□

$R = \mathbb{Z}$  とすると前のから次の定理を得る。

**定理 1.5.5.** (有限生成アーベル群の構造定理ないし基本定理)  $M$  を有限生成アーベル群とすると、

$$M \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/(e_1) \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/(e_s)$$

とあらわせる。ここに、 $1 < e_1|e_2|\cdots|e_s$  は 2 以上の自然数であり、 $r$  とともに  $M$  により一意に決まる。

**系 1.5.6.** (有限アーベル群の構造定理ないし基本定理)  $M$  を有限アーベル群とすると、

$$M \cong \mathbb{Z}/(e_1) \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/(e_s)$$

とあらわせる。ここに、 $1 < e_1|e_2|\cdots|e_s$  は 2 以上の自然数であり、 $M$  により一意に決まる。 $e_s$  はこの加群の元の位数のうち最大のものであり、 $M$  の指数 (exponent) ということがある。

これらの結果についても、「素数べき版」があるが割愛する。

## 1.6 Jordan 標準形

$K$  を体とし、 $V = K^n$  (たてベクトルの空間) ,  $A \in M_n(K)$  とする。 $A$  を左から掛けることで  $A \in \text{End}_K(V)$  ( $V$  の  $K$  線形自己準同型の成す環) とみなせる。

環準同型  $K[t] \rightarrow \text{End}_K(V)$  であって、 $t$  を  $A$  にうつし、 $K$  の元はスカラー倍に移すものただ一つある (多項式環の universality)。これにより、 $V$  は  $K[t]$  加群となる。(より具体的には、 $f(t) \cdot v = f(A)v$  で与えられる。)

以下、 $R = K[t]$  と書く。次の短完全系列が存在する。

$$0 \rightarrow R^n \xrightarrow{(tI_n - A)} R^n \rightarrow K^n \rightarrow 0.$$

これを正確に述べる。 $V := K^n$  の標準基底を  $e_1, \dots, e_n$  とする。形式的に  $e_i$  を基底とする一次元自由  $R$  加群  $R \cdot e_i$  を考える。ここから、 $R$  の元を実際に  $e_i \in V$  に作用させる ( $t$  倍は  $A$  倍で作用) ことで、 $R$  加群準同型  $R \cdot e_i \rightarrow V$  が得られる (自由  $R$  加群の universality と言ってもよい)。これらを合わせて、 $f : R^n := \bigoplus (R \cdot e_i) \rightarrow V$  なる  $R$  加群準同型ができる。 $\text{Im}(tI - A) \subset \text{Ker} f$  は、 $t$  倍することと  $A$  倍することが同じ結果になることから  $e_i$  ごとに調べて確かめられる。従って

$$R^n / \text{Im}(tI - A) \rightarrow R^n / \text{Ker}(f) \cong V$$

となる。全射性は (商だから) 自明である。左辺の  $K$  上の次元を考える。modulo  $\text{Im}(tI - A)$  で  $te_i = Ae_i$  を使うと、 $e_i$  の係数を modulo  $\text{Im}(tI - A)$  で全て  $K$  の元に取り換えられることがわかる。ここから、左辺は  $K$  上  $e_i$  で生成されることがわかり、次元は  $n$  以下となる。それが、 $V$  に  $K$  線形に全射しているので、線形代数の定理により同型となる。従って、短完全系列の真ん中の完全性が得られる。 $tI - A$  の単射性は使わないのだが、その行列式が非零なことと  $K[t]$  が整域であることから単射性は (余因子行列をとるなどの手法で) 従う。

単因子論より

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & R^n & \xrightarrow{(tI_n - A)} & R^n & \rightarrow & V \rightarrow 0 \\ & & Q \uparrow & & P^{-1} \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & R^n & \xrightarrow{\text{単因子形}} & R^n & \rightarrow & E \rightarrow 0 \end{array}$$

とできる。ここで  $E$  は  $R$  加群として定理 1.5.3 の形に同型となる。その形は、 $tI_n - A \in M_n(R)$  の単因子形を求めればわかる。さらに中国剰余定理を用いて、系 1.5.4 の形にも同型である。

さて、いま、 $V$  と同形な  $R$  加群  $E$  が与えられたとすると、 $g : V \rightarrow E$  なる  $R$  同型が与えられたことになる。 $t$  倍は、左では行列  $A$  の積であたえられ、 $E$  には  $t$  倍で与えられる。今、 $E$  として簡単な形のものを取り、ある  $K$  線形基底をとって  $t$  倍の  $K$  線形表現行列を標準的な形  $J$  とすれば、 $J = GAG^{-1}$  とできる。ここに、 $G$  は  $g$  のこれらの基底に関する表現行列をあらわす。系 1.5.4 に現れる直和因子において、 $t$  倍の表現行列を求めてみる。

代数閉体とは限らない場合  $f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0 \in K[t]$  とする。 $K[t]/(f(t))$  において、基底  $t^{n-1}, \dots, t, 1$  をとると、 $t$  倍の  $K$  線形表現行列は

$$A_f := \begin{pmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

となる。これを相伴行列 (companion matrix) という。(ウソ。通常この行列を逆対角線でひっくり返したものをいう。)



$K[t]/(f(t))^2$  においては、 $t^{n-1}f(t), \dots, tf(t), f(t), t^{n-1}, \dots, t, 1$ , なる基底をとると、

$$\begin{pmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ A_f & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ 0 & & A_f & \end{pmatrix}$$

なる表現行列が得られる。3 乗だと、3 段重ねになる。こうやって、一般の体での標準形が得られる。これを、有理標準形という。

**代数閉体のとき**：あるいはより緩く、特性多項式が一次式の積に分解するときは Jordan 標準形にできる。すなわち、既約多項式は  $f(t) = (t - \alpha)$  のかたちとなり、 $A_f$  はサイズ 1 で成分は  $\alpha$  となるから、 $K[t]/(t - \alpha)^m$  においては基底として  $(t - \alpha)^{m-1}, \dots, (t - \alpha), 1$  を選ぶことで Jordan ブロックを得ることができる。

以上により、Jordan 標準形の計算は、単因子の計算に帰着される。なお、変換行列  $G$  も単因子論の過程で求まっているのであるが（演習）、その具体的な形を単因子論の方法で求めるのはしばしば実用的ではない。

## 第2章 テンソル積

参考書のうち、テンソル代数はやらない予定である。

### 2.1 テンソル積の定義

**定義 2.1.1.**  $R$  を環、 $M$  を右  $R$  加群、 $N$  を左  $R$  加群とする。 $L$  を加群とする。写像  $f : M \times N \rightarrow L$  は、次の 3 条件を満たすとき  $R$ -balanced map であるという：

1. 任意に  $m \in M$  を固定したとき  $f(m, -) : N \rightarrow L$  は加群準同形
2. 任意に  $n \in N$  を固定したとき  $f(-, n) : M \rightarrow L$  は加群準同形
3.  $f(mr, n) = f(m, rn)$  が任意の  $r \in R, m \in M, n \in N$  について成り立つ。

**定義 2.1.2.**  $R$ -balanced map  $\Phi : M \times N \rightarrow T$  が  $M$  と  $N$  の  $R$  上のテンソル積であるとは、次の性質 (universality) を満たすこと：任意の  $R$ -balanced map  $f : M \times N \rightarrow L$  に対し、ある加群準同形  $h : T \rightarrow L$  が存在して  $f = h \circ \Phi$  となる。また、この性質をもつ  $h$  はただ一つである。

しばしば、 $T$  のみをテンソル積と言い  $M \otimes_R N$  で表す。上の定義から、 $M \otimes_R N$  は存在すれば標準的な同形を除いてただ一つである。とはいえ、これでは「同形を除いて」しか定義できないので最初のうちは心許ない。が、なれると大丈夫になる。なお、次の構成法により存在が保証されるので、次を定義に採用すればこんな心配はない。

**定理 2.1.3.** (テンソル積の構成) 直積  $M \times N$  の代数的構造をわすれ、ただの集合と思う。この元を基底とする自由  $\mathbb{Z}$  加群を  $\tilde{T}$  とする。すなわち、 $\tilde{T}$  は  $(m, n) \in M \times N$  の形式的な  $\mathbb{Z}$  係数一次結合の全体である。

$\tilde{T}$  の次の 3 種類の (無限個かも知れない) 元

$$\begin{aligned} & (m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n) \\ & (m, n_1 + n_2) - (m, n_1) - (m, n_2) \\ & (mr, n) - (m, rn) \end{aligned}$$

で生成される部分  $\mathbb{Z}$  加群を  $\tilde{K}$  であらわす。商加群

$$T := \tilde{T} / \tilde{K}$$

と

$$\Phi : M \times N \rightarrow T, \quad (m, n) \mapsto [(m, n)]$$

(ここに、 $[\ ]$  は商加群の類を表す) が、テンソル積を与える。

証明.  $M \times N \rightarrow T$  が  $R$ -balanced map であることは、 $\tilde{K}$  の定義から従う。

universality について。今、 $f: M \times N \rightarrow L$  なる  $R$ -balanced map が存在したとする。自由加群の universality により

$$M \times N \rightarrow \tilde{T} \xrightarrow{\tilde{f}} L$$

なる加群準同形  $\tilde{f}$  で、左端から右端まで合成すると  $f$  となるものがある (\*). ここで、 $f$  が  $R$ -balanced であるということから、

$$\tilde{f}(m_1 + m_2, n) = f(m_1 + m_2, n) = f(m_1, n) + f(m_2, n) = \tilde{f}(m_1, n) + \tilde{f}(m_2, n)$$

の真ん中の等号が言える。両側の等号は上の (\*) から言える。従って、 $\tilde{f}$  は  $(m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n)$  の形の元を  $L$  における  $0$  に移すことが分かる。他の 2 種の元も  $0$  に移すことが同様に示せるから、商の universality (命題 1.1.6) により  $\tilde{f}$  が合成  $\tilde{T} \rightarrow \tilde{T}/\tilde{K} \xrightarrow{h} L$  となるような  $h$  がある。右から  $\Phi$  を合成すると

$$M \times N \rightarrow \tilde{T}/\tilde{K} \xrightarrow{h} L$$

は  $f$  となる。このような  $h$  はただ一つ。(なぜなら、 $\tilde{T}/\tilde{K}$  は  $R$  加群として  $M \times N$  の像が生成するから。) これは、テンソル積の universality と同じ性質である。□

**定義 2.1.4.**  $(m, n) \in M \times N$  の  $M \otimes_R N$  での像  $\Phi(m, n)$  を  $m \otimes n$  と書く。 $M \otimes_R N$  の元は、この形の元の有限個の和として書かれる。 $M \otimes_R N$  から  $L$  への加群準同形を与えることは、 $R$ -balanced map  $f$  を与えることと同値なので、 $f$  により与えられる加群準同形を

$$m \otimes n \mapsto f(m, n) \text{ で与えられる } M \otimes_R N \rightarrow L$$

と表現する。言いかえると、次の標準的な加群同型が与えられる：

$$\text{Balance}_R(M \times N, L) \cong \text{Hom}(M \otimes_R N, L).$$

**定義 2.1.5.**  $R$  を可換環とし、 $M, N, L$  を  $R$  加群とする。 $f: M \times N \rightarrow L$  が  $R$  双線形写像 (bilinear map) であるとは、次の 2 条件を満たすこと：

1. 任意に  $m \in M$  を固定したとき  $f(m, -): N \rightarrow L$  は  $R$  加群準同形
2. 任意に  $n \in N$  を固定したとき  $f(-, n): M \rightarrow L$  は  $R$  加群準同形。

(注：このとき  $f(rm, n) = rf(m, n) = f(m, rn)$  が自動的に従う。よって  $R$ -balanced.)

