代数曲線に触れる

松本　眞*

平成 16 年 12 月 12 日

目 次

*広島大学理学部数学科 m-mat@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

この講義ノートは
http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~m-mat/TEACH/teach.html
からダウンロードできる

種数

この講義では、代数曲線の「種数」(genus) について解説する。

「種数」を直観的に理解するには、位相空間論の曲面の種数を見るのが良い。コンパクト向き付け可能（実2次元）曲面は、図1に挙げられた

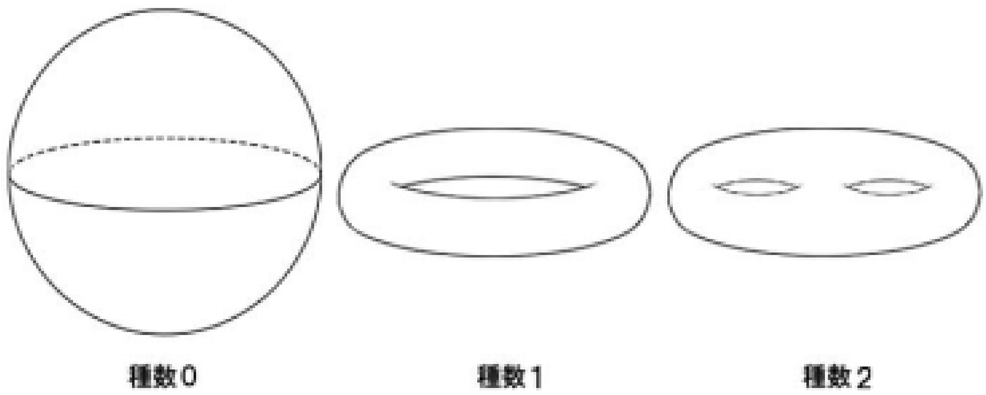


図 1: 曲面の種数

ような曲面となる。このとき、穴の数のことを種数という。種数により、コンパクト向き付け可能（実2次元）曲面は同型を除いて分類される (例えば [1, §26] 参照)。

このトポロジー的な量が、代数曲線の性質をかなり決めてしまう。

代数曲線と実二次元曲面の関係がわからないと思うが、複素代数曲線とは（局所的には）複素パラメーター一個であらわせる図形のことであ

り、複素一次元の代数曲線は実二次元の曲面である。そこで、種数が定義できるのである。

1　フェルマー予想

1.1　フェルマー予想

Fermat は 1650 年ごろ次のように述べた。

$n \geq 3$ なら方程式 $X^n + Y^n = Z^n, X, Y, Z \in \mathbb{Z}$ には自明解しかない。

自明解とは、X, Y, Z のいずれかが 0 となるような解のことである。

この予想は 1995 年に A. Wiles により証明された。

一般に、「多項式による連立方程式に整数解や有理数解があるか。あるとしたら、何個あるか。全部挙げることができるか。」といった問題を**ディオファントス問題**という。

定義 1.1. 平面代数曲線とは、2 変数多項式の方程式 $f(x, y) = 0$ の解の集合のこと。

例 1.2. $x^2 + y^2 = a$ (a は実定数)。これは、実数の範囲で考えたとき、$a > 0$ なら円をあらわし $a = 0$ なら原点一点をあらわし、$a < 0$ なら空集合をあらわしている。

$a < 0$ でも、複素数の範囲で解を考えればたくさんある。

このように、代数曲線といってもどの範囲で解を考えるのか、どの体で解を考えるのかを明らかにしないと定かにはさだまらない。

例で見たとおり、実数の範囲で考えると一点や空集合なども「代数曲線」であることになり、直感に合わない。通常は、代数曲線といったら複素数解の全体をあらわすことが多い。

定義 1.3. 複素（平面）代数曲線とは、複素係数二変数多項式の方程式 $f(x, y) = 0$ の複素数解の集合のこと。

注意 1.4. 現代流の代数幾何では、多項式そのものや、あるいは $\mathbb{C}[x, y]/f(x, y)$ のような環そのものを代数曲線と呼ぶ。

$$\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 | f(x, y) = 0\} \subset \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 | f(x, y) = 0\}$$

である。右が f が与える代数曲線であり、左はその代数曲線上の有理数解の集合である。有理数解のことを、その代数曲線の**有理点**という。

フェルマー予想は、

$$x^n + y^n = 1 \tag{1}$$

が与える代数曲線に乗る有理点が $(0,1),(1,0)$ のみであるということと同値である。というのは、$X^n + Y^n = Z^n$ の非自明整数解からは $(X/Z, Y/Z)$ なる (1) の有理数解が得られるし、逆に (1) の有理数解からは x, y を通分して分母を Z とおき、Z^n を移項することで非自明整数解が得られるからである。

式 (1) で与えられる代数曲線を n 次フェルマー曲線という。この講義では F_n でそれを表すことにしよう。フェルマー予想とは、「$n \geq 3$ ならばフェルマー曲線は $(0,1)$, $(1,0)$ 以外の有理点をもたない」という形に述べられる。

1.2 2次曲線の有理点

フェルマー曲線で $n = 1$ の場合すなわち F_1: $x + y = 1$ を考えてみると、

$$\{(x,y) | x = t, y = 1 - t, t \in \mathbb{Q}\}$$

が有理点の全てである。一つの有理数 t をパラメータとして、全ての解を書き表すことができる。

実は、$n = 2$ の場合でも同じようなことができる。図 2 に見られるように、点 $(-1,0)$ を通り傾き a が有理数の直線を引く。すると、この直線と円の交点は $(-1,0)$ 以外にもう一点ある。それは、連立方程式

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = a(x+1) \end{cases}$$

から y を消去すると x の有理数係数二次式=0 の形になり、その一つの根は -1 であるはずだから根と係数の関係によりもう一つの根も有理数だからである。

実際に消去して計算してみると

$$x^2 + a^2(x+1)^2 = 1 \Rightarrow (x^2 - 1) = -a^2(x+1)^2 \overset{x \neq -1}{\Rightarrow} x - 1 = -a^2 x - a^2$$

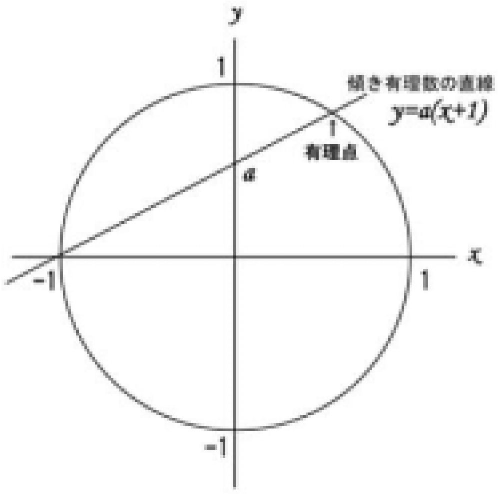


図 2: 単位円周上の有理点

より $x \neq -1$ なる解は

$$x = \frac{1-a^2}{1+a^2}, y = a(x+1) = \frac{2a}{1+a^2} \tag{2}$$

となる。実は、これで F_2: $x^2 + y^2 = 1$ 上の $(-1, 0)$ 以外の全ての有理点が求まっている。なぜなら、有理点 $P(x, y)$ を持ってくると、この点と $(-1, 0)$ を結ぶ直線は有理数の傾き $\frac{y}{x+1}$ を持つからである。

