代数学 A(2006 年度前期, 7 月 21 日）期末試験問題（松本 眞）

注：途中の計算を**絶対に**消さないこと。途中の計算がないものは**採点できません。**答案用紙が足りない人は、裏を使うことを断わった上で、裏に書いてください。

問題１. 和と積が定義されている集合で、

- **A:** 定義されているが環にならない
- **B:** 環だが可換環でない
- **C:** 可換環だが整域でない
- **D:** 整域だが体でない
- **E:** 体である

という性質をもつものを、それぞれ一つずつ回答せよ。
（なるべく簡単な例を挙げ、ごくごく簡単な説明を添えよ。添えてないものは 0 点。）

問題２.

(1) $\mathbb{Z}$ において単項イデアル (3) は素イデアルかどうか、定義に基づいて判定せよ。
(2) 多項式環 $\mathbb{R}[t]$ において単項イデアル (x^2+1) は極大イデアルかどうか証明つきで判定せよ。

問題３. R を単位的可換環とする。

(1) $f : R \to R$ を R 加群準同型とする。$r \in R$ に対し
$$f(r) = rf(1)$$
が成立することを示せ。
(2) R^n で R の n 個の直積を表わす。その元は縦ベクトルの形に書くとする。$g : R^n \to R^m$ を R 加群順同型とする。このとき、ある $(m \times n)$ 行列 $M_g \in M_{m,n}(R)$ が存在して、
$$g(x) = M_g x$$
が成立することを示せ。ここに、右辺は行列とベクトルの積である。
(3) R を整域とする。g が同型であるためには、$n = m$ が必要条件であることを示せ。

問題４. $R := \mathbb{Z}[\sqrt{-1}] := \{x + y\sqrt{-1} | x, y \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ とおく。

(1) R の積に関する可逆元の集合 $R^\times$ を求めよ。
(2) R が単項イデアル整域であることを示せ。
(3) R において、5, 13, 17, 29 は素元でないことを示せ。
(4) （難）$\mathbb{Z}$ における奇素数 p が、R においては素元でないための必要十分条件は $p \equiv 1 \mod 4$ であることを示せ。ただし、中間試験で示したように、
「p が R で素元でない $\Leftrightarrow p = x^2 + y^2$ に整数解がある」
という事実は証明抜きで用いてもよい。

問題５. 授業などへの感想、要望を述べよ。

半年間お疲れ様でした。