**定理 2.1.6.** 上のテンソル積の定義で、 $R$  を可換環とする。すると、 $T := M \otimes_R N$  には  $r \bullet (m \otimes n) = (rm \otimes n) = (m \otimes rn)$  により  $R$  加群の構造が入り、 $\Phi$  は  $R$  双線形写像となる。そして、次の universality を満たす：任意の  $R$  双線形写像  $f: M \times N \rightarrow L$  に対し、 $R$  加群準同形  $h: T \rightarrow L$  が存在して  $f = h \circ \Phi$  を満たす。

証明.  $R$  双線形写像は  $R$ -balanced であるから、 $R$  加群準同形とは限らないけど加群準同形であるような  $h$  であって上の性質を満たすものがただ一つ存在する。ゆえに、 $T$  が  $R$  加群となることと、 $h$  が  $R$  加群準同形になることを示せばよい。 $(m, n) \mapsto (rm) \otimes n$  は balanced なので  $T$  に  $r$  倍が定義される ( $R$  加群になることは省略)。  $h$  は加群準同形であるゆえ、 $h$  が  $R$ -hom

であることを言うには  $R$  の元倍を保存することを見ればよい。それには、 $T$  の  $R$  加群としての生成元である  $m \otimes n$  たちについて、 $R$  の元倍の保存を見ればよい（なぜでしょう）が、

$$h(rm \otimes n) = h(\Phi(rm, n)) = f(rm, n) = rf(m, n) = rh(\Phi(m, n)) = rh(m \otimes n)$$

より従う。 □

$\Phi(m, n) = m \otimes n$  の bilinearity より、 $(m_1 + m_2) \otimes n = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n$  などが従う。  
以下、簡単のために可換環を扱う。 $\otimes_R$  の  $R$  は、明白なときには省略される。

**命題 2.1.7.**  $R$  を可換環とする。 $\cong$  は、 $R$  加群の (標準的な) 同形を表す。

1.  $R \otimes_R M \cong M \cong M \otimes_R R$
2.  $L \otimes_R (M \otimes_R N) \cong (L \otimes_R M) \otimes_R N$
3.  $M \otimes N \cong N \otimes M$
4. この項目だけ  $R$  を一般の環とし、 $M_\lambda$  を右  $R$  加群の族、 $N$  を左  $R$  加群とする。

$$\left( \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \right) \otimes_R N \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (M_\lambda \otimes_R N)$$

最後の式により、たとえば  $M$  が  $b_\lambda$  を基底とする右自由  $R$  加群であれば  $\mathbb{Z}$  加群の同形を得る：

$$M \otimes_R N \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda \otimes N$$

(ここに、 $b_\lambda \otimes N = \{b_\lambda \otimes n | n \in N\}$ )。特に、 $R$  が可換で  $M, N$  がそれぞれ基底  $b_\lambda$  ( $\lambda \in \Lambda$ )  $c_\mu$  ( $\mu \in \mathcal{M}$ ) をもつ  $R$  自由加群ならば  $M \otimes N$  は  $b_\lambda \otimes c_\mu$  ( $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times \mathcal{M}$ ) を基底とする  $R$  自由加群である。

(行列の Kronecker 積は演習)

**命題 2.1.8.**  $R$  を環とする。右  $R$  加群の準同形  $M_1 \xrightarrow{f} M_2$  と (左)  $R$  加群  $N$  に対し、加群準同形  $M_1 \otimes_R N \xrightarrow{h} M_2 \otimes_R N$  であって  $h(m \otimes n) = f(m) \otimes n$  となるものがただ一つ定まる。 $h$  を  $f \otimes N$  あるいは  $f \otimes \text{id}_N$  で表す。

**注意 2.1.9.** 右  $R$  加群準同形の列  $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$  のとき、 $(g \circ f) \otimes N = (g \otimes N) \circ (f \otimes N)$  が簡単に確かめられる。また、 $\text{id}_{M_1} \otimes N = \text{id}_{M_1 \otimes N}$  である。このような対応のことを、「 $- \otimes N$  は  $R$  加群のカテゴリから加群のカテゴリへの関手 (functor) である」という。

関手の定義をきちんと述べる。カテゴリ  $\mathcal{C}$  からカテゴリ  $\mathcal{D}$  への関手  $F$  とは、材料：

1.  $\mathcal{C}$  の object の「集合」から  $\mathcal{D}$  の object の「集合」への写像  $F_o$ ,
2.  $\mathcal{C}$  の object の各ペア  $A, B$  に対し、写像

$$F_{A,B} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_o(A), F_o(B))$$

が与えられて、次の二つの公理を満たすこと。

- $F_{A,A}(\text{id}_A) = \text{id}_{F_o(A)}$ ,

- $F_{A,C}(g \circ f) = F_{B,C}(g) \circ F_{A,B}(f)$  ( $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  のとき)

**注意 2.1.10.**  $R$  を環とする。右  $R$  加群準同形  $M_1 \xrightarrow{f} M_2$  と左  $R$  加群準同形  $N_1 \xrightarrow{g} N_2$  が与えられたとき、加群準同形

$$M_1 \otimes_R N_1 \xrightarrow{f \otimes g} M_2 \otimes_R N_2$$

が  $(f \otimes g)(m_1 \otimes n_1) := f(m_1) \otimes g(n_1)$  で与えられる。なお、この「与えられる」は、定義 2.1.4 参照。

**命題 2.1.11.** (テンソル積の right exactness)  $N$  を (左) $R$  加群とする。

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$$

が右  $R$  加群の短完全系列であれば、 $\otimes_R N$  して得られる

$$M_1 \otimes N \rightarrow M_2 \otimes N \rightarrow M_3 \otimes N \rightarrow 0$$

は加群の完全系列である。

証明. 真ん中から右への写像が全射であることは、テンソル積の構成法における生成元のレベルで全射であることから従う。

真ん中の exactness を言うのには、 $M_3 \otimes N$  が左の *Coker* になっていることを言えばよい。すなわち、 $f: M_2 \otimes N \rightarrow L$  (\*) であって、合成  $M_1 \otimes N \rightarrow M_2 \otimes N \rightarrow L$  が 0 であれば (\*\*)、 $M_3 \otimes N$  を経由すること (\*\*\*) を示す。(\*) は  $M_2 \times N \rightarrow L$  なる balanced map と一対一。合成 (\*\*) と対応する balanced map は  $M_1 \times N \rightarrow M_2 \times N \rightarrow L$ 。対応は一対一だからこの合成が 0 写像。これは  $f$  が  $M_2/M_1 \times N \rightarrow L$  なる  $R$ -balanced map を経由していることを示す。 $M_3 \cong M_2/M_1$  を用いてテンソル積の言葉にもどすと、所望の結果を得る。□

**注意 2.1.12.** ・この性質を「関手  $\otimes_R N$  は右  $R$  加群の圏から加群の圏への右完全関手 (right exact functor) である」という。

- ・なお、証明からわかるように、定理の仮定の短完全系の左の単射性  $0 \rightarrow M_1$  は不要である。
- ・ $R$  加群準同形の列の完全性は、加群準同形の列としての完全性と同値である。
- ・ $R$  を可換環とする。 $R$  を (可換とはかぎらない) 一般の環とみて構成したテンソル積と、 $R$  を可換環とみて構成したテンソル積とは加群として同一である。従って、この場合  $\otimes_R N$  は  $R$  加群の圏からそれ自身への right exact functor である。

上の右完全性は、

$$(M_2/M_1) \otimes N \cong (M_2 \otimes N)/(\text{Im}(M_1 \otimes N))$$

とも言い換えられる。ここに、右の  $\text{Im}$  は  $M_2 \otimes N$  における像を示している。

**例 2.1.13.**  $R$  を可換環、 $I$  をそのイデアルとすると  $0 \rightarrow I \rightarrow R \rightarrow R/I \rightarrow 0$  なる短完全系列を得る。任意の  $R$  加群  $M$  に対し、テンソル積をとると

$$I \otimes M \rightarrow R \otimes M \rightarrow (R/I) \otimes M \rightarrow 0$$

なる完全系列を得る。ここで、真ん中の  $R$  加群は  $M$  と同形である。そこでの左端の加群の像は

$$IM := \langle am \mid a \in I, m \in M \rangle_R$$

に一致する。従って

$$(R/I) \otimes M \cong M/IM, \quad [r] \otimes m \mapsto [rm]$$

である。

特に、 $J$ も  $R$ のイデアルとすると  $R/I \otimes_R R/J \cong (R/J)/(I(R/J))$  で、 $R \rightarrow (R/J)/(I(R/J))$  は全射でカーネルが  $I+J$  となること (なぜでしょう) から

$$R/I \otimes_R R/J \cong R/(I+J).$$

**命題 2.1.14.**  $R$  を可換環とし、 $M_1 \subset M$ ,  $N_1 \subset N$  を部分  $R$  加群とする。 $M \otimes_R N \rightarrow (M/M_1) \otimes_R (N/N_1)$  の核は、 $M_1 \otimes N \rightarrow M \otimes N$  および  $M \otimes N_1 \rightarrow M \otimes N$  の像の和に一致する。すなわち

$$(M \otimes N)/(\text{Im}(M_1 \otimes N) + \text{Im}(M \otimes N_1)) \cong (M/M_1) \otimes (N/N_1)$$

証明. 像のそれぞれが核に入ることは容易。よって和も核に入る。すると、左から右への準同形が作られる。逆に、 $[m] \in M/M_1$ ,  $[n] \in N/N_1$  に対して  $[m \otimes n] \in (M \otimes N)/(\text{Im}(M_1 \otimes N) + \text{Im}(M \otimes N_1))$  を対応させる写像を考える。 $M \times N$  上で定義された写像が  $M/M_1 \times N/N_1$  を経由する well-definedness のチェックは容易で、 $R$  双線形になることも確かめられ、 $(M/M_1) \otimes (N/N_1)$  の universality から右から左への準同形が作られる。これらが逆射になることは各自チェック。□

**定義 2.1.15.**  $R$  を単位的環とする。 $R$  の中心  $Z(R) \subset R$  とは、「 $R$  の元で、 $R$  の任意の元と積について可換」なものなす  $R$  の部分環。単位的可換環となる。

$K$  を単位的可換環とする。環準同型  $K \rightarrow Z(R)$  が与えられているとき、 $R$  を  $K$  多元環 (あるいは  $K$  代数、 $K$ -algebra、あるいは  $K$  上の環、ring over  $K$ ) という。 $R$  が可換なときは  $K$  多元環と言わないことが多い。

**例 2.1.16.**  $K$  を可換環とすると、 $M_n(K)$  は ( $K \rightarrow M_n(K)$ ,  $a \mapsto aI_n$  により)  $K$  多元環である。

**定義 2.1.17.**  $K \rightarrow R_1$ ,  $K \rightarrow R_2$  を二つの  $K$  多元環とする。 $K$  多元環としての準同形とは、環準同形  $R_1 \rightarrow R_2$  であって、合成  $K \rightarrow R_1 \rightarrow R_2$  が  $K \rightarrow R_2$  と一致するもの。 $K$  代数の準同型 ( $K$ -algebra homomorphism)、 $K$  上の環としての準同型ともいう。

**命題 2.1.18.** (多項式環の universality)  $K$  を可換環とする。多項式環  $K[t_1, \dots, t_n]$  は次の universality を持つ。 $K \rightarrow R$  を  $K$  多元環とし、 $r_1, \dots, r_n \in R$  を積について互いに可換な任意の元とすると、 $t_i$  を  $r_i$  に送る  $K$  多元環としての準同型、すなわち

$$\begin{array}{ccc} K & \rightarrow & K[t_1, \dots, t_n] \\ \parallel & \circlearrowleft & \downarrow \\ K & \rightarrow & R \end{array}$$

を可換にする  $K[t_1, \dots, t_n] \rightarrow R$  が存在し、ただ一つである。(特に、 $n=1$  のときには可換性の条件はない。)