まとめると、

$$f : \mathbb{Q} \to x^2 + y^2 = 1 \text{ の有理数解}, a \mapsto (\frac{1-a^2}{1+a^2}, \frac{2a}{1+a^2})$$

なる写像が与えられる。行き先の集合から $(-1, 0)$ を除けば、f は逆写像

$$g : (x, y) \mapsto y/(x+1)$$

を持ち、一対一写像となる。これで、2 次フェルマー曲線 F_2 のディオファントス問題は解決である。

問題 1.5. $a = 1/2, 1/3$ などを代入することで、$X^2 + Y^2 = Z^2$ の整数解をいろいろ作ってみよ。

さて、$\mathbb{C} = \{t \in \mathbb{C}\}$ を複素アファイン直線といい、$\mathbb{A}^1$ で表す。上の証明では、別に有理数に限らず

$$f : \mathbb{A}^1 \to F_2, \quad t \mapsto (\frac{1-a^2}{1+a^2}, \frac{2a}{1+a^2})$$

という写像が与えられている。また、$(-1,0)$ を除けば逆写像 $g:(x,y)\mapsto y/(x+1)$ が与えられている。

f のように、代数曲線から代数曲線への写像であって、座標の有理式によってあらわされるものを**有理射** (有理写像、rational map) と呼ぶ。g は一点 $(-1,0)$ で未定義だが、g のように座標の有理式によってあらわされている写像であって、「分母がゼロになる点」以外では定義されているものも有理射という。

（耳年増になるために：上のように、f,g なる有理射であって分母がゼロになる点を除けば互いに逆射になっているようなものを双有理写像といい、そのとき二つの代数多様体は**有理同値**であるという。）

問題 1.6. 上の証明では、「F_2 が二次式で、有理点 $(-1,0)$ をもつ」ということしか使っていない。任意の有理数係数二次平面曲線（x,y を 1 次と思っての次数が二次の多項式の解）に対し、有理点が一個でもあれば、それを通る傾き有理数の直線を用いることで、残りの有理点は全てパラメータ付けできることを示せ。

問題 1.7. $x^2+y^2=3$ には有理点が一つもないことを示せ。

（ヒント：$X^2+Y^2=3Z^2$ としておいて、4 で割った余りを考える）

1.3 関数体類似

では F_n $(n\geq 3)$ でも同様のことが行えないのだろうか。すなわち、

$$f:\mathbb{A}^1\to F_n$$

なる有理射が作れないのだろうか？いいかえると、

$x(t),y(t)\in\mathbb{C}(t)$ であって

$$x(t)^n+y(t)^n=1 \tag{3}$$

を満たすものはあるか？

もちろん、そんな $x(t),y(t)$ が $\mathbb{Q}(t)$ の範囲にあったら F_n に（いっぱい）有理点があってフェルマー予想に矛盾する。問題は、$\mathbb{C}(t)$ の範囲にならあるか、ということである。

$x(t),y(t)$ が複素定数になるものを考えたら解は一杯ある。そこで、次の問題が生じる。

問題 1.8. $n \geq 1$ とする。(3) の定数解ではない有理式解 $x(t), y(t) \in \mathbb{C}(t)$ は存在するか？

問題 1.9. 上の問題が、次に同値であることを示せ。「多項式 $X(t), Y(t), Z(t) \in \mathbb{C}(t)$ であって、

$$X(t)^n + Y(t)^n = Z(t)^n$$

を満たすものがあるか。」

この問題は、「フェルマー予想の関数体類似」と呼ばれている。それは、$\mathbb{Z}$ での解を考える代わりに、$\mathbb{C}[t]$ での解を考えたものだからである。

答えは、「非定数解が存在するのは $n < 3$ のとき、かつそのときに限る。」である。

この事実を証明する方法は複数あり、高校範囲でもできると思う。しかし以下では、種数を用いた「筋のいい」解法を解説する。

1.4 関数体類似の証明の概略

ここで紹介する証明には、次の三つの事実を用いる。

1. 非特異代数曲線 X から Y への (定数でない) 有理射は、X の非特異コンパクト化から Y の非特異コンパクト化への (定数でない) 代数射に伸びる。
2. $\mathbb{A}^1$ のコンパクト化である射影直線は、種数 0 のコンパクト向きづけ可能実二次元曲面である。F_n の非特異コンパクト化は種数 $(n-1)(n-2)/2$ のコンパクト向きづけ可能実二次元曲面である。
3. (Riemann-Hurwitz 公式)
   二つの代数曲線 X, Y の間に定数でない代数射 $f : X \to Y$ が存在すると、それらの種数 $g(X), g(Y)$ の間に次の関係式が成り立つ。

$$(\deg f)(2 - 2g(Y)) = (2 - 2g(X)) + \sum_{P \in X: \text{分岐点}} (e_P - 1)$$

   ここに、$\deg f$ は「f が何対 1 の写像か」をあらわす正の整数で、f の次数と呼ばれる数。e_P は、P における f の分岐指数と呼ばれる正の整数で、P の付近での f の多重度をあらわす。$e_P = 1$ のとき f は P で不分岐、$e_P > 1$ のとき f は P で分岐している、あるいは P は f の分岐点であるという。

これらを認めよう。もし $f : \mathbb{A}^1 \to F_n$ なる有理射が存在したとすると、1. によりそれはコンパクト化上での代数射に伸びる。すると、2. により $g(X) = 0$ で、Riemann-Hurwitz 公式の右辺は右辺は 2 以上の数になる。したがって左辺は正。したがって $g(Y) = 0$ でなくてはならない。

しかるに $g(F_n) = (n-1)(n-2)/2$ であるから、$n \geq 3$ とすると矛盾する。

注意 1.10. 上の証明から、実は「$\mathbb{A}^1$ から種数が 1 以上の曲線への非定数有理射は存在しない」ということが証明されている。

いいかえると、種数が 1 以上の曲線には、有理式による非定数解は存在しない。

問題 1.11. 種数 1 の代数曲線からの非定数有理射を受け入れられる代数曲線の種数は、0 または 1 であることを証明せよ。

1.5 種数とモーデル予想

モーデル予想という予想があり、1980 年代に Faltings が証明している (大定理)。これは、「$\mathbb{Q}$ 係数で定義された代数曲線の種数が 2 以上ならば、その上の有理点はたかだか有限個」というものである。

n 次フェルマー曲線の種数が 1 以上になるのは $n \geq 3$ であるから、この結果は 3 次以上のフェルマー曲線の有理点は有限個である、ということまでは示している。

このように、種数という位相幾何的量が代数曲線の数論的性質をかなり決定してしまう。

2 種数のトポロジー

この章では、しばらく「代数」から離れて実二次曲面について、おおざっぱに解説する。

2.1 曲面

ここで扱う曲面は、境界を許した多角形分割可能な連結実二次元曲面のことである。すなわち、次の定義を採用する。

定義 2.1. 連結位相空間 X が（境界を持たない）曲面であるとは、X 上の各点 P に対し、その開近傍として実二次元開円板に同相なものがとれることである。

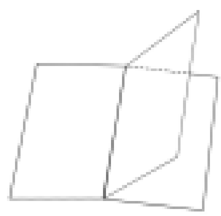
X が境界を許した曲面であるとは、X 上の各点 P に対し、その開近傍として実二次元開円板に同相なものがとれるか、もしくは実二次元半円板

