数理解析学 A・数理解析基礎講義 A　演習問題　No.1　　（2024.4.9 出題）

演習問題は http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~takimoto/R6SuurikaisekiA.html にも置いてあります.

以下の問題は自習用の演習問題ですが，演習問題のいくつかを後日レポート問題に指定するかもしれません.

[1] X を $\mathbb{C}$ 上の線形空間とするとき，次を示せ.

(1) 「任意の $u \in X$ に対して $u + \theta = u$」を満たす $\theta \in X$ はただ一つである.
（この θ を X の**零元**と呼ぶ．以下 θ を 0 と表記する.）

(2) 任意の $u \in X$ に対して，$u + u' = 0$ を満たす $u' \in X$ はただ一つである.
（この u' を u の**逆元**と呼ぶ．以下 u' を $-u$ と表記する.）

(3) $\alpha \in \mathbb{C}, u \in X \Longrightarrow (-\alpha)u = -(\alpha u)$.

(4) 任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し $\alpha 0 = 0$. （0 は X の零元）

(5) 任意の $u \in X$ に対し $0u = 0$. （左辺の 0 は $\mathbb{C}$ の元としての 0，右辺の 0 は X の零元）

(6) $\alpha \in \mathbb{C}, u \in X$ に対し，$\alpha u = 0$ ならば「$\alpha = 0$ または $u = 0$」.

[2] $X = \{(a_n)_{n=1}^{\infty} \mid a_n \in \mathbb{C}\ (\forall n \in \mathbb{N})$ かつ $\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在する $\}$ とする（即ち，X は収束する複素数列全体）．$(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty} \in X$, $c \in \mathbb{C}$ に対し，X における和とスカラー積を

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} + (b_n)_{n=1}^{\infty} = (a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}, \qquad c(a_n)_{n=1}^{\infty} = (ca_n)_{n=1}^{\infty}$$

と定義する.

(1) X は $\mathbb{C}$ 上の線形空間であることを示せ.
（ほとんどが自明であるわけですが，ちゃんと確かめなきゃいけないことは何？）

(2) X の零元は何か？ （答だけで良い）

(3) X の次元を答えよ.

[3] $n \in \mathbb{N}$ とする．線形空間 X に対して，次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i) $\dim X = n$.

(ii) 一次独立な n 個の X の元 $u_1, u_2, \ldots, u_n$ が存在して，任意の $u \in X$ は $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C})$ の形に<u>一意的に</u>表すことができる.

[4] X を線形空間，S を X の空でない部分集合とする．M を，S の有限個の元の一次結合全体からなる集合，即ち

$$M = \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m \mid m \in \mathbb{N},\ \alpha_k \in \mathbb{C},\ u_k \in S\ (k = 1, \ldots, m)\}$$

とおく．このとき，M は S を含む最小の部分空間であることを示せ[1].

（ヒント：示すべきことは次の三つです：
- M は X の部分空間.　　• $M \supset S$.
- N が S を含む部分空間であるならば $N \supset M$ である.）

（裏に続く）

[1] この M を **S が生成する部分空間**，または **S が張る部分空間**と呼びます.

[5] $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間，$(u_n), (v_n) \subset X$, $u, v \in X$, $(\alpha_n) \subset \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ とする．次を示せ．

(1) $u_n \to u,\ v_n \to v\ (n \to \infty) \implies u_n + v_n \to u + v\ (n \to \infty)$.

(2) $\alpha_n \to \alpha,\ u_n \to u\ (n \to \infty) \implies \alpha_n u_n \to \alpha u\ (n \to \infty)$.

[6] $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{C}^N$ に対して

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_N|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_N|^2}, \quad \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_N|\}$$

と定義する．

(1) $\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_2$ が同値なノルムであることを示せ．（ヒント：Cauchy-Schwarz の不等式）

(2) $\|\cdot\|_2$ と $\|\cdot\|_\infty$ が同値なノルムであることを示せ．

[7] X を線形空間，$|\cdot|, \|\cdot\|, |||\cdot|||$ を X 上のノルムとする．もし $|\cdot|$ と $\|\cdot\|$ が同値，かつ $\|\cdot\|$ と $|||\cdot|||$ が同値ならば，$|\cdot|$ と $|||\cdot|||$ も同値であることを示せ．

（線形空間 X 上のノルム同士が「同値である」という関係は，同値関係であることが示される[2]）

[8] 複素係数の多項式全体の集合を P とする（講義の記号を使えば $P := \bigcup_{N=1}^{\infty} P_N$）．いま，$f \in P$ が $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$ $(k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C})$ と表されたとき，

$$\|f\| = |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_k|, \qquad |||f||| = \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_k|\}$$

と定義する．

(1) $\|\cdot\|$ と $|||\cdot|||$ はともに P 上のノルムであることを示せ．

(2) $\|\cdot\|$ と $|||\cdot|||$ は**同値ではない**ことを示せ．

[2] まあ，文字通りではあるのですが，当然証明は必要なわけです．