**命題 2.1.19.** (係数変換)  $K$  を可換環とし、 $R$  を  $K$  多元環とする。 $K$  加群  $M$  に対し、 $M \otimes_K R$  には  $r \bullet (m \otimes s) := (m \otimes rs)$  により左  $R$  加群の構造が入る。 $M \otimes_K R$  を、 $M$  の係数の  $K$  から  $R$  への変換という。 $K \subset R$  のときは  $R$  への係数拡大という。 $(R$  が可換環のとき、スキーム論では) base change とも言う。

**注意 2.1.20.** 上の  $\otimes_K R$  は、 $K$  加群のカテゴリリーから  $R$  加群のカテゴリリーへの関手である。

**命題 2.1.21.**  $K$  を可換環とする。 $R, S$  が  $K$  多元環のとき、 $R \otimes_K S$  は  $K$  加群であるが、

$$(r_1 \otimes s_1) \cdot (r_2 \otimes s_2) := r_1 r_2 \otimes s_1 s_2$$

により環となる。 $1_R \otimes 1_S$  を単位元とする単位環となり、 $k \in K \mapsto k \otimes 1 = 1 \otimes k$  により  $K$  多元環となる。

証明. 単位環  $U$  とは、加群であって、積  $\cdot$  が定義されてモノイドとなり、左からの積が誘導する  $U \rightarrow \text{Map}(U, U)$  が  $U \rightarrow \text{End}_+(U)$  を引き起し、加群準同形かつ積についてモノイド準同形となる、という定義であった。(  $\text{End}_+$  は加群としての自己準同型のなす環。)  $(r \cdot (-)) \otimes (s \cdot (-)) \in \text{End}_K(R \otimes S)$  は

$$R \times S \rightarrow \text{End}_K(R \otimes S)$$

を与える。 $K$ -bilinear だから  $K$  加群準同形

$$R \otimes S \rightarrow \text{End}_K(R \otimes S)$$

を与える。これが積モノイド準同型であることのチェックは面倒だが易しい。  $\square$

**例 2.1.22.** 多項式環のテンソル積。 $K$  多元環として  $K[x] \otimes_K K[y] \cong K[x, y]$  が成立する(演習)。

$R$  が可換環のときは、単に  $K \rightarrow R$  なる環準同型を与えることと  $R$  が  $K$  多元環であることは同じ。このときは、多元環という言葉よりも  $K$  代数あるいは  $K$  上の環という用語がつかわれる。

**例 2.1.23.** 例 2.1.13 の同型  $R/I \otimes_R R/J \cong R/(I+J)$  は、 $R$  代数としての同型である。

**命題 2.1.24.**  $A, B, C$  を可換環とし、 $A \rightarrow B, A \rightarrow C$  なる環準同型が与えられているとする。このとき、

$$B \rightarrow B \otimes_A C \leftarrow C,$$

$b \mapsto b \otimes 1, 1 \otimes c \leftarrow c$ , は push out (pull back の双対概念) である。

すなわち、この二つの射は (単位的) 可換環の準同形であり、

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & B \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ C & \rightarrow & B \otimes_A C \end{array}$$

は可換な square を為し、次の universality を満たす。任意の可換環  $D$  と環準同型  $B \rightarrow D, C \rightarrow D$  で

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & B \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ C & \rightarrow & D \end{array}$$

が可換なとき、 $h: B \otimes_A C \rightarrow D$  であって合成  $B \rightarrow B \otimes_A C \rightarrow D$  が与えられた  $B \rightarrow D$  に一致し、合成  $C \rightarrow B \otimes_A C \rightarrow D$  が与えられた  $C \rightarrow D$  に一致するものが存在する。そして、そのような  $h$  はただ一つである。

証明. とりあえず省略したい。(演習)

□

## 2.2 平坦加群・射影的加群・単射的加群

### 2.2.1 平坦加群

$R$  を環、 $N$  を  $R$  加群とする。注意 2.1.9 により、 $(-)\otimes_R N$  は右  $R$  加群のカテゴリから加群のカテゴリへの関手であった。命題 2.1.11 から、この関手は短完全系列を右完全系列(左端の  $0 \rightarrow$  を落とした短完全系列)に移す。このような関手を right exact functor という。より強く、短完全系列を短完全系列に移すような関手は exact functor という。 $(-)\otimes_R N$  が exact functor となるような  $N$  を平坦  $R$  加群 (flat  $R$ -module) という。平たく言えば:

**定義 2.2.1.**  $R$  を可換環とし、 $N$  を  $R$  加群とする。右  $R$  加群の任意の短完全系列

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$$

に対し、 $\otimes_R N$  して得られる

$$0 \rightarrow M_1 \otimes N \rightarrow M_2 \otimes N \rightarrow M_3 \otimes N \rightarrow 0$$

が完全であるとき、 $N$  を平坦  $R$  加群という。

命題 2.1.11 から、この条件は次のように言い換えられる:  $M_1 \rightarrow M_2$  が単射なら、 $M_1 \otimes N \rightarrow M_2 \otimes N$  も単射。どこらへんが「平らな感じ」なのかは、僕は分かっていない。

**例 2.2.2.** 1.  $R$  は  $R$  加群として平坦。次を使えば、( $R$  の直和と同形であるから) 自由  $R$  加群はみな平坦。

2.  $N_\lambda$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) がそれぞれ平坦ならば  $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$  も平坦。(命題 2.1.7 の 4 番を使う。次の命題も同じ方法で証明できる。)

3. 上の逆が成立。すなわち平坦  $R$  加群の直和因子は全て平坦。

**定理 2.2.3.**  $R$  を環、 $N$  を  $R$  加群とする。以下の条件は同値。

1.  $N$  は平坦
2. 任意の右  $R$  加群の埋め込み  $M_1 \subset M_2$  に対し、 $M_1 \otimes N \rightarrow M_2 \otimes N$  が単射
3. 任意の有限生成右  $R$  加群  $M_2$  とその有限生成右  $R$  部分加群  $M_1 \subset M_2$  に対し、 $M_1 \otimes N \rightarrow M_2 \otimes N$  が単射
4.  $R$  の任意の右イデアル  $I \subset R$  に対し、 $I \otimes N \rightarrow R \otimes N$  が単射



5. 任意の  $R$  加群の短完全系列

$$0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$$

と右  $R$  加群  $S$  に対し、

$$0 \rightarrow S \otimes L \rightarrow S \otimes M \rightarrow S \otimes N \rightarrow 0$$

は短完全系列。

証明.  $1 \Leftrightarrow 2$  は right exactness から.  $2 \Rightarrow 3$  は自明.

$3 \Rightarrow 2$ : 今、 $2$  を否定して、ある  $M_1 \subset M_2$  が存在して  $\otimes_R N$  すると単射でなくなるとする。 $M_1 \otimes N \rightarrow M_2 \otimes N$  の核に入る元  $x$  は  $m_j \otimes n_j$  の形の元の有限和  $x = \sum m_j \otimes n_j$  である ( $m_j \in M_1$ )。いま、ここに現れる  $m_j$  たちが  $R$  上生成する  $M_1$  の (有限生成) 部分加群を  $M'_1 \subset M_1$  とする。 $M'_1 \otimes N$  には  $x' = \sum m_j \otimes n_j$  と書かれる元があり、その  $M_1 \otimes N$  での像は  $x$  になっている。

さて、 $x$  の  $M_2 \otimes N$  での像が零になるということは、テンソル積の構成的定義 (定理 2.1.3) にあらわれた「関係式」部分加群  $\tilde{K}$  ( $M$  として  $M_2$  をとる) の中に  $\sum (m_j, n_j) \in \tilde{T}$  が含まれるということになる。ということは、 $\tilde{K}$  に現れた 3 種類の元たちの有限個の和で表されることになる。これら「使われた関係式」にあらわれる  $M_2$  の元は有限個である。

そこで、 $M_2$  において、 $m_j$  たちに加えてこれらにあらわれた  $M_2$  の元を合わせたもの (それでも有限個) で生成される  $M_2$  の有限生成部分加群を  $M'_2$  とする。作り方から、 $x'$  の  $M'_2 \otimes N$  での像は ( $M'_2 \otimes N$  を定義する際に使われる「関係式  $\tilde{K}'_2$ 」に入るので)  $0$  になる。従って、 $M'_1 \otimes N \rightarrow M'_2 \otimes N$  において、 $x'$  の像は  $0$  になる。 $3$  を仮定すれば、有限生成  $R$  加群においては単射性が言えるのでここから  $x' = 0$ 。従って、その像である  $x = 0$  となる。(背理法を使おうとしたが、使わなくてすんだ。)

$2 \Rightarrow 4$  は自明。

$4 \Rightarrow 3$ :  $4$  の成立を仮定する。 $3$  において、 $M_2/M_1$  が  $R$  上 1 元生成の時に帰着する。なぜならば、 $M_2$  は有限生成だから  $M_2/M_1$  も有限生成である。このことから、

$$M_1 = L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_n = M_2$$

なる部分加群の列で、各  $L_{i+1}/L_i$  が  $R$  上 1 元生成となるものがある。この場合に

$$L_i \otimes N \rightarrow L_{i+1} \otimes N$$

の単射性が言えれば、単射の合成は単射ゆえ  $M_1 \otimes N = L_1 \otimes N \rightarrow L_n \otimes N = M_2 \otimes N$  も単射であり、証明が終了する。

以下、 $M_2/M_1$  が 1 元生成であると仮定する。図式

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & 0 & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & I & = & I & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \rightarrow & M_1 & \rightarrow & C & \rightarrow & R & \rightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & M_1 & \rightarrow & M_2 & \rightarrow & R/I & \rightarrow & 0 \end{array}$$

を下の行から次のように構成する。右下端は商  $M_2/M_1$  であり、一元  $b \in M_2/M_1$  で生成されるので  $M_2/M_1 = b \cdot R$  であり、 $R \rightarrow b \cdot R$  の核を  $I$  とすると  $M_2/M_1 \cong R/I$ 。こうして最下行の完全系列を得る。次に、 $R \rightarrow R/I$  なる、右端の縦の射をつくり、 $C$  を

$$C := \{(m_2, r) \in M_2 \times R \mid m_2 \text{ の } R/I \text{ での像が } r \text{ のそれと一致}\}$$

とおく (pullback, 演習 2-13)。  $M_2 \rightarrow R/I$  の全射性と pullback の構成法から  $C \rightarrow R$  は全射となり、その核は  $M_1$  と同形になる (演習 2-14)。こうして、上の図の中段の行の完全系列が得られる。右端の縦の完全系列は自明に存在する。再び演習 2-14 より、右下の square が pullback であることを使うと  $C \rightarrow M_2$  の核は  $I$  と同形となることがわかる。これで上の図式ができあがる。

ここで、 $R$  は自由加群であるから中段の行は split し、 $C$  は  $M_1$  と  $R$  の直和と同形になる。従って、上の行は  $\otimes N$  したあとでも (分裂した) 完全系列である。ゆえに、

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & I \otimes N & = & I \otimes N & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \rightarrow & M_1 \otimes N & \rightarrow & C \otimes N & \rightarrow & R \otimes N \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ & & M_1 \otimes N & \rightarrow & M_2 \otimes N & \rightarrow & R/I \otimes N \rightarrow 0 \end{array}$$

ここで、中段の左の 0 は完全系列が split するために成立。右上の 0 は 4. の仮定から成立。

左下  $M_1 \otimes N$  の元で、 $M_2 \otimes N$  で 0 に写るもの  $x$  をとる。左縦の等号から、 $x$  は  $\bar{x} \in C \otimes N$  に写される。 $\bar{x} = 0$  であることが言えれば、中段の行の左の完全性から  $x$  自身が 0 であり、証明は終了する。ところで、 $\bar{x}$  の下への像、すなわち  $M_2 \otimes N$  での像は  $x$  の像で仮定より 0 である。ど真ん中の縦の完全性より、 $\bar{x}$  は  $I \otimes N$  の元  $\tilde{x}$  の像である。ところで、左から来ていることにより  $\bar{x}$  の右  $R \otimes N$  での像は 0 であるから、 $\tilde{x}$  の  $R \otimes N$  での像は 0 である。ここで 4. の仮定より  $I \otimes N \subset R \otimes N$  は単射であるから、 $\tilde{x}$  自身が 0 であり、その像である  $\bar{x}$  も 0 となり、証明は終わった。