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2<1,\ x\geq 0\}$$

に同相なものがとれることである。後者の場合には、P と対応する点が円板の中心 $(0,0)$ と同型なものとする。前者のような点を X の内点、後者のような点を X の境界点という。

曲面が多角形分割可能であるとは、曲面がいくつかの（無限個も許す）多角形の辺同士を張り合わせて得られるものに同相であることである。

この定義により、「本のページ」のように面が分かれることは許されない（分かれ目の点の近傍で円板にも半円板にもならない）し、「蝶の羽」のように二つの面が一点でつながることもない。平面のような無限に大



きいものでも、無限個の多角形を使えば多角形分割可能である。境界つき円板は一枚の多角形とみなせる。種数の高い曲面も、有限個の多角形で覆える。

2.2 種数とオイラー標数

定義 2.2. X を有限個の多角形に分割可能な（境界を許した）曲面とする。このとき、X のオイラー標数 (Euler characteristic)$\chi(X)$ を分割に現れる

$$\chi(X):=\text{点の数}-\text{辺の数}+\text{面の数}$$

で定義する。

例 2.3. Σ_g で種数 g の向き付け可能閉曲面を表す（図 1)。

1. Σ_0 で球面を表す。球面は二枚の三角形を張り合わせてつくることができる。このとき、点の数は 3、辺の数は 3、面の数は 2 であるから球面のオイラー標数は
$$\chi(\Sigma_0) = 3 - 3 + 2 = 2.$$
2. Σ_1 は、四辺形の対辺同士を張り合わせて得られる（図 3)。張り合わせることにより点は 1 個になり、辺は二辺、面は 1 個である。よって
$$\chi(\Sigma_0) = 1 - 2 + 1 = 0.$$
3. Σ_g は、Σ_1 に境界をつけたものを g 個貼り付けて得られる。このとき、面の数は 1 個、辺の数は $2g + (g-1)$、点の数は g。よって
$$\chi(\Sigma_g) = g - (2g + (g-1)) + 1 = 2 - 2g.$$
$g = 2$ の時の図 4 参照。一般に、g 個の点をとり、それぞれにつき 2 個の辺に沿って切ることにより、g 個穴の開いた球面となる。これを多角形にするには、さらに $g-1$ 個の辺に沿って切る必要がある。最初にとった g 個の点を $g-1$ 個の辺で結んでやるとよい。すると、点の数は g 個、辺の数は $2g + g - 1$ 個、面の数は 1 個である。

さて次の事実が成立しなければ、「曲面のオイラー標数」とは言えないだろう。

定理 2.4. 有限多角形分割可能な曲面のオイラー標数は、多角形の分割の仕方によらない。

証明. オイラー標数は分割 Δ を与えて初めて決まるものだから、$\chi(\Sigma_g, \Delta)$ という記号であらわすことにしよう。まず、有限多角形分割を一つ固定する。これに辺を付け加えて得られる分割を Δ' とする。

もし、辺の両端点がどちらももともと多角形の頂点であったとすると、点の数は増えない。辺が一つ増え、面が一つ増える。よってオイラー標数は変わらない:$\chi(\Sigma_g, \Delta) = \chi(\Sigma_g, \Delta')$。

もし、辺の両端点がもともとの多角形の頂点ではなかったとすると、辺は 3 増え、点は 2 増え、面は 1 増える。ので、やはりオイラー標数は変わらない。

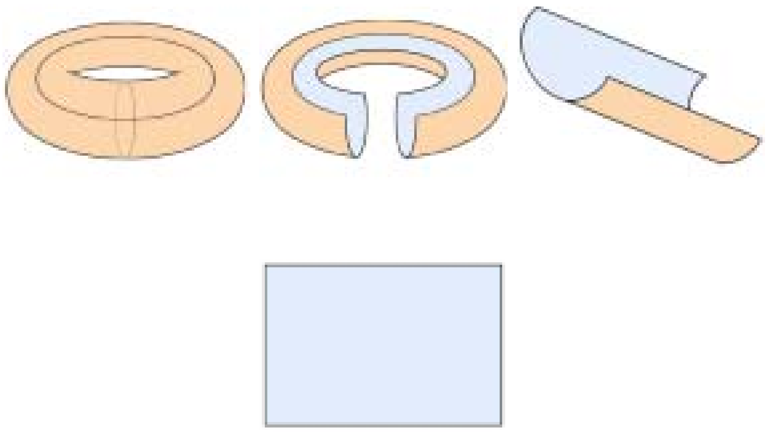


図 3: 種数 1 の曲線の展開

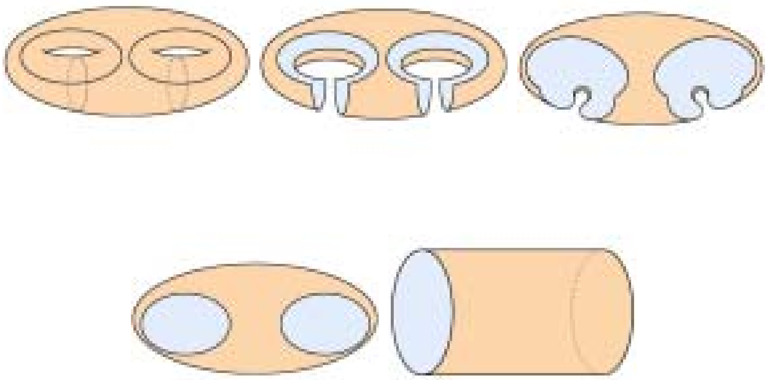


図 4: 種数 2 の曲面の展開、一個の多角形にするにはあと一本辺を足して切る必要あり

辺の片方の端点がもともとの多角形の頂点で、もう片方はもともと頂点でなかったとすると、辺は 2 増え、点は 1 増え、面は 1 増える。のでやっぱり変わらない。

次に、点を増やすことを考える。辺上に一点増やすと、辺も点も 1 ずつ増える。のでオイラー標数は変わらない。面の内部に一点だけ増やすのは、面が多角形にならないので無理。その点を含む多角形の辺に結ぶ辺が必要であり、この場合もオイラー標数は変わらない。

一般に、Δ_1, Δ_2 を二つの有限多角形分割とする。必要なら微小にずらして、Δ_1, Δ_2 を同時に Σ_g に描いて得られる分割が有限多角形分割 Δ_3 になるようにできる。（このあたりは、厳密に証明するのは結構面倒である。）Δ_1 から Δ_3 に至るには、辺や点をつぎつぎに付け足していけばできるから以下の左側の等式を得る。

$$\chi(\Sigma_g, \Delta_1) = \chi(\Sigma_g, \Delta_3) = \chi(\Sigma_g, \Delta_2)$$

右側の等式は、Δ_2 から Δ_3 を得るのに、辺をつけたして点を付け足すというのを繰り返して得られることによる。 □

注意 2.5. こんな説明のような証明は、厳密な数学ではない。この証明を厳密にすることは可能である。学術論文で、この程度の説明で終わっているものも多い。（こういうのが気になる人は、自分で調べてください。実は僕自身も気になるタイプです。）