5. について：直接的な証明はやや長い。また、ホモロジー代数で言う  $\text{Tor}_1(S, N)$  を習うと証明の見通しが良くなるのでここでは省略する。 □

**命題 2.2.4.** (平坦性は base change で保たれる)  $R$  を可換環、 $S$  を可換  $R$  代数とする。 $N$  が平坦  $R$  加群ならば  $N \otimes_R S$  は平坦  $S$  加群。

証明. 示したいことは  $\otimes_S(N \otimes_R S)$  の完全性だが、命題 2.1.7 の 2 番、3 番、1 番によれば  $M \otimes_S(N \otimes_R S) \cong (M \otimes_S S) \otimes_R N \cong M \otimes_R N$  より  $\otimes_R N$  の完全性から従う。 □

**定理 2.2.5.**  $R$  を可換環とする。 $N_1, N_2$  が平坦  $R$  加群ならば  $N_1 \otimes N_2$  も平坦。

証明. 命題 2.1.7 の 2 番、associativity によれば、 $\otimes N_1$  をほどこして次に  $\otimes N_2$  を施すことと、 $\otimes(N_1 \otimes N_2)$  を施すこととは自然に同形である。それぞれのステップが exact sequence を保つから、合成も exact である。 □

**注意 2.2.6.** カテゴリーの言葉を使えば、「exact functor の合成は exact である」という事実より従う。

**命題 2.2.7.**  $R$  を整域、 $M$  を  $R$  加群とする。 $M$  が平坦ならば、 $M$  のねじれ元は 0 のみ (torsion free) である。もし、 $R$  が PID ならば、逆も成立する。すなわち、 $M$  が torsion free ならば平坦である。

証明. 前半:  $a \in R$  とする。このとき、 $a$  倍するという写像  $R \xrightarrow{a(-)} R$  は  $R$  の可換性より  $R$  準同形である。 $a \neq 0$  ならば (整域なので) これは単射である。これに  $\otimes M$  をすると、 $M \cong R \otimes M \rightarrow R \otimes M \cong M$  は  $a$  を左からかけるという写像になる。平坦性より、これは単射である。これは、 $M$  においてねじれ元が 0 のみであることを示している。

後半:  $M$  の任意の有限生成部分  $R$  加群  $M'$  は torsion free だから PID 上有限生成加群の基本定理 1.5.3 により自由  $R$  加群である。特に平坦である。ここから  $M$  の平坦性が定理 2.2.3 の証明と同様に、次のようにして従う。いま、 $N_1 \rightarrow N_2$  を  $R$  加群の単射とする。

$$N_1 \otimes M \rightarrow N_2 \otimes M$$

の核の元を任意にとり  $x := \sum n_i \otimes m_i$  とする。この元の  $N_2 \otimes M$  での像が 0 だから、テンソル積の構成的定義 (定理 2.1.3) にあらわれた「関係式」部分加群  $\tilde{K}$  に  $\sum (n_i, m_i) \in \tilde{T}$  が含まれる。この元を  $\tilde{K}$  内で表すのに使われた  $M$  の元は有限個である。これらと  $m_i$  たちで生成された  $M$  の有限生成部分  $R$  加群を  $M'$  とすると、作り方から  $N_1 \otimes M'$  の元としての  $x' := \sum n_i \otimes m_i$  は  $N_1 \otimes M' \rightarrow N_2 \otimes M'$  の核に入る。仮定より、これは 0。したがって、 $x'$  の  $N_1 \otimes M$  における像である  $x$  も 0。ゆえに  $M$  の平坦性が言えた。□

**定理 2.2.8.** (商環の平坦性)  $R$  を可換環、 $S$  を積閉集合 (すなわち、積に関する  $R$  の部分モノイド) とするとき、商環  $S^{-1}R$  が定義される。これは可換な  $R$  代数、特に  $R$  加群である。これが  $R$  加群として平坦である。

証明. 定義を復習すれば、証明は直線的。省略したい。□

**注意 2.2.9.** 平坦性は、関手  $\otimes N$  が exact になることにより定義された。exact の定義は、短完全系列を短完全系列に写すこと、とした。実は、この条件を満たせば、任意の完全系列が  $\otimes N$  で完全系列に移されることが比較的容易に証明できる。(任意の完全系列が短完全系列に分解されることを使う。)

## 2.2.2 射影的加群

$R$  を環、 $P$  を  $R$  加群とする。

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$$

に対し、 $\text{Hom}_R(P, -)$  を施して得られる (演習 [1-12]) 加群の完全系列

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(P, M_1) \rightarrow \text{Hom}_R(P, M_2) \rightarrow \text{Hom}_R(P, M_3)$$

がある。このように、短完全系列を (右の全射性は言えないが) 左完全系列に移すような関手を左完全関手 (left exact functor) という。

**定義 2.2.10.**  $R$  を環とする。 $R$  加群の任意の短完全系列

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$$

に対し、 $\text{Hom}_R(P, -)$  を施して得られる

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(P, M_1) \rightarrow \text{Hom}_R(P, M_2) \rightarrow \text{Hom}_R(P, M_3) \rightarrow 0$$

が完全であるとき、 $P$  を射影  $R$  加群 (projective  $R$ -module) という。

もともと左完全であるから、 $P$  が射影的加群であることと「任意の全射  $M_2 \rightarrow M_3$  に対して  $\text{Hom}(P, M_2) \rightarrow \text{Hom}(P, M_3)$  が全射である」こととは同値。

**定理 2.2.11.**  $P$  を  $R$  加群とする。以下、出てくる対象は  $R$  加群、射は  $R$  加群準同形とする。次は同値。

1.  $P$  は射影的。
2.  $L \rightarrow M$  なる全射があるとき、任意の射  $P \rightarrow M$  が  $L$  を経由する、すなわちある  $P \rightarrow L$  があって合成  $P \rightarrow L \rightarrow M$  が先の射になる。
3. 全射  $f: L \rightarrow P$  があるとき、 $s: P \rightarrow L$  であって  $s \circ f = \text{id}_P$  とできる。(このとき、 $P$  は  $L$  の直和因子と同形となる。)
4.  $P$  を右端にもつ短完全系列  $0 \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow P \rightarrow 0$  は分裂する。

証明. 1  $\Leftrightarrow$  2: 2 の帰結は「 $\text{Hom}_R(P, L) \rightarrow \text{Hom}_R(P, M)$  が全射である」ということの言い換えだから、上の注意により従う。

2  $\Rightarrow$  3:  $M = P$  とし、任意の射として  $\text{id}_P: M = P \rightarrow P$  をとると、3 になる。(なお、直和因子になることは、 $L \rightarrow P$  の核を  $K$  とすると  $0 \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow P \rightarrow 0$  が分裂することから従う。

3  $\Rightarrow$  2:  $f: L \rightarrow M$  を全射とし、 $g: P \rightarrow M$  を任意の射とする。pullback(演習 2-13)  $N := L \times_M P$  を考える。 $f$  は全射だから、pullback の構成法から  $N \rightarrow P$  は全射。3. より section  $s: P \rightarrow N$  がある。ここで  $h: P \xrightarrow{s} N \rightarrow L$  なる合成射が所望の射を与える。 $f \circ h = g$  を確かめればよい。それには合成  $P \xrightarrow{s} N \rightarrow L \xrightarrow{f} M$  が  $P \xrightarrow{g} M$  と一致することを見ればよい。前者は、pullback square の可換性より  $P \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow M$  なる合成と同一。 $s$  が section だからこれは  $P \rightarrow M$  と同一なので、後者と同一。□

次の自明な補題は、ホモロジー代数で有用になる。

**補題 2.2.12.** 任意の  $R$  加群  $M$  に対し、ある自由  $R$  加群  $F$  が存在して  $F \rightarrow M$  なる全射を持つ。 $M$  が有限生成ならば  $F$  を有限ランクにできる。

証明.  $M$  の  $R$  加群としての任意の生成系  $m_\lambda$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) をとる。極端な話、 $\Lambda := M$  とし、 $m_\lambda := \lambda$  のように  $M$  の全ての元をとってもよい。このとき、 $x_\lambda$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) を基底とする自由加群  $F$  から、 $M$  への全射 (準同形) が  $x_\lambda \mapsto m_\lambda$  により与えられる。(自由  $R$  加群の universality。) □

**定理 2.2.13.** 1. 自由  $R$  加群は射影的。

2.  $N_\lambda$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) がそれぞれ射影的ならば  $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$  も射影的。
3. 上の逆が成立。すなわち射影的  $R$  加群の直和因子は全て射影的。
4. (基本的で有用)  $P$  が射影的  $R$  加群であることと、ある自由  $R$  加群の直和因子であることは同値。
5. 射影的  $R$  加群は平坦  $R$  加群である。

証明. 1. 自由加群  $F$  に全射  $M \rightarrow F$  があつたとすると、 $F$  の基底  $b_\lambda$  に落ちて来る  $M$  の元  $m_\lambda$  が一つはある。これを任意に一つ選択公理でとってきて、 $b_\lambda \mapsto m_\lambda$  なる準同形  $s: F \rightarrow M$  (自由加群の基底の universality より、ひとたび  $m_\lambda$  たちを決めれば一意に存在) をとると、section になっていることがわかるので、定理 2.2.11 の 3 番により射影的。

2.  $\iota_\lambda: N_\lambda \rightarrow \bigoplus N_\lambda$  を直和の定義にあらわれる injection とし、 $\text{pr}_\lambda: \bigoplus N_\lambda \rightarrow N_\lambda$  を  $\lambda$  成分への全射とする。

$f: M \rightarrow \bigoplus N_\lambda$  を全射とする。 $N_\lambda$  が射影的だから  $g_\lambda: N_\lambda \rightarrow M$  が存在して  $f \circ g_\lambda = \iota_\lambda$  とできる。選択公理を使ってそのような  $g_\lambda$  を各  $\lambda$  についてとる。直和の universality(存在) により  $g: \bigoplus N_\lambda \rightarrow M$  がとれて  $g \circ \iota_\lambda = g_\lambda$  となる。あとは  $f \circ g = \text{id}_{\bigoplus N_\lambda}$  を示せばよい。直和の universality(一意性) により各  $\lambda$  について  $f \circ g \circ \iota_\lambda = \iota_\lambda$  を示せばよいが、 $g \circ \iota_\lambda = g_\lambda$  より従う。

なお、次のように証明するとより見通しはいい：直和の universality を言いかえると、

$$\text{Hom}_R(\bigoplus N_\lambda, M) \cong \prod_\lambda \text{Hom}_R(N_\lambda, M)$$

となる。ここに、左辺の元から右辺の  $\lambda$  成分へは  $h \circ \iota_\lambda$  により写像があり、集合の直積の定義から左辺から右辺に写像がある。これが全単射であることが、直和の universality である。左辺も右辺も、 $M$  を動かしたときに関手となっている。このとき、任意の  $M_1 \rightarrow M_2$  に対して次は可換になる。

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_R(\bigoplus N_\lambda, M_1) & \cong & \prod_\lambda \text{Hom}_R(N_\lambda, M_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_R(\bigoplus N_\lambda, M_2) & \cong & \prod_\lambda \text{Hom}_R(N_\lambda, M_2) \end{array}$$

両辺をこのように関手と見たとき、左辺が全射を保つことが  $\bigoplus N_\lambda$  が射影的であることの定義である。これは、右辺の関手の各成分が全射であることと同値。すなわち、各  $N_\lambda$  がそれぞれ射影的であることと同値。こうすると、2 も 3 も証明されている。

3.  $P$  を射影的とし、 $P = N \oplus N'$  とする。 $N$  が射影的であることを示せばよい。 $f: M \rightarrow N$  を全射とすると、 $M \oplus N' \rightarrow N \oplus N' = P$  なる全射が得られる。 $P$  が射影的だから  $s: P \rightarrow M \oplus N'$  なる section がとれる ( $(f \oplus \text{id}_{N'}) \circ s = \text{id}_P$ )。このとき、自然な射影  $\text{pr}_M: M \oplus N' \rightarrow M$  と単射  $\iota_N: N \rightarrow N \oplus N'$  により得られる  $\text{pr}_M \circ s \circ \iota_N: N \rightarrow M$  が  $f: M \rightarrow N$  の section である。実際  $f \circ \text{pr}_M \circ s \circ \iota_N = \text{pr}_N \circ (f \oplus \text{id}_{N'}) \circ s \circ \iota_N = \text{pr}_N \circ \iota_N = \text{id}_N$ 。

4. 直前の補題「自由  $R$  加群から全射がある」ということから、自由  $R$  加群  $F$  から  $F \rightarrow P$  なる全射がある。 $P$  が射影的ならば、定理 2.2.11 の 3 番により  $P$  は  $F$  の直和因子。逆に、 $P$  が  $F$  の直和因子であれば、1 より  $F$  は射影的で 2 より  $P$  も射影的。

5.  $P$  が射影的  $R$  加群なら、4 より自由  $R$  加群の直和因子。自由  $R$  加群は平坦で、平坦  $R$  加群の直和因子は平坦 (例 2.2.2) だから従う。

□

**定理 2.2.14.**  $R$  を PID、 $P$  を  $R$  加群とする。次は同値。

1.  $P$  は射影的
2.  $P$  は自由

証明. 自由なら射影的なことはすでにみた。一方、射影的であれば、自由加群の直和因子であり、特に自由加群の部分加群である。定理 1.5.2 (PID 上自由加群の部分加群は自由) により自由加群となる。□

**例 2.2.15.**  $p, q > 1$  が互いに素な自然数なら  $R := \mathbb{Z}/(pq) \cong \mathbb{Z}/(p) \times \mathbb{Z}/(q)$  であり、 $\mathbb{Z}/(p)$  は  $R$  加群として自由ではないが射影的であり、従って平坦である。

$\mathbb{Z}$  加群として  $\mathbb{Q}$  は torsion free なので平坦である (あるいは商環だから平坦である)。しかし、任意の 2 元が一次従属なので自由ではない。PID では自由と射影的は同値なので、射影的でもない。

**注意 2.2.16.** 「射影的」(projective) という言葉のニュアンスが僕にはわからないが、「射が出ていく」のが projective であり、「射が入ってくる」のが injective のようである。

### 2.2.3 単射的加群

$R$  を環、 $I$  を  $R$  加群とする。

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$$

に対し、 $\text{Hom}_R(-, I)$  を施して得られる (演習 [1-12]) 完全系列

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(M_3, I) \rightarrow \text{Hom}_R(M_2, I) \rightarrow \text{Hom}_R(M_1, I)$$

がある。ここで、 $\text{Hom}_R(-, I)$  は  $R$  加群を加群に移すが、射  $M_1 \rightarrow M_2$  に対しては

$$(-) \circ f : \text{Hom}_R(M_2, I) \rightarrow \text{Hom}_R(M_1, I)$$

と、逆向きの射を対応させる。このような対応を反変関手 (contravariant functor) という。関手の定義 (注意 2.1.9) における、材料の 2 番目を

$$F_{A,B} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_o(B), F_o(A))$$

に、公理の 2 番目を

$$F_{A,C}(g \circ f) = F_{A,B}(f) \circ F_{B,C}(g)$$

に取り換えて得られる概念である。

前節と同様に、 $\text{Hom}_R(-, I)$  は左完全反変関手であるという。これが完全であるとき、 $I$  を単射的 (injective)  $R$  加群という。これは、「 $M \rightarrow N$  が単射であれば  $\text{Hom}_R(N, I) \rightarrow \text{Hom}_R(M, I)$  が全射である」とも言い換えられる。前節の議論と全く並列に、次が証明される。より正確に言えば、射の向きをひっくり返して議論を行うことにより証明される。

**定理 2.2.17.**  $I$  を  $R$  加群とする。以下、出てくる対象は  $R$  加群、射は  $R$  加群準同形とする。次は同値。

1.  $I$  は単射的。
2.  $M \rightarrow L$  なる単射があるとき、任意の射  $M \rightarrow I$  が  $L$  を経由する、すなわちある  $L \rightarrow I$  があって合成  $M \rightarrow L \rightarrow I$  が先の射になる。
3. 単射  $f: I \rightarrow L$  があるとき、 $r: L \rightarrow I$  であって  $f \circ r = \text{id}_I$  とできる。(このとき、 $I$  は  $L$  の直和因子と同形となる。)
4.  $I$  を左端にもつ短完全系列  $0 \rightarrow I \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$  は分裂する。

しかしながら、自由  $R$  加群はたいてい単射的にならない。たとえば、 $R = \mathbb{Z}$  のとき  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$  は直和因子でないので、 $\mathbb{Z}$  は  $\mathbb{Z}$  加群として単射的でない。

ここでは深入りしないで、次の定義と定理を述べるにとどめる。「単射的」なる性質は、たとえば(層の)コホモロジー理論に現れる。

**定義 2.2.18.**  $R$  を可換環、 $M$  を  $R$  加群とする。 $R$  の零因子でない任意の元  $a$  に対して  $a$  倍写像が全射 ( $a \bullet (-): M \rightarrow M$  が全射) のとき、 $M$  を可除  $R$  加群という。

**定理 2.2.19.**  $R$  を可換環とする。 $I$  が単射的  $R$  加群ならば、 $I$  は可除である。 $R$  が PID であれば逆も成り立つ。

証明.  $I$  が単射的であるとする。 $a \in R$  が零因子でないことの定義は、 $a \cdot (-): R \rightarrow R$  が単射であることである。従って、単射的加群の定義により  $a \bullet (-): \text{Hom}_R(R, I) \rightarrow \text{Hom}_R(R, I)$  は全射である(これが  $a$  倍であることは、 $R$  の可換性を使う)。ここで、 $\text{Hom}_R(R, I) \cong I$  ( $R$  加群として同形: 左辺は  $1_R$  の  $I$  での像をみることにより右辺と対応がつく) であり、 $a \bullet (-): I \rightarrow I$  の全射性が従う。

PID のときは逆が成り立つ。証明はここでは略したい。

□

## 第3章 Noether環とNoether加群

参考書では3章で有限群の表現論を扱っているが、講義では扱わない。表現論そのものを扱わない。しかし、参考書の3章で定義された単純・直既約・完全可約・半単純といった概念は扱う。次章に回す。

### 3.1 Noether性

$R$ を(可換とは限らない単位的)環とする。 $R$ の部分集合で、左 $R$ 部分加群となっているものを左イデアルというのであった。特に左右を明示しないときには、左 $R$ 加群を指すことにしていた。いっぽう、「イデアル」というと、通常両側イデアルを指す。このため、イデアルについてはいつも左・右を明示するという非統一的な記述となる。

**定理 3.1.1.**  $R$ 加群  $M$  に対し、次の条件は同値。

1.  $M$  の部分  $R$  加群の集合で、空でないものには包含関係に関して極大元がある。
2.  $M$  の部分  $R$  加群の上昇列

$$N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset \dots$$

に対し、ある  $n \in \mathbb{N}$  が存在してそこから先は停留する。すなわち  $N_n = N_{n+1} = \dots$  となる。

3.  $M$  の任意の部分  $R$  加群は  $R$  上有限生成である。

**証明.**  $1 \Rightarrow 2$ :  $2$ における上昇列にも極大元がある。それを  $N_n$  とすれば、全ての  $m$  に対して  $N_n \subsetneq N_m$  となることはない。特に、 $m \geq n$  では  $N_n \subset N_m$  なので、 $N_n = N_m$  となるしかない。

$2 \Rightarrow 1$ :  $2$ が成立しているのに、部分  $R$  加群の空でない集合  $S$  であって、極大元がないものがあつたとする。各部分加群  $N \in S$  に対し、(極大でないから) 存在する  $N \subsetneq N' \in S$  なる  $N'$  を(選択公理を使って) 一つとる写像を  $\varphi: S \rightarrow S$  とする。空でないから  $N_1 \in S$  がとれる。以下、帰納的に  $N_{n+1} := \varphi(N_n)$  と定めれば狭義単調増大する  $M$  の部分加群の列が存在する。これは  $2$  の不成立を示している。

$1 \Rightarrow 3$ :  $M$  の任意の部分加群  $N$  をとる。 $N$  の有限生成部分加群の集合を  $S$  とする。零加群を含むので  $S$  は空ではない。 $1$  より  $S$  には極大元  $N_0$  が存在する。 $N_0 = N$  ならば証明が終わる。 $N_0 \subsetneq N$  ならば、 $N \setminus N_0$  から任意に一個元  $b$  を持ってくると、 $\langle N_0, b \rangle$  は有限生成で  $N_0$  より真に大きい。これは極大性に矛盾。

$3 \Rightarrow 2$ :  $2$ の上昇列をとる。これら上昇列の合併  $N := \cup_{i=1}^{\infty} N_i$  も部分  $R$  加群で、 $3$ を仮定したから有限生成。生成元を  $b_1, \dots, b_m$  とすると、 $b_1$ が入る  $N_{i(1)}$ ,  $b_2$ が入る  $N_{i(2)}$ ,  $\dots$ ,  $b_m$ が



入る  $N_{i(m)}$  がある。これら  $i(1), \dots, i(m)$  の最大値を  $n$  とすれば  $N \subset N_n \subset N_{n+1} \subset \dots \subset N$  となり等号が成立して停留する。□

上の定理の、同値な最初の二つの性質を順序集合の **Noether 性** (Noetherian property) という。

**定義 3.1.2.** 左  $R$  加群  $M$  が上の同値な条件を満たすとき、 $R$  上の左 Noether 加群 (Noetherian module) という。

**定義 3.1.3.** 環  $R$  が左  $R$  加群として左 Noether 加群のとき、 $R$  を左 Noether 環 (Noetherian ring) という。

次は、上の定理と、「 $R$  の左部分  $R$  加群は左 ideal と同じ概念であること」からただちに従う。

**定理 3.1.4.**  $R$  を環とする。以下は同値。

1.  $R$  は左 Noether 環である。
2.  $R$  の左イデアルの集合で、空でないものには包含関係に関して極大元がある。
3.  $R$  の左イデアルの上昇列

$$N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset \dots$$

は、ある  $n \in \mathbb{N}$  から先は停留する。

4.  $R$  の任意の左イデアルは有限生成である。

先にみたとおり、PID は Noether 環である。体も Noether 環である。

**命題 3.1.5.**  $R$  を環、 $M$  を左  $R$ -Noether 加群とする。 $M$  の任意の部分  $R$  加群は Noether である。また、 $M$  の任意の商  $R$  加群は Noether である。

証明.  $N$  を部分  $R$  加群とする。 $N$  の部分  $R$  加群の集合は、 $M$  の部分  $R$  加群の集合のうちで  $N$  に含まれるものの全体である。Noether 加群の定義に現れる条件 1 (または 2) は、部分集合に遺伝する性質であることが容易に確認できるので、 $N$  は Noether である。

一方、「 $M/N$  の部分  $R$  加群全体」は、包含による順序集合の構造を保ちつつ、「 $M$  の部分加群であって  $N$  を含むもの全体」と自然に 1:1 の対応を持つ。同じコメント (部分集合への遺伝) により、 $M/N$  も Noether である。□