2.3 不分岐被覆と分岐被覆

定義 2.6. X, Y を曲面とする。連続写像 $f : X \to Y$ が $P \in X$ で局所同型であるとは、P のある開近傍と $f(P)$ のある開近傍が f で同相となることである。

n を自然数とする。$P \in X$ で f が n 次の分岐をしているとは、P が内点であり、かつ開円板に同相な P の開近傍と $f(P)$ の開近傍がとれて、f が開円板から開円板への写像として

$$f : \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\} \to \{w \in \mathbb{C} | |w| < 1\}, \quad z \mapsto z^n$$

となるときを言う。n を f の P での分岐指数といい、e_P であらわす。極座標で書いたなら、

$$(r\cos\theta, r\sin\theta) \to (r^3\cos 3\theta, r^3\sin 3\theta)$$

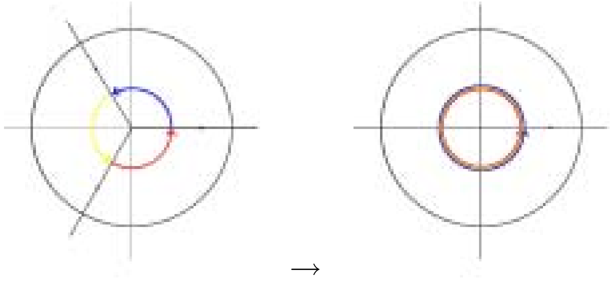


図 5: 3 次の分岐点の周辺

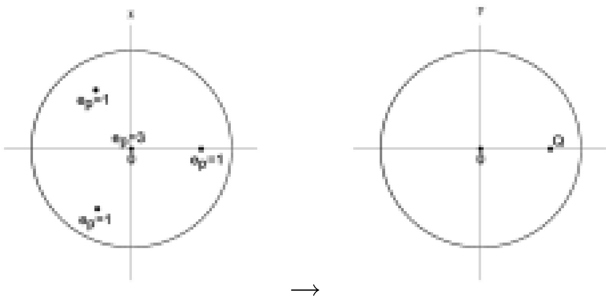


図 6: 3 次の分岐点の周辺:分岐指数

となる。 したがって、「1 次の分岐」ということと「局所同型」ということとは同値である。このとき、P を不分岐点という。

f が固有写像 (proper map) であるとは、任意のコンパクト集合の逆像がコンパクトであることをいう。例えば、先に現れた

$$\{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\} \to \{w \in \mathbb{C} | |w| < 1\}, \quad z \mapsto z^n$$

は固有写像である。が、左の円板から一点でも抜けるとコンパクトでない。

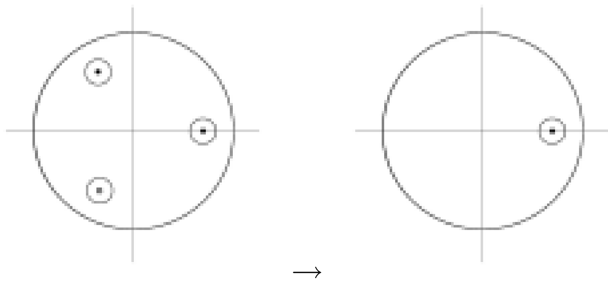


図 7: 3 次の分岐点の周辺：不分岐点の逆像は 3 点あるが、そのうち一点でも抜けると固有でない。閉円盤はコンパクトだが、閉円盤引く一点はコンパクトでないから。

有限個の分岐点以外はすべて局所同型であるような固有写像 $f : X \to Y$ を分岐被覆写像 (ramified covering map) といい、X は Y の分岐被覆であるという。

$Q \in Y$ が不分岐であるとは、$f^{-1}(Q)$ の各点が上の意味で不分岐であることを言う。

命題 2.7. $f : X \to Y$ を分岐被覆写像とする。このとき、任意の $Q \in Y$ に対して、

$$\sum_{P \in f^{-1}(Q)} e_P$$

は一定の数となる。この数を f の（被覆）次数 (covering degree) といい、$\deg(f)$ で表す。

証明. $Q \in Y$ を任意にとり、

$$n(Q) := \sum_{P \in f^{-1}(Q)} e_P$$

と定義すると、これはY上の関数である。これがY上の連続（局所定数という方がより精密）関数であることを言う。

まずQが不分岐点、すなわち全ての$P \in f^{-1}(Q)$で不分岐であるとする。各$P \in f^{-1}(Q)$の近傍でfが同相となるものをとり、そのYでの像の共通部分（有限個なので開集合）をとる。点Q'をこの範囲で動かすならば、それぞれのPの近傍に唯一つ対応点$\in f^{-1}(Q')$がある。

これで$n(Q)$がこの近傍上で定数関数であることが言えたかというとそれは甘い。まだ、次の可能性がある：「どんなに微小にQ'を動かしても、どのPの近傍にも入らないような$f^{-1}(Q')$の点がある。」しかし、このようなときはQに収束する点列Q'_nがとれて、対応するいやな点である$P'_n \in f^{-1}(Q'_n)$が収束しない。これは、fの固有性に反する。なぜなら、Qを中心とする閉円板をとったとき、その逆像内に部分列がどこにも収束しない点列がとれ、コンパクトでなくなるからである。

$f^{-1}(Q)$の中に分岐点Pがある場合を考える。このときにはPのfにおける像は1点だが、Pの近傍のP以外の点ではe_P対1の不分岐写像になっている。(局所的には$z \to z^{e_P}$と同相であり、$\mathbb{C}$は代数的に閉じているので$z^{e_P} = c$は$c \neq 0$ならちょうどe_P個の相異なる解を持つ。) ゆえに、Qを微小に動かしたときにPの近傍でのQの逆像はちょうどe_P個ある。したがって$n(Q) = \sum e_P$はQを微小に動かしてもかわらない。（固有性を使った上と同じ議論が必要となる。） $\square$

2.4 簡単 Riemann-Hurwitz 公式

定理 2.8. $f : X \to Y$を曲面の間の有限次分岐被覆写像とし、X, Yは有限多角形分割可能とする。このとき

$$(\deg f)(2 - 2g(Y)) = (2 - 2g(X)) + \sum_{P \in X: \text{分岐点}} (e_P - 1)$$

が成立する。

証明. Yの有限多角形分割を考える。ただし、分岐点は多角形の頂点になるようにとる。fによってYの有限多角形分割の逆像を考える。面、辺の上には分岐点がないのだから局所同型である。よってY上の一個の面のXにおける逆像は$\deg(f)$個の同型の面である。Y上の一つの辺の逆像は$\deg(f)$個の辺である。

点だけは事情が違う。もし分岐点がなければ、Y の点の数の $\deg(f)$ 倍が X の点の数になるはずだが、分岐点 P があるごとに $e_P - 1$ 個だけ点の数が少なくなってしまう。

よって、

$$\begin{aligned}&X \text{ の面の数} = \deg(f) \times Y \text{ の面の数}\\ &X \text{ の辺の数} = \deg(f) \times Y \text{ の辺の数}\\ &X \text{ の点の数} = \deg(f) \times Y \text{ の点の数} - \textstyle\sum_{P \in X}(e_P - 1)\end{aligned}$$