Noether 性は  $R$  加群同型によって保たれる性質である。従って、Noether 加群に単射する、あるいは全射される加群も Noether。

**命題 3.1.6.**  $R$  を環とし、 $R$  加群の短完全系列

$$0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow L \rightarrow 0$$

が与えられたとする。 $M$  が Noether  $\Leftrightarrow N$  も  $L$  も Noether。

証明.  $\Rightarrow$ : 直前の注意による。 $\Leftarrow$   $M' \subset M$  を部分加群とする。このとき、 $L'$  を  $M'$  の  $L$  における像とし、 $N' := M' \cap N$  とおくと短完全系列

$$0 \rightarrow N' \rightarrow M' \rightarrow L' \rightarrow 0$$

を得る。 $L', N'$  は Noether 加群の部分加群だから Noether。従って有限生成。 $L'$  の生成元それぞれに対し、全射  $M' \rightarrow L'$  による逆像から一個ずつ、(有限個だから選択公理を使う必要なく) 選んできて、 $N'$  の有限個の生成元とあわせて、それらが生成する  $M'$  の部分  $R$  加群を  $M''$  とする。 $M''$  は  $N'$  を含む (生成元を含むから)。一方、 $M''$  は  $L'$  に全射する ( $N'$  部分は消えるので、像は  $L'$  に入る。生成元の逆像を含むので、全射する)。任意の  $m' \in M'$  に対し、その  $L'$  での像と一致する  $m'' \in M''$  がとれる。 $m' - m''$  は  $N' \subset M''$  にはいるから、 $m' \in M''$  が言えて  $M' = M''$ 。したがって  $M'$  は有限生成である。これは  $M$  が Noether 加群であることを意味する。□

**系 3.1.7.**  $R$  が左 Noether 環ならば、任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対し  $R^n$  は左 Noether 加群である。従って、その部分  $R$  加群も、その商  $R$  加群も Noether。従って、有限生成  $R$  加群 (は  $R^n$  の商  $R$  加群) も Noether。

**注意 3.1.8.**  $R$  を左 Noether 環とし、 $I$  を左イデアルとする。 $R/I$  は  $R$  加群であり、上の命題から  $R$  加群として Noether である。いま、 $I$  を両側イデアルとする。 $R/I$  の部分  $R$  加群  $M$  は、自然に  $R/I$  加群である。(  $I$  が  $R \rightarrow \text{End}_+(M)$  の核に入る。) 逆に、 $R/I$  の部分  $R/I$  加群は  $R$  加群であるから、 $R$  加群として Noether なことから  $R/I$  加群として  $R/I$  が Noether であることが従う。ゆえに、 $R/I$  は左 Noether 環である。つまり「Noether 環の剰余環は Noether 環。」

しかし、 $R$  が左 Noether 環であっても、その部分環が左 Noether であるとは限らない。

**例 3.1.9.**  $K$  を体、 $p > 1$  を自然数とする。 $R := K[X^{1/p^n}; n \in \mathbb{N}]$  なる可換環を考える。この環は、より厳密には  $K[X_1, X_2, X_3, \dots]$  なる無限生成多項式環を、 $(X_1 - X_2^p, X_2 - X_3^p, X_3 - X_4^p, \dots)$  なる無限生成のイデアルで割って得られる。 $(X^{1/p^{i-1}} := X_i$  というふうに同一視する。)  $R$  において、 $X_1, X_2, \dots$  の全体が生成するイデアルを  $I$  とすると、 $I$  は有限生成ではない。実際、 $I_i := (X_1, \dots, X_i) = (X_i)$  とおくとこれは真に単調増大なイデアルの無限列となっており、定理 3.1.1 の証明から、その union (合併) は有限生成ではない。

ところで、 $R$  は整域である。というのも、 $X_1, \dots, X_n$  で  $K$  上生成される  $R$  の部分環は  $K[X_n]$  と同形で整域。それらの単調増大な合併も、整域になる。

したがって、 $R$  は  $R$  の商体に含まれるが、体は Noether 環である。したがって、 $R$  は Noether 環の部分環であって Noether 環ではない。

## 3.2 可換 Noether 環上有限生成な可換環なら Noether

**定理 3.2.1.** (Hilbert の基底定理)

$R$  を可換 Noether 環とすれば、多項式環  $R[X]$  は Noether 環である。(従って帰納的に、 $n$  変数多項式環  $R[X_1, \dots, X_n] \cong R[X_1, \dots, X_{n-1}][X_n]$  も Noether 環である。)

証明. イデアル  $I \subset R[X]$  をとる. これが有限生成であることを言えばよい.  $I \neq \{0\}$  としてよい. 各自然数  $m$  に対し,  $I$  に属する,  $m$  次以下の式の  $m$  次の係数がなす集合を  $a_m$  とする.  $a_m$  は  $R$  のイデアルとなる. なぜならば, 和に閉じていることは「 $m$  次以下の式の和は  $m$  次以下」ということと「多項式の和は次数ごとの係数和」ということから従う.  $R$  の元倍に閉じていることは一層やさしい.

$a \in a_m$  ならば  $aX^m + \dots$  の形の多項式で  $I$  に属するものがある.  $X$  倍することで  $a \in a_{m+1}$ . よってイデアル列  $a_m$  は単調に増大する.  $R$  が Noether だから, ある  $N$  があって  $a_N$  より先は停留する. 各  $1 \leq i \leq N$  に対し,  $a_i$  は有限生成だから, ちょうど  $i$  次の多項式であって, 最高次  $i$  次の係数が  $a_i$  を  $R$  のイデアルとして生成するような

$$f_1^{(i)}(X), \dots, f_{r_i}^{(i)}(X) \in I$$

をとれる. これらを  $i = 1, \dots, N$  と動かして得られる有限個の多項式により生成される  $R[X]$  のイデアルを  $I'$  とする.

$I = I'$  となることを示せばよい.  $I' \subset I$  は,  $I'$  の生成元が  $I$  に入ることから明らか.  $g \in I$  が  $I'$  に入ること示す.  $g$  の次数に関する帰納法により示す.  $g = 0$  のとき ( $\deg(g) = -\infty$ ) には明らか.  $\deg(g) \leq m - 1$  で成立を仮定して,  $\deg(g) = m$  の時を示す.

$m \leq N$  の場合:  $g$  の最高次 =  $m$  次の係数は  $a_m$  に入る. 従って,  $f_j^{(m)}(X)$  ( $j = 1, \dots, r_m$ ) の最高次の係数の  $R$  線形結合によって  $g$  の  $m$  次の項はかける. これは,  $g$  から  $f_j^{(m)}(X)$  ( $j = 1, \dots, r_m$ ) の  $R$  線形結合 (それは  $I'$  の元) を引くと,  $m$  次未満の次数を持つ  $g' \in I$  にできることを意味する. 帰納法の仮定により,  $g' \in I'$ . 従って  $g \in I'$ .

$m \geq N + 1$  の場合:  $a_m = a_N$  であるから, 上の議論により  $g$  の最高次の係数は  $f_j^{(N)}(X)$  ( $j = 1, \dots, r_N$ ) の最高次の係数の  $R$  線形結合により書ける. 同じ係数による  $f_j^{(N)}(X)$  の線形結合  $h$  は  $I'$  の元であって,  $h$  の最高次 =  $N$  次の係数は  $g$  のそれに一致する. 従って,  $h$  に  $X^{m-N}$  を掛けて (それは  $I'$  の元)  $g$  から引いて得られる  $g' \in I$  は次数が  $m$  より真に小さい. 従って帰納法が働く.  $\square$

**系 3.2.2.** 可換 Noether 環  $R$  上有限生成な可換環は Noether.

証明.  $A$  を  $R$  上の環とする. 「 $S \subset A$  により  $R$  上の環として生成される  $A$  の部分環」とは,  $S$  の元および  $R$  の元から  $A$  の  $+$ ,  $-$ , 積を繰り返して得られる部分環のことである.

いま,  $S$  が有限集合  $s_1, \dots, s_n \in A$  であるとする. さらに,  $A$  を可換環とする. 多項式環の universality により,  $R[X_1, \dots, X_n] \rightarrow A$  なる  $R$  上の環の準同型であって  $X_i \mapsto s_i$  となるものが (ただ一つ) 存在する.  $A$  が  $S$  で  $R$  上環として生成されるとすると,  $A$  の任意の元は  $R$  と  $S$  から環の演算を繰り返して得られる. が, 可換性から, この元は  $R$  係数で  $s_i$  たちを変数とする多項式の形で書けることが従う. ゆえに,  $R[X_1, \dots, X_n] \rightarrow A$  は全射である. 従って, Noether 環の剰余環だから  $A$  も Noether. (なお, 全射性と「 $S$  が  $A$  を  $R$  上の環として生成すること」とは同値である.)  $\square$

**系 3.2.3.** 体上の可換有限生成環は Noether.

## 第4章 既約性・アルティン性・半単純環

非可換環の例を作るために群環を導入する。有限群の群環上の加群は、有限群の表現論として重要な役割を果たすがこの講義では扱わない。

### 4.1 群環

$R$  を可換環、 $G$  をモノイドとする。 $G$  を自由基底とする自由  $R$  加群を  $R[G]$  で表す。その元は、 $G$  の元に係数を掛けて有限個足して得られる。

$$\left(\sum_{\sigma \in G} a_{\sigma} \sigma\right) \cdot \left(\sum_{\tau \in G} b_{\tau} \tau\right) := \sum a_{\sigma} b_{\tau} (\sigma\tau)$$

と積を定義することで、 $R[G]$  は環となる (確認必要)。特に  $G$  が群のときは  $G$  の  $R$  係数の群環という。

**例 4.1.1.**  $G$  が (加法モノイドである)  $\mathbb{N}$  と同形なモノイド  $\{1, X, X^2, X^3, \dots\}$  のときには  $R[G] \cong R[X]$  (一変数多項式環)、 $G$  が (加法群)  $\mathbb{Z}$  と同形な群のときには  $R[G] \cong R[X, X^{-1}]$ 。

**命題 4.1.2.** (群環の universality)  $R$  を可換環、 $G$  をモノイドとする。任意の  $R$  多元環  $S$  と  $G \rightarrow (S, \cdot)$  ( $S$  の積モノイドへのモノイド準同型) が与えられたとき、 $R$  多元環の射  $h: R[G] \rightarrow S$  であって合成  $G \rightarrow R[G] \rightarrow S$  が与えられたモノイド準同型となるものが存在し、一意的である。

証明.  $G$  の行き先を決めると、自由  $R$  加群の universality より  $R$  加群としての射は決まる。これが  $R$  多元環の準同型となることは、いちいち条件を確かめればよい。□

**系 4.1.3.**  $R$  を可換環、 $G$  をモノイド、 $V$  を  $R$  加群とする。(積) モノイド準同型  $G \rightarrow \text{End}_R(V)$  を  $G$  の  $V$  における  $R$  加群表現という。これを与えることと、 $R$  多元環の準同型  $R[G] \rightarrow \text{End}_R(V)$  を与えることは同値であり、 $R[G]$  加群  $V$  (であって  $R \subset R[G]$  に制限したときに元の  $R$  作用と一致するもの) を与えることとも同値である。

こうして、 $R[G]$  加群  $V$  を与えることと、 $R$  加群  $V$  と  $G$  の  $V$  への  $R$  加群表現を与えることは同じである。特に、 $R$  が体  $K$  のときには  $G$  の  $K$  線形表現という。多くの本で、 $G$  が群のときのみを扱っている。この時は群の  $K$  線形表現という。これは、 $K[G]$  加群と言っても同じ情報である。

### 4.2 既約、完全可約、直既約

**定義 4.2.1.**  $R$  を環とし、 $V$  を  $R$  加群とする。

1.  $R$  加群  $V \neq \{0\}$  が部分  $R$  加群を  $V$  と  $\{0\}$  以外に持たないとき、 $V$  を既約  $R$  加群 (irreducible  $R$ -module) という。群論の用語の類似で、単純  $R$  加群 (simple  $R$ -module) ともいう。零加群は既約  $R$  加群とはみなさない。
2.  $V$  の任意の部分  $R$  加群が直和因子であるとき、 $V$  を完全可約 (completely reducible) という。半単純  $R$  加群 (semi-simple  $R$ -module) ともいう。
3.  $V$  が  $\{0\}$  でない二つの  $R$  加群の直和に同型でないとき、 $V$  を直既約 (indecomposable) という。

定義より、既約ならば直既約。

**例 4.2.2.**  $R$  が体  $K$  であるならば、任意の  $K$  加群は自由である。完全可約でもある。 $K$  は  $K$  加群として既約。既約な  $K$  加群は  $K$  と同形。

$R$  を体でない PID とする。 $\mathbb{Z}$  または体上の多項式環  $K[X]$  を想像すれば十分である。 $V$  を有限生成  $R$  加群とすると構造定理の系 1.5.4 により、

$$V \cong R^r \oplus \bigoplus_{i=1}^k \bigoplus_{j=1}^{l_i} (R/(p_i^{e_{ij}}))^{\mu_{ij}}$$

の形の直和となる。各直和因子について考える。 $R$  には  $0$  でない素イデアル ( $p$ ) がある。これは真部分  $R$  加群だから、 $R$  は既約ではない。しかし、 $0, R$  以外のイデアルは直和因子とはならない (演習 [2-3])。従って、直既約である。

$p \neq 0$  に対し、 $R/(p^e)$  を考える。 $e > 1$  のとき、部分  $R$  加群  $pR/(p^e) \neq \{0\}$  を含むから既約ではないが、直既約であることは容易に確かめられる。

従って、 $r = 0$ , かつ全ての  $e_{ij} = 1$  のとき、 $V$  は既約加群の直和となる。逆も成立。(このとき、完全可約になることが示される。後述。)

**注意 4.2.3.**  $G$  を群 (モノイドでも良いが) としたとき、 $G$  の  $K$  線形表現とは  $K[G]$  加群のことであった。 $K[G]$  加群としての直和、既約、完全可約、直既約といった用語は、そのまま「 $G$  の  $K$  線形表現が直和、既約、完全可約、直既約」として用いられる。部分加群は、「 $G$  不変部分空間」とも呼ばれる。

**補題 4.2.4.**  $V$  を  $R$  加群とする。

1.  $V$  が既約であれば  $0 \neq v \in V$  は  $V$  を生成する:  $V = R \cdot v$ 。逆に、任意の  $0 \neq v \in V$  が  $V$  を生成し  $V \neq \{0\}$  ならば  $V$  は既約である。
2. 上により、 $V$  が既約であれば  $R \rightarrow V$  なる  $R$  加群の全射がある (複数があろう)。この核である左イデアル  $I$  は、 $R$  の左極大イデアルである。
3.  $R$  の任意の左極大イデアル  $I$  に対し、 $R/I$  は既約  $R$  加群である。

**例 4.2.5.**  $K$  を体とし、 $V = K^n$  を縦ベクトル空間とする。 $R := M_n(K)$  とする。 $V$  は左  $R$  加群として既約である。なぜなら、任意の非零ベクトルが  $V$  を  $R$  上生成するから。

これは、 $K$  を斜体としても (証明こみで) 変わらない。

斜体の定義について復習しておく。単位的環  $R$  であって  $R \setminus \{0\}$  が積について (非可換かもしれない) 群になるものを斜体という。さらに可換環であるものを体という。

**補題 4.2.6.** (Schur の補題)  $V$  を既約  $R$  加群,  $W$  を  $R$  加群とする。

1.  $R$  加群準同形  $V \rightarrow W$  は単射または 0 である。
2.  $R$  加群準同形  $W \rightarrow V$  は全射または 0 である。
3.  $W$  も既約とするとき  $R$  加群準同形  $V \rightarrow W$  は 0 または全単射 (すなわち同形) である。
4.  $\text{End}_R(V)$  は斜体である。

証明は、 $V$  に自明な部分加群がないことから kernel, image を考えれば容易に証明される。最後の項目に、 $V \neq \{0\}$  を使っている。

$\mathbb{Q} \cong \text{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q})$  により、最後の項目の逆は一般には不成立。

**定理 4.2.7.** (Schur の補題)  $K$  を代数閉体、 $R$  を  $K$  代数、 $V$  を既約  $R$  加群で  $K$  上の線形空間として有限次元とする。このとき、自然な写像  $K \rightarrow \text{End}_R(V)$  は同形である。

証明.  $K$  の像は  $R$  の中心に入っているので、 $R$  加群の定義により存在する  $R \rightarrow \text{End}(V)$  から制限により  $f: K \rightarrow \text{End}_R(V)$  なる単位環準同形が得られる。 $V \neq \{0\}$  により  $\text{End}_R(V)$  において  $1 \neq 0$ 。 $K$  は体だから  $f$  は単射。これにより  $K \subset \text{End}_R(V)$  と見る。

$\text{End}_R(V) \subset \text{End}_K(V)$  は  $K$  上有限次元である。従って、その元  $x$  は  $K$  上代数的 ( $1, x, x^2, \dots$  が  $K$  上一次従属になるから)。

故に  $x \in K$ 。これは  $K = \text{End}_R(V)$  を意味する。 □

**系 4.2.8.**  $G$  を可換群 (モノイドでも良い) とし、 $K$  を代数閉体とする。 $G$  の有限次元  $K$  線形既約表現  $V$  は全て 1 次元、すなわち準同形  $G \rightarrow (K, \cdot)$  から引き起こされる。

証明. 可換性より、 $K[G]$  の  $V$  への作用は  $K[G]$  加群準同形。よって  $K[G] \rightarrow \text{End}_{K[G]}(V)$  を factor するが、この式の右辺は  $K$  である。 □

### 4.3 Artin 性、組成列

**定義 4.3.1.** (Artin 加群)  $R$  を環とする。 $V$  を  $R$  加群とする。 $V$  の部分  $R$  加群の列

$$V \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n \supset \cdots$$

を下降列 (descending series)、

$$0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_n \subset \cdots \subset V$$

を上昇列という。任意の上昇列があるところから停滞するとき  $V$  を Noether 加群といった。任意の下降列があるところから停滞するとき  $V$  を Artin 加群という。

約束により、全て左  $R$  加群として考えている。明示したいときには左 Artin 加群という。

**注意 4.3.2.** Artin 加群であることと、「任意の空でない部分  $R$  加群の集合に、包含関係に関する極小元がある」ことは同値。理由は Noether 加群のところでも述べたものと同じ。

**定義 4.3.3.** (組成列)  $V$  の部分  $R$  加群の列

$$V = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n = \{0\}$$

が組成列であるとは、 $M_i/M_{i+1}$  が既約  $R$  加群であること。 $n$  を組成列の長さという。

長さが無限のものは、ここでは組成列とは言わないことにする。

**例 4.3.4.**  $R = K$  を体とし、 $V$  が体  $K$  上の有限次元線形空間のとき、 $V$  は組成列を持ち、その長さは次元に一致する。

**定理 4.3.5.** (Jordan-Hölder の定理)  $R$  加群  $V$  が二つの組成列

$$V = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_s = \{0\}$$

$$V = N_0 \supset N_1 \supset \cdots \supset N_t = \{0\}$$

を持ったとすると、 $s = t$  で、かつ既約  $R$  加群の集合  $M_{i-1}/M_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ) と  $N_{i-1}/N_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ) は順番を入れ替えてそれぞれ同型とできる。

証明. 組成列の長さに関する帰納法を用いる。長さ 0 のときには自明。 $V$  が長さ  $s-1$  以下の組成列を持つときには定理が成立すると仮定して、 $s$  の組成列を持つときに定理を示す。

自然な写像  $N_1 \rightarrow M_0/M_1$  を考えると、既約性より全射か 0 である。0 であるならば、 $N_1 \subset M_1$  となる。 $N_1 \subsetneq M_1$  となると  $N_0/N_1$  の既約性に違反するから  $N_1 = M_1$ 。これは長さ  $s-1$  以下の組成列を持つから帰納法の仮定を使って定理は示される。

よって、 $N_1 \rightarrow M_0/M_1$  が全射であるとしてよい。この核は  $L := N_1 \cap M_1$  である。対称性より  $M_0/M_1 \cong N_1/L$ ,  $N_0/N_1 \cong M_1/L$  となる。ここで、 $M_1$  について帰納法の仮定を使う。 $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \cdots$  は  $M_1$  の組成列である。 $M_1 \supset L \supset (M_2 \cap L) \supset (M_3 \cap L) \supset \cdots$  を考えると、 $M_i \cap L \rightarrow M_i/M_{i+1}$  の核は  $M_{i+1} \cap L$  だから  $(M_i \cap L)/(M_{i+1} \cap L)$  は  $M_i/M_{i+1}$  に単射し、従って 0 または同型である。ここから、 $M_1 \supset L \supset \cdots$  なる組成列が存在することがわかる。 $M_1$  に帰納法の仮定を用いて、 $L$  の組成列は長さ  $s-2$  で、その商に現れる既約加群の同形類は (重複度も込めて)  $M_1$  の組成列に現れる既約加群のうち  $M_1/L \cong N_0/N_1$  を一つ減らしたものとなる。

$N_1$  にも同じ議論を用いてやると、 $L \subset N_1$  の組成列に現れる既約加群の同形類は、 $N_1$  の組成列に現れる既約加群から  $N_1/L \cong M_0/M_1$  を一つ減らしたものとなる。こうして、 $M_0, M_1, \dots$  なる組成列に現れる既約加群の同形類は、 $L$  のそれに  $M_0/M_1, M_1/L \cong N_0/N_1$  を補ったものに等しい。一方、 $N_0, N_1, \dots$  なる組成列にあらわれる既約加群の同形類は、 $L$  のそれに  $N_0/N_1, N_1/L \cong M_0/M_1$  を補ったものに等しい。従って、 $V$  の二つの組成列に現れる既約加群の同形類の集合は重複度も込めて等しい。□

**定義 4.3.6.** 組成列を持つ  $R$  加群  $V$  を  $R$  上の長さ有限加群といい、その組成列の長さを  $V$  の長さといい、 $l(V)$  であらわす。

**命題 4.3.7.**  $V$  が長さ有限なら、その部分加群  $M$  も商  $V/M$  も長さ有限。逆に、 $M$  と  $V/M$  が長さ有限ならば  $V$  は長さ有限。このとき

$$l(V) = l(M) + l(V/M)$$

が成立する。

証明.  $V$  の組成列と  $M$  の共通部分をとることで  $M$  の組成列を得られることは、上の証明で見た。 $V/M$  での  $V$  の組成列の像を見ることで  $V/M$  の組成列が得られることも易しい。命題の前半が言えた。

$M$  の組成列と  $V/M$  の組成列をつなげて  $V$  の組成列が得られるから、後半が言える。

組成列の長さの一意性より、等式を得る。  $\square$

この命題により、 $V$  が長さ有限なとき、その部分加群の狭義単調減少有限列を任意に与えられたとき、それを含む組成列がとれることがわかる。

**命題 4.3.8.**  $V$  が組成列を持つ必要十分条件は、Noether かつ Artin であること。

証明. 十分性:  $V \supset 0$  が  $0$  のときは、長さ  $0$  の組成列を持つ (ということにする)。 $V$  が既約なら長さ  $1$  の組成列を持つ。今、 $V$  が組成列を持たないとする。 $U_0 := V, L_0 := \{0\}$  とおく。以下の手順で、減少列  $U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots$  増大列  $L_0 \subsetneq L_1 \subsetneq L_2 \subsetneq \dots$  がとれて、どちらかは無限列になり、Artin 性または Noether 性に違反して証明が終わる。さて、組成列を持たないから  $V$  は既約でも  $0$  でもない。よって  $V \supseteq V' \neq 0$  がとれる。今、 $V/V'$  と  $V'$  の両方が組成列を持つならば、それらから  $V$  の組成列が作れる。したがって、どちらかは組成列を持たない。 $V/V'$  が組成列を持たないときは  $L_1 := V'$  とおき、 $V'$  が組成列を持たないときには  $U_1 := V'$  とおく。 $V/V'$  が組成列を持たないときには  $U_0 = V \supseteq V'' \supseteq V' := L_1$  なる  $V''$  がとれる。上と同様にして、 $V''$  を  $U_1$  または  $L_2$  にとる。どちらにするかは、 $U_*/L_*$  に組成列が無いように名前を付けていく。