となる。交代和（符号をプラス、マイナス、プラスとした和）をとることにより

$$\chi(X) = \deg(f)\chi(Y) - \sum_{P \in X}(e_P - 1)$$

を得る。$\chi(X) = 2 - 2g(X)$, $\chi(Y) = 2 - 2g(Y)$ を代入して欲しい式を得る。 □

3 曲面としての代数曲線

定義 1.3 によれば、複素係数二変数多項式方程式 $f(x, y) = 0$ の複素解の集合複素代数曲線と呼ぶことにした。

我々は、これを実二次元の曲面としてみたい。

3.1 陰関数定理

定理 3.1. 複素二変数多項式 $f(x, y)$ を考える。$f(x_0, y_0) = 0$ を満たす点 $x_0, y_0 \in \mathbb{C}$ において $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ であるならば、この方程式はこの点の周りで複素正則な解 $y = y(x)$ を一意に持つ。すなわち $z = x_0$ のある近傍 U で定義された複素正則関数 $g(z)$ が存在して、$g(x_0) = y_0$ かつ任意の $z \in U$ に対し

$$f(z, g(z)) = 0$$

を満たす。このような解は U 上で唯一つである。

証明は、ここでは省く。

レポート問題 1. 上の定理を、次の二通りの方法のいずれか、または両方で証明せよ。

1. 微積分学・解析学の本で「陰関数定理」を調べ、それを適用する。
2. 形式べき級数環
$$\mathbb{C}[[z]] := \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\}$$
を考える。x 方向に平行移動することにより、$x_0 = 0$ としても一般性を失わない。上の定理で、$g(z)$ をこのべき級数環の中で解くことを考える。微分に関する条件により、a_n を $n = 0, 1, 2, \ldots$ とこの順序で決定していく漸化式が得られる。
こうして決まっていく a_n の増え方がせいぜい指数的(つまりある $C > 0$ により $\forall n \quad a_n < C^n$ となる)になることを示して収束半径が正である(つまり、収束べき級数である)ことを言う。

注意 3.2. 複素正則関数ということと収束半径が正のべき級数であることとは同値である。

後者の証明方法では、(収束半径を気にしなければ) 係数体 $\mathbb{C}$ がどんな体であっても問題なく適用でき、形式べき級数解が存在することがわかる。(前者の証明方法は $f(x, y)$ が多項式でなくても複素正則なら良いというメリットがあり、一長一短である)。

後者の方法を使うことで、任意の係数体上で非特異性や局所座標の概念を導入することができるのであるが、これについては可能なら後述する。

3.2 非特異点

非特異性は、次のように定義したい。

定義 3.3. (解析的定義)

複素平面代数曲線の点 $f(x, y) = 0$ の点 $P := (x_0, y_0)$ が非特異であるとは、その近傍が開円板 D と双正則同型であることである。すなわち、P の開近傍 U であって、U 上の正則関数 (すなわち $x - x_0, y - y_0$ の二変数収束べき級数)
$$h(x, y) : U \to D$$
と D 上の正則関数(すなわち下の k_x, k_y がいずれも収束べき級数)
$$k(z) := (k_x(z), k_y(z)) : D \to U$$
が存在して、互いに逆射になっていること。

このとき、$h : U \to D$ を点 P における（一つの）局所座標 (local coordinate) という。

つまり、U と D の間の一対一対応で、座標に関して正則な関数により与えられるものが存在する場合に正則という。（なお、k_x で k の x による偏微分を表す書物が多いが、ここではその記法はとらない。単に k の x 成分を表す。）

この講義では、以下のような通常の代数幾何で用いられる定義を採用する。

定義 3.4. 代数曲線 $f(x,y)=0$ が点 (x_0,y_0) で非特異であるとは

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \neq 0 \text{ または } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$$

を満たすことである。

定理 3.5. 定義 3.4 の条件を満たせば、定義 3.3 の条件が満たされる。すなわち、代数的な定義で非特異ならば、解析的な定義で非特異である。

証明. 陰関数定理 3.1 により $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$ であるならば、この方程式はこの点の周りで複素正則な解 $y=y(x)$ を一意に持つ。二つの対応

$$h : (x,y) \mapsto x, \quad k : x \to (x, g(x))$$

は U と D の間の双正則同型を与える。

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \neq 0$ の場合にも、x,y の対称性により同様の結果が得られる。 □

注意 3.6. 逆は成立しない。例えば、$f(x,y)=0$ が (x_0,y_0) で代数的に非特異（したがって解析的にも非特異）だったとする。

$$g(x,y) := f(x,y)^2$$

とおくと、$g(x,y)=0$ の定義する代数曲線と $f(x,y)=0$ の定義する代数曲線は、（解集合として）同じである。しかし、

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2f(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

であり、$f(x_0,y_0)=0$ であるから定義 3.4 を満たさない。

しかし、実はこのような異常な例（f に平方因子が含まれる場合）を除けば、両者の定義は一致する。

定義 3.7. 複素平面代数曲線 $f(x,y)=0$ が非特異であるとは、全ての点で非特異であること。

定理 3.5 により非特異平面代数曲線は、各点の近傍で開円板に同型であることがわかった。あとは連結性が示せれば定義 2.1 の意味での「境界を持たない曲面」であることがわかる。しかし、一般には連結とは限らない。例えば、

$$f(x,y)=x(x-1)$$

であればその開集合は $x=0,\ x=1$ という二つの離れた直線である。

4 代数曲線の射影化

4.1 コンパクト化の必要性

§1.4 に述べた方法でフェルマー予想の関数体類似を証明するには、代数曲線をコンパクト化しないとならない。なぜなら、最重要アイテムである Riemann-Hurwitz 公式 (定理 2.8) は有限個の（ふちを持つ）多角形に分割できる曲面にしか適用できず、したがってコンパクトな曲面にしか使えないからである。

実際、Riemann-Hurwitz 公式には分岐点の分岐指数があらわれている。$X\to Y$ をコンパクト曲面の分岐被覆としたとき、もし X から分岐点を一点でもとりのぞいたら、この等式はなりたたない。

このため、代数曲線をコンパクト化することと、有理射 $f:X\to Y$ を分岐被覆写像にのばすことが是非必要になる。それには、代数曲線を射影化し、必要なら非特異化すればいい。ここではまず射影化を扱う。

4.2 射影代数曲線

N 変数多項式 f が d 次斉次であるとは、それぞれの変数を 1 次と見たときに f の各単項がちょうど d 次であることである。ある d により d 次斉次であるとき、f を斉次多項式という。

定義 4.1. 定数でない複素 3 変数斉次多項式 $F(X,Y,Z)$（すなわち、X,Y,Z をそれぞれ 1 次と数えたとき、項が全て同じ次数）の零点の比の全体の集合

$$\{(X:Y:Z)|X,Y,Z\in\mathbb{C}^3-\{(0,0,0)\},\ F(X,Y,Z)=0\}$$

を F の定義する複素平面射影代数曲線といい、$V(F)$ であらわす。V は vanishing points(零点) の頭文字。

より一般に次の定義をする。

定義 4.2.

$$\{(X_0 : X_1 : \ldots : X_N) | X_i \in \mathbb{C}, \exists X_j \neq 0\} := \{(X_0, X_1, \ldots, X_N) \in \mathbb{C}^{N+1} - \{\mathbf{0}\}\}/\sim$$

を N 次元射影空間 (N-dimensional projective space) といい、$\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ で表す。ここに、$\sim$ は $\mathbb{C}^{N+1} - \{\mathbf{0}\}$ に定義された同値関係で、二つのベクトルが同値であることを他方が他の定数倍であることで定義する。この同値関係による、$(X_0, X_1, \ldots, X_N)$ が属する同値類を $(X_0 : X_1 : \cdots : X_N)$ と表すのである。