このようにして、減少列と増大列がとれる。どちらかは無限列となるから、Artin 性または Noether 性に反する。

必要性:  $V$  の長さを  $n$  とする。単調増大部分列の長さは  $n$  を超えないことを上の命題でみた。従って Artin かつ Noether である。  $\square$

次の定理は、同じ方法で証明されて同じ名前がついているが有限群に関する定理である。

**定理 4.3.9.** (Jordan-Hölder の定理)

$G$  を有限群とする。正規部分群の列

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_s = \{1\}$$

が組成列であるとは、 $G_{i-1}/G_i$  が単純群であること。

任意の有限群は組成列を有し、その商に現れる単純群の同形類の集合は重複度を込めて組成列の取り方によらない。特に、長さもよらない。

## 4.4 根基と中山の補題

**定義 4.4.1.**  $R$  を環とする。 $R$  の Jacobson 根基 (Jacobson radical)  $\text{rad}(R)$  は次で定義される。

$$\text{rad}(R) := \bigcap_m m$$

ここに、 $m$  は  $R$  の左極大イデアル  $m$  を全て動く。

**補題 4.4.2.** (中山の補題)  $M$  を有限生成  $R$  加群、 $N$  をその部分加群とする。 $M = N + \text{rad}(R)M$  ならば  $M = N$  である。



証明にはちょっと準備がいる (後述)。

次の形で良く使われる。

**系 4.4.3.**  $R$  を可換な局所環 (すなわち、ただ一つの極大イデアル  $m$  を有する環) とし、 $M$  を有限生成  $R$  加群とする。 $M$  の部分集合  $S$  が  $R$  加群としての生成元となる必要十分条件は、その  $M/mM$  での像が  $R/m$  加群として生成元となることである。

証明.  $N := \langle S \rangle$  に中山の補題を使えばよい。 $M = \langle S \rangle + mM$  と最後の条件は同値である。□

**定義 4.4.4.**  $x \in M$  を  $R$  加群とその元とする。

$$\text{Ann}(x) := \text{Ker}(R \rightarrow R \bullet x) \quad (R \bullet x \subset M)$$

は左イデアル、

$$\text{Ann}(M) := \bigcap_{x \in M} \text{Ann}(x) = \text{Ker}(R \rightarrow \text{End}_+(M))$$

は両側イデアルである。

**命題 4.4.5.**  $M_\lambda$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) で既約  $R$  加群の同形類の代表系を表す。このとき

$$\text{rad}(R) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \text{Ann}(M_\lambda)$$

特にこれは両側イデアルとなる。

証明. 右辺を  $J$  と置く。任意の左極大イデアル  $m$  に対して  $R/m$  は既約  $R$  加群。そこでの 1 の像を  $\bar{1}$  と書くと  $m = \text{Ann}(\bar{1}) \supset \text{Ann}(R/m) \supset J$  により  $\text{rad}(R) \supset J$ 。

逆に、任意の既約  $R$  加群  $M$  に対して  $\text{Ann}(M) = \bigcap_{0 \neq x \in M} \text{Ann}(x)$  となるが、各  $\text{Ann}(x)$  は既約  $R$  加群への非零準同型  $R \rightarrow R \bullet x = M$  の核だから左極大イデアルとなる。こうして  $\text{Ann}(M) \supset \text{rad}(R)$ 、 $J \supset \text{rad}(R)$ 。□

証明. 中山の補題の証明。中山の補題の設定を仮定する。 $N \subsetneq M$  としてよい。 $M$  が有限生成  $R$  加群とすると、「 $M$  の真部分  $R$  加群で  $N$  を含むものたち」には極大なもの  $M'$  がある。 $(M$  の  $N$  を含む真部分  $R$  加群の集合が包含関係により帰納的であることを示せば Zorn の補題より従う。 $N$  があるから空ではない。いま、全順序関係にある真部分加群の族  $F$  を考える。その合併は  $M$  とはならない。 $M$  となるなら、 $x_1, \dots, x_n$  を  $M$  の生成元としたとき、それぞれを含む部分加群が  $F$  に属するので、それら有限個の部分加群のうち最大の加群  $\in F$  がすでに  $M$  となってしまう矛盾。)

$M/M'$  は既約である。上の命題  $\text{rad}(R) = J$  により  $\text{rad}(R)(M/M') = 0$ 、すなわち  $\text{rad}(R)M \subset M'$ 。中山の補題の仮定から  $N + \text{rad}(R)M = M$  だが、左辺が  $M'$  に入ってしまうのでこれは矛盾。□

## 4.5 Wedderburn の定理 (半単純環の構造定理)

**補題 4.5.1.**  $M$  を  $R$  加群、 $N$  を部分  $R$  加群、 $M_\lambda$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) を既約な  $M$  の部分  $R$  加群の族とする。

$$L = N + \sum_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$$

とすると、適当な部分集合  $\Lambda' \subset \Lambda$  が存在して

$$L = N + \sum_{\lambda \in \Lambda'} M_\lambda$$

が直和となるようにできる。

証明. 右辺が直和になるような  $\Lambda'$  の集合を  $F$  とすると、包含関係に関して帰納的順序集合となる。 $F$  は空集合を含むので空ではない。極大元をとり  $\Lambda'$  とする。右辺が  $L$  に到達していることを示すのはルーチンワークである。□

**系 4.5.2.** 1.  $M$  が半単純であるなら、その部分  $R$  加群も半単純。

2.  $M$  が半単純  $R$  加群であることと、既約部分  $R$  加群の和で書けることとは同値。

3.  $M$  が半単純なら、その商  $R$  加群も半単純。

証明. 1.  $M$  が半単純とは、任意の部分  $R$  加群が直和因子となることであった。 $C \subset A \subset M$  を部分  $R$  加群とする。 $A$  において  $C$  が直和因子になっていることを示せばよい。 $M = C \oplus D$  となる  $D$  がある。このとき、

$$A = C \oplus (A \cap D)$$

となることを示せばよい。右辺が直和であることは自明。左辺が右辺を含むことも自明。左辺の元  $a \in A$  をとってくると、 $a = c + d$ ,  $c \in C$ ,  $d \in D$  と書ける。 $c \in C$  から、 $d = a - c \in A \cap D$  より等号が成立。

2.  $M$  が半単純とする。 $M$  の部分既約  $R$  加群全ての和を  $M'$  とすると、半単純性から  $M = M' \oplus C$ 。ここで  $C \neq 0$  ならば  $0 \neq x \in C$  をとって部分  $R$  加群  $R \bullet x \subset C$  は  $R/\text{Ann}(x)$  と同型であり、 $R$  の  $\text{Ann}(x)$  を含む左極大イデアルの存在性から  $R \bullet x$  には極大部分  $R$  加群  $L$  がある。 $V := R \bullet x / L$  は既約  $R$  加群となり、 $R \bullet x$  は (1 により) 半単純なので  $V$  と同型な直和因子をもつ。 $V \subset C$  は  $M'$  と直和である。これは  $M'$  の構成に違反する ( $V$  も足してあるはず)。

逆に、 $M$  が既約加群の和としてかけているとする。 $M$  の任意の部分  $R$  加群  $N$  と、全ての既約部分  $R$  加群  $M_\lambda$ 、 $L = M$  に対して上の補題を使えば  $N$  が直和因子であることがわかる。

3. 2 から従う。□

**定義 4.5.3.** 環  $R$  が半単純環であるとは、 $R$  が左  $R$  加群として半単純 (すなわち完全可約) であること。

**命題 4.5.4.**  $R$  が半単純ならば、任意の  $R$  加群は半単純。また、射影的。

証明. 系 4.5.2 を使う。 $R$  が半単純ならば、その直和である自由  $R$  加群も半単純。任意の  $R$  加群は自由  $R$  加群  $F$  の商であるから半単純である。

また、 $F$  が半単純なのでその商は直和因子となり、従って射影的。□

**定義 4.5.5.** 環  $R$  が単純環とは、両側イデアルが  $0$  か全体しかないもの。

**定理 4.5.6.** 環  $R$  について次は同値。

1.  $R$  は半単純。

2.  $R$  は左 Artin 環で、 $\text{rad}(R) = 0$ 。
3.  $R$  は左 Artin 環で、有限個の単純環の直積に同型。
4.  $R$  は斜体  $D_1, \dots, D_r$  により直積環

$$M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_r}(D_r)$$

に同型。

証明.  $1 \Rightarrow 4$ .  $R$  は既約  $R$  部分加群  $M_\lambda$  の直和となる。 $1 \in R$  を直和にあらわして  $1 = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} 1_\lambda$  と有限和に書ける。 $1_\lambda = 0$  となるような  $\lambda$  があるとすると、任意の  $m_\lambda \in M_\lambda$  に対して  $m_\lambda = m_\lambda 1$  の  $M_\lambda$  成分を考えることにより  $m_\lambda = 0$ 。したがって、 $\Lambda$  は有限集合。各既約因子を同型ごとにまとめて  $R \cong I_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus I_r^{n_r}$  を得る。Schur の補題により  $\text{Hom}_R(I_i, I_j)$  は  $i = j$  のときに斜体  $D_i$  と同形となり、そうでないときは  $0$ 。従って

$$\text{End}_R(R) = M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_r}(D_r)$$

となる。ここで、環として

$$\text{End}_R(R) \cong R^{op}, f \mapsto f(1),$$

ここに  $R^{op}$  は  $R$  と同じ台集合に、積の順序を逆にして得られる環 (逆同型環という) を表す。これにより  $R^{op}$  が行列の直積となったが、行列環の逆同型環は自分自身と同形 (転置写像がこの同型を与える。)

$4 \Rightarrow 3$ :  $M_n(D)$  が単純環であることは行列計算で容易に確認できる。これは有限次元  $D$  線形空間なので Artin 環である。直積も Artin 環。

$3 \Rightarrow 2$ : 単純環の Jacobson 根基は  $0$ 。直積環の Jacobson 根基は各成分の Jacobson 根基の直積。

$2 \Rightarrow 1$ :  $R$  の左極大イデアル  $I$  全ての共通部分  $\text{rad}(R)$  が  $0$  である。従って任意の  $0 \neq x \in R$  に対して  $x \notin I$  なる極大イデアルがとれる。従って、任意の  $0$  でないイデアル  $J$  に対し、 $I \cap J \subset J$  が真に  $J$  より小さくなるような極大イデアル  $I$  がとれる。Artin 環であるから、極大イデアル  $I_1$  から始めてこの操作を繰り返すと  $I_1 \supset I_1 \cap I_2 \supset I_1 \cap I_2 \cap I_3 \supset \cdots \supset I_1 \cap \cdots \cap I_n = 0$  を得る。作り方から  $I_1 \cap \cdots \cap I_{m-1} \subset I_m$  とはなっておらず、 $I_m$  の極大性から  $(I_1 \cap \cdots \cap I_{m-1}) + I_m = R$  が成立する。特に  $c + d = 1$ ,  $c \in I_1 \cap \cdots \cap I_{m-1}$ ,  $d \in I_m$  がとれる。このことから  $R \rightarrow R/(I_1 \cap \cdots \cap I_{m-1}) \times R/I_m$  は全射である。(中国剰余定理である。右辺の元  $a \oplus b$  に対し  $\tilde{a}d + \tilde{b}c \in R$  をとればよい。)

帰納法により

$$R \rightarrow R/I_1 \times \cdots \times R/I_n$$

は全射で、核は  $\bigcap I_i = 0$  だから同型である。右辺は既約  $R$  加群の直和なので  $R$  は半単純加群、従って半単純環となる。  $\square$