定数でない斉次多項式 $F(X_0, X_1, \ldots, X_N)$ の非自明零点 (すなわち $X_0 = X_1 = \cdots = X_N = 0$ 以外の零点) の集合は $\sim$ で閉じている。その比の集合 $\subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ を f が定義する射影超曲面といい、$V(F)$ で表す。

「超曲面」という呼び名は誤解を招きやすいかもしれない。単に、N 次元空間内の $N-1$ 次元の図形のことを慣習上超曲面という。

命題 4.3. 射影空間はコンパクトである。複素平面射影曲線もコンパクトである。

証明. そもそもどんな位相を射影空間に入れるのか。商位相である。と言ってもいい。同値な言い方に、単射

$$\Phi_0 : (X_1, \ldots, X_N) \in \mathbb{A}^N \mapsto (1 : X_1 : \ldots : X_N) \in \mathbb{P}^N$$

が $\mathbb{A}^N$ と $\mathbb{P}^N$ の部分集合との間の位相同型を与えるように位相を定める、といっても良い。(Φ_i も同様に定義しておく。)

コンパクト性は次のようにして証明できる。複素ベクトルの長さを通常通り

$$|(X_0, X_1, \ldots, X_N)| := \sqrt{\sum_i |X_i|^2}$$

と定義すると、これにより単位超球面から射影空間に全射準同型がある。

$$|(X_0, X_1, \ldots, X_N)| = 1 \mapsto (X_0 : X_1 : \cdots : X_N)$$

単位超球面は有界閉集合だからコンパクト。コンパクト集合の連続関数による像はコンパクト。ゆえに射影空間もコンパクト。

射影超曲面に対しては、単位超球面と F の零点との共通部分がコンパクト（コンパクト集合の閉部分集合だから）であることからコンパクト性が従う。 □

4.3 代数曲線の射影化

$$\Phi_0 : \mathbb{A}^N(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$$

の像の補集合は

$$\{(0 : X_1 : X_2 : \cdots : X_N) \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C})\}$$

なる閉部分集合であり、$\mathbb{P}^{N-1}(\mathbb{C})$ と同相である。像は

$$\{(1 : X_1 : X_2 : \cdots : X_N) \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C})\}$$

であり、$\mathbb{A}^N(\mathbb{C})$ と同相である。そこで、$\mathbb{A}^N(\mathbb{C})$ 内の図形 C を、$\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 内で閉包 $\overline{C}$ を取ることでコンパクト集合 $\overline{C}$ の一部とみなすことができる。

注意 4.4. このように、ある位相空間に小さなものを補って、コンパクトな位相空間とすることをコンパクト化という。

代数多様体の場合には、閉包をとるよりも多項式の斉次化をとるほうがやさしい。

定義 4.5. N 変数多項式 $f(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ の斉次化 F とは、

$$F(X_0, X_1, \ldots, X_N) := X_0^d f(\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_N}{X_0})$$

のことである。ここで d は f の次数 ($X_1, \ldots, X_N$ を全て 1 次だと思っての次数である。F は $N+1$ 変数 d 次斉次式となる。

命題 4.6. f を N 変数多項式とし、F をその斉次化とする。

$$\Phi_0 : \mathbb{A}^N(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$$

を制限することにより

$$\Phi_0 : V(f) \to V(F) \cap \mathbb{A}^N(\mathbb{C}) \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$$

なる位相同型ができる。

ここで、$V(f)$ は f の解（零点ともいう）の集合。

証明. $\Phi_0 : (x_1, \ldots, x_N) \mapsto (1 : x_1 : \cdots : x_N)$ は、f の零点を F の零点に移す。F の零点で $(1 : \cdots)$ の形のものに限れば、逆射が与えられる。それぞれ連続写像である。 □

これにより、$V(f)$ から $V(F)$ を考えるということによって代数曲線のコンパクト化ができる。これを射影化という。

4.4 射影代数曲線の有理射、代数射

曲線の場合を一般化して、次の定義をする。

定義 4.7. $f_1(X_1, \ldots, X_N), f_2(X_1, \ldots, X_N), \ldots, f_n(X_1, \ldots, X_N)$ を複素係数 N 変数多項式の集合とする。これらの零点として定義されるアファイン代数的集合とは

$$V(f_1, f_2, \ldots, f_n) := \{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{C}^N | f_i(x_1, \ldots, x_N) = 0 (\forall i = 0, \ldots, n)\}$$

のことである。$X_1, \ldots, X_N$ は $V(f_1, \ldots, f_n)$ 上の関数となる。これらを座標関数と呼ぶ。

アファイン代数的集合 X から Y への代数射とは、座標関数の有理式でかける写像（すなわち、X の座標の有理式として Y の座標が与えられるもの）であっていたるところ定義されているもの。有理射とは、X の稠密な開集合で定義されているもの。

定義 4.8. 複素射影代数的集合 X とは、いくつかの複素係数斉次 $N+1$ 変数多項式の共通零点としてあらわされる $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ の部分集合のこと。

$\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ は $\mathbb{A}^N(\mathbb{C})$ の $N+1$ 個により覆われる。それぞれの $\mathbb{A}^N(\mathbb{C})$ と X の共通部分はアファイン代数的集合である。

射影代数的集合 X から射影代数的集合 Y への代数射とは、それぞれを $\mathbb{A}^N(\mathbb{C})$ に制限してアファイン代数的集合とみなしたときに有理射となるようないたるところ定義された関数のこと。X の稠密な開集合で定義されているだけのときには有理射という。

定理 4.9. 非特異代数曲線 X から射影代数的集合 Y への有理射は、代数射に一意に伸びる。すなわち、X 上いたるところ定義される。

この定理の条件について検討してみよう。まず、Y が射影的でないと、このようなことは起きない。例えば X から X への恒等写像を考え、行き先の X から一点除くとこれは有理射だが代数射にはなりえない。

次に、この定理の証明の概略を述べる。$f : X \to Y$ が有理射であったとし、X のある点 P で定義されていないとする。P を含む $Y \subset \mathbb{A}^N(\mathbb{C}) \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ をとる。f は有理射だから

$$f : x \mapsto (g_1(x)/h(x), \ldots, g_N(x)/h(x))$$

の形をしている。これを $\mathbb{P}^N$ への射とするには、

$$F : x \mapsto (h(x) : g_1(x) : \cdots : g_N(x))$$

とすればよい。のだが、$h(x) = 0 = g_1(x) = \cdots = g_N(x)$ なる点があると、この点ではこのままでは定義されない。

そして、実際定義不可能なことがある（次の例）。

例 4.10. X の「次元」が一次元であることは必要である。$X = \mathbb{A}^2, Y = \mathbb{P}^1$ とし、

$$f : X \to Y, \quad (x, y) \mapsto (x : y)$$

を考える。これは、$X - \{(0, 0)\}$ ではいたるところ定義されており代数射である。しかし、原点では定義できない。なぜなら、$(0, 0)$ に収束する点列 (x_n, y_n) を考えたとき、もし f が原点でも定義できるならば $f(x_n, y_n) = (x_n : y_n)$ も一点に収束しなくてはならないが、この比はいかようにも変えられるので矛盾である。

例 4.11. 複素平面代数曲線 $C : f(x, y) = y^2 - x^3 = 0$ を考える。その射影化は $Y^2Z - X^3 = 0$ である。代数射

$$h : \mathbb{A}^1(\mathbb{C}) \to C, \quad t \to (t^3, t^2)$$

を考える。その逆射に極めて近い有理射が

$$g : C \to \mathbb{A}^1(\mathbb{C}), \quad (x, y) \to y/x$$

である。ちょっと計算すれば、h と g は

$$\mathbb{A}^1(\mathbb{C}) - \{(0, 0)\} \cong C - \{(0, 0)\}$$

なる互いに逆射である代数射の組となっている。これらは同型な代数曲線と考えられる。

しかるに、g は決して原点にまで代数射としては伸びない。いま仮にのびたとしよう。

C 上では $y^2 = x^3$ だから、y^2 があれば x^3 に置き換えることによって C 上の関数としては任意の多項式が y の一次式と思ってよい。

$$g(x, y) = a(x, y)/b(x, y)$$

とあらわせたとする。分母は y の一次式だが、有理化 $(y + a(x))(y - a(x))$ を行うことにより x だけの式と思ってよい。よって

$$g(x, y) = (a(x)y + b(x))/c(x)$$

と考えてよい。連続性から原点は原点に行く。よって

$$g \circ h(t) = t$$

である。すなわち

$$(a(t^2)t^3 + b(t^2))/c(t^2) = t, \quad a(t^2)t^3 + b(t^2) = tc(t^2).$$

偶数次の項と奇数次の項に分けて考えることにより

$$b(t^2) = 0, a(t^2)t^3 = c(t^2)t$$

g を表す式を既約分数式にしたとするならば、定数倍をのぞけば $a(t^2) = 1, c(t^2) = t^2$ でなければならない。つまり $g(x, y) = y/x$ となる。これは原点で定義されない。

しかし、X が非特異代数曲線なら大丈夫なのである。

$P \in X$ において $f : X \to Y$ が未定義とする。「P の近傍で定義された代数射とは何か」という基本的な定義を行う。

定義 4.12. K を体とする。$f_1(x_1, \ldots, x_N), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_N)$ を K 係数 N 変数多項式とする。

V をアファイン代数的集合

$$V := V(f_1, \ldots, f_n) \subset \mathbb{A}^N$$

とする。V 上の正則関数の環 $\mathcal{O}(V)$ を

$$\mathcal{O}(V) := K[x_1, x_2, \ldots, x_N]/(f_1, \ldots, f_n)$$

で定義する。

これは、V から $\mathbb{A}^1$ への代数射とほぼ同一視できる。

ちなみに O は、order (整) から来ている。整数の整であり、分母を持たないという意味である。

この定義は、「V 上の代数的な関数とは、$x_1, \dots, x_N$ の多項式であらわされる関数である。その中で、$f_1, \dots, f_n$ はV上0なんだから、それらをつぶして考えれば関数があらわれる」という考えに基づく。

ただし、「ほぼ」同一視できるといったように、実際にはいくつか問題がある。K が有限体 $\mathbb{F}_p$ であるような場合には、多項式 $x(x-1)(x-2)\dots(x-(p-1))$ は $\mathbb{A}^1$ 上の定数関数 0 を与える。また、$V(f) = V(f^2)$ であるから、f が定義する代数的集合と f^2 が定義する代数的集合は同じであるのにそれ上の関数の環が異なる、という異常事態が発生する。

これらを避けるために、「代数的集合」という概念から「環そのものを扱う、スキーム論」への移行が必要となる。が、ここではそれをさらりととばして先に進む。

次に、P の近傍で定義された正則関数の環、を考える。これは、P のある近傍で定義されていればいい。今我々は有理関数、すなわち多項式の分数で表される関数しか考えない（その立場を代数幾何という、といってもいい）のであるから、これは「P に極を持たない有理関数」といってもいい。

極を定義するには零点を定義しないとならない。

定義 4.13. $f \in \mathcal{O}(V)$ が $P \in V$ で値 0 を取るとき、「f は P を零点に持つ」という。

$V = \mathbb{A}^N$, $f \in K[x_1, \dots, x_N]$, $P = (p_1, \dots, p_N)$ とする。このとき、極大イデアル

$$m_P := (x_1 - p_1, x_2 - p_2, \dots, x_N - p_N) \subset K[x_1, \dots, x_N]$$

を用いれば $f(p_1, \dots, p_N)$ とは

$$f(x_1, \dots, x_N) \mod m_P \in K[x_1, \dots, x_N]/m_P \cong K$$

に他ならない。これは、 $\mod (x_1 - p_1)$ で多項式を見ることは「割った余り」をとることであり、剰余定理によりその余りは x に p_1 を代入することで得られる。ということからの帰結である。

より一般にアファイン代数的集合 $V(I)$（ここで I は $f_1, \dots, f_n$ が生成する $K[x_1, \dots, x_N]$ のイデアル）があったとき、$P \in V(I)$ と $f_1(P) = \dots = f_n(P) = 0$ は同値である。これは $f_1, \dots, f_n \in m_P$、すなわち $I \subset m_P$ に他ならない。

定義 4.14. アファイン代数的集合 $V := V(I)$ の元であって $P \in V$ に零点を持つような正則関数の集合を

$$m_{X,P} \subset \mathcal{O}(V) := K[x_1, \dots, x_N]/I$$

で表す。これは $\mathcal{O}(V)$ の極大イデアルになる。
　実際、

$$m_{X,P} = (x_1 - p_1, x_2 - p_2, \dots, x_N - p_N)/I \subset \mathcal{O}(V)$$

であり、$\mathcal{O}(V)/m_{X,P} \cong K$ である。

定義 4.15. $X = V(I)$ とし、$P \in X$ とする。点 P の近傍での正則関数の芽の集合を

$$\mathcal{O}_{X,P} := \{g/h | g, h \in \mathcal{O}(X), h \notin m_{X,P}\}$$

で定義する。これを、X 上の P の近傍で定義された正則関数のなす局所環という。

　上の定義で、g/h とは何かを正確に定義しないとならない。これは、可換環の言葉で言うと $\mathcal{O}(X)$ において $\mathcal{O}(X) - m_{X,P}$ を可逆化して得られる局所化という操作である。ここでは深入りしないが、定義くらいは述べておこう。

定義 4.16. R を可換環、$S \subset R$ を積について閉じた部分集合（すなわち積に関する部分半群）とする。

$$R[S^{-1}] := \{(r, s) | r \in R, s \in S\}/\sim$$

とおく。ここで $\sim$ は「通分して、S の元を掛けると一致する」という同値関係を表す。すなわち

$$(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2) \Leftrightarrow \exists s \in S, r_1 s_2 s = r_2 s_1 s$$

　R が整域ということと、$R - \{0\}$ が部分半群であることとは同値。このとき $R((R - \{0\})^{-1})$ を R の商体という。

　さて、次の定理が成立する。

定理 4.17. X が代数曲線で $P \in X$ がその非特異点とする。このとき $\mathcal{O}_{X,P}$ は離散付値環 (discrete valuation ring, DVR) である。すなわち、ある $t \in \mathcal{O}_{X,P}$ が存在し、任意の 0 でない $x \in \mathcal{O}_{X,P}$ がただ一通りに

$$x = ut^n, \quad u \in \mathcal{O}_{X,P}^{\times}, n \in \mathbb{N}$$

と書ける（$n = 0$ も自然数とする)。

これを使えば、次がいえる。

定理 4.18. X が代数曲線で $P \in X$ がその非特異点とする。Y を射影的代数的集合とする。$f : X \to Y$ を有理射とすると、f は P 上でも定義される。

証明. X は $N+1$ 個の $\mathbb{A}^N$ で覆えている。P を含むものをとることにより、$P \in X' := X \cap \mathbb{A}^N$ としてよい。$\mathbb{A}^N$ の N 個の座標関数 $(x_1, \ldots, x_N)$ をとり、Y の方も $\mathbb{A}^M$ の座標関数をとることにより

$$f : X \to Y$$

は

$$f : (x_1, \ldots, x_N) \mapsto (g_1(x)/h(x), \ldots, g_M(x)/h(x))$$

の形をしているとしてよい。ここに、$g_1, \ldots, g_N, h(x)$ と書いているが、本当は $h(x_1, \ldots, x_N)$ のような N 変数多項式である。

$$g_i(x), h(x) \in K[x_1, \ldots, x_N]/I \to \mathcal{O}_{X,P}$$

による像を再び $g_i(x), h(x)$ であらわす。

Y においては $\mathbb{A}^N \to \mathbb{P}^N$ により

$$(g_1(x)/h(x), \ldots, g_M(x)/h(x)) \mapsto (h(x) : g_1(x) : \cdots : g_M(x))$$

である。ここで前定理を用いると、$t \in \mathcal{O}_{X,P}$ により

$$g_i(x) = t^{n_i} u_i(x), \quad u_i \in \mathcal{O}_{X,P}^{\times}$$

とあらわされるか、もしくは $g_i(x) = 0$ である。$g_0(x) := h(x)$ とおけば、上のことは $i = 0$ でも正しい。g_i が全てゼロだということはない。ので、ゼロでない g_i のうち n_i が一番小さくなるものをとり g_j と書く。

$$(g_0 = h(x) : g_1(x) : \cdots : g_M(x))$$

の比を t^{n_j} で一斉に割ると、$g_j(x) \in \mathcal{O}_{X,P}^{\times}$ で、ほかはみな $\in \mathcal{O}_{X,P}$ となる。これは、$g_j(P) \neq 0$, すなわち上の比が $x = P$ において定義されていることを示している。

よって、f は有理式で書かれて P で定義された関数に伸びた。 □

定理 4.17 の証明は結構長いので、講義しないかも知れない。とりあえず後回しにする。

5 種数の計算

5.1 フェルマー曲線の射影化

命題 5.1. フェルマー曲線の射影化は非特異である。

証明. $\mathbb{A}^2 \to \mathbb{P}^2$ を考える。射影化する前非特異であることは

$$x^n + y^n - 1$$

を偏微分したらわかる。特異点であるためには偏微分が両方消えていなくてはならず、$(x, y) = (0, 0)$ しかそのような点は存在しないが、これは曲線 F_n 上に載っていないからである。

さて、射影化すると

$$X^n + Y^n - Z^n$$

である。そして、射影化したせいで付け加わったものは $(X : Y : Z) = (X : Y : 0)$ となるような点の全体である。すなわち $X^n + Y^n = 0$ を解けばよく、それは X について正規化すれば

$$(1 : \zeta : 0), \quad \zeta \quad \text{は} -1 \text{の} \ n \ \text{乗根}$$

の n 点である。これらの点で非特異であるかどうかは別の座標をとってやらなくてはいけないが、$(1 : Y : Z)$ なる座標をとればよい。フェルマー曲線の射影化をここに制限すると

$$1 + Y^n - Z^n$$

となり、これも偏微分してやればどこにも特異点がないことがわかる。 □

5.2 フェルマー曲線の種数

今後は、射影非特異曲線

$$X^n + Y^n - Z^n = 0$$

をフェルマー曲線 F_n と呼ぶことにする。これの種数を計算しよう。

$$f : F_n \to \mathbb{P}^1, \quad (X : Y : Z) \mapsto (X : Z)$$

なる写像を考えると well-defined であり、有理射である。というのも、$\mathbb{P}^1$ を二つの $\mathbb{A}^1$ で覆ったとき、$(X : Z)$ の座標はそれぞれ X/Z, Z/X という有理式だからである。

さらに、これは代数射でもある。未定義になりえる点は $X = Y = 0$ だが、そのような点は F_n 上に存在しない ($Z = 0$ となってしまう）からである。

f の被覆次数を求めよう。今 $(X : Y)$ を決めたとき、$(X : Y : Z)$ がいくつあるかが問題である。が、例えば $(1 : Y)$ の f による逆像の個数は、一般には Z の次数である n である。ゆえに被覆次数は n。

次に、分岐について考える。アファインフェルマー曲線で考えよう。すると上の f は単に $x^n + y^n - 1$ 上の点 (x, y) を x に送る写像である。$x^n + y^n - 1$ 上の点 (a, b) において、$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$ な点では $x - a(= X/Z - a)$ が F_n の局所座標を与えるのであった。このとき、F_n の点 (a, b) の近傍で、関数 $x - a$ は $\mathbb{P}^1$ への局所同型を与える。ゆえに、$f = x$ はこのような点では不分岐である。

そうしてみると、アファインフェルマー曲線で分岐しうる点は $nb^{n-1} = 0$ を満たす点、すなわち $(a, 0)$ の形の点のみである。このような点で F_n に乗っている点は、

$$\{(\zeta, 0) | \zeta \text{は} 1 \text{の} n \text{乗根}\}$$

である。これらの点での分岐指数を計算しよう。このような点の f による像は ζ であるが、その逆像は $\zeta^n + y^n = 1$ となるような (ζ, y) である。それは $y = 0$ しかない。よって、一般には $n : 1$ のものが $1 : 1$ になっているので、分岐指数は n である。

射影化して付け加わった点、すなわち $(X : Y : 0)$ となる F_n 上の点は、上で見たように $(1 : \zeta : 0)$ となる。この点では X/Z は定義されていない。実際、

$$f : F_n \to \mathbb{P}^1$$

による像は $(1:0)$ という無限遠点になっている。

こういう点では、$\mathbb{P}^1$ を覆う $\mathbb{A}^1$ として $(1:Y)$ の方をとらないとならない。このとき、関数 f は $(1,y,z)\mapsto z$ となる。（X/Z の代わりに Z/X をとることになるから。）

方程式で書くと $1+y^n-z^n$ の零点集合から、z をとるという写像である。これが不分岐であるには y による偏微分が消えなければ良いが、y による偏微分が消えるところでは $y=0$ であり、$z=0$ とはならないので射影化で付け加わった点では不分岐である。

Riemann-Hurwitz の定理によれば、この時

$$(2-2g(X))=\deg(f)(2-2g(Y))-\sum_{P\in X}(n-1)$$

が成立する。右辺の P は、n 個の点を走っていた。$g(Y)=0$ も代入して

$$2-2g(X)=\deg(f)\cdot 2-n(n-1)=-n^2+3n$$

これより

$$g(X)=(n-1)(n-2)/2$$

を得る。

これで、「関数体版フェルマー予想」は証明された。

問題 5.2. 一般に、n 次非特異射影平面代数曲線の種数は $(n-1)(n-2)/2$ である。これを証明せよ。

（本を探したほうがいいかも。）

参考文献

[1] 田村一郎「トポロジー」岩波全書２７６