# 2004 年度幾何学 A　　担当：田丸

## 0　幾何学 A について

今年度の幾何学 A および同演習では曲線や曲面を扱います．曲線や曲面は目で見ることが出来ますし，身の回りにいくらでもあります．最近ではコンピュータを使って簡単に曲面の絵を描くことができます．しかし，この講義では，単に絵を描ければ良しではなく，

　　曲線や曲面を「数学的に」扱うことを目標とします．

数学的に扱うことによって，曲線や曲面に関する様々な問題や疑問の解決が可能になります．例えば，道路をどこに設置するかというのは平面曲線の問題です（高低差も考慮すれば空間曲線ですが）．地球の表面は大雑把に言って球面ですし，地図を作成することは球面から平面への写像を構成することです．シャボン玉が丸くなるのにも，マンホールの蓋が円形であることにも数学的な理由があります．また，まだ未解決の問題もいくつもあります．

講義のテキストおよび参考書として以下のものを指定します:

　　教科書：「曲線と曲面」（梅原雅顕・山田光太郎 共著，裳華房）

　　参考書：「多様体」（荻上紘一 著，共立出版）

もちろん購入を強制するものではありませんが，どちらも非常に良い本ですので，この講義の履修が終わった後でも参考になるかも知れません．ちなみに講義は教科書に完璧に沿って行われる訳ではありません．

成績の評価基準は唯一つ，「曲線と曲面を数学的に扱うことが出来るかどうか」．それを確かめる為に試験およびレポートを課す予定です．数学的に扱うとはどういうことか，は一言では説明できません．むしろそれが，これから半年間の講義に出席して（あるいは自力で本を読んで）理解して欲しいところです．

講義中に何か質問・コメント等がありましたら，遠慮無く言って下さい．むしろ言ってくれると助かります．講義時間以外でも遠慮無くどうぞ．下記のアドレスに e-mail を送るなり研究室に来るなりして適当に捕まえて下さい．こちらからのテスト・レポート・休講等の連絡は，基本的に授業時間中に全て伝えます．また，各種お知らせ及びプリント等の公開を下記の web page で行う予定です．

田丸 博士（たまる ひろし）
研究室：理学部 C-613
e-mail：tamaru @ math.sci.hiroshima-u.ac.jp
url：http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~tamaru/index-j.html

# 1　曲線

まずは曲線について, より正確に言うと平面曲線と空間曲線について考えます. 全体の見通しを良くする為, 何を調べるかをまずまとめておきます.

(1) 平面曲線とは何か（定義）

「$y = f(x)$ のグラフ」は平面曲線の重要な例ですが, それだけとは限りません. 円周 $x^2 + y^2 = 1$ なども平面曲線ですし, そのような簡単な形では表せない曲線もたくさんあります. しかし, どこまでが平面曲線なのでしょうか. 交点を持っていても曲線？　尖っている点があっても曲線？　$xy = 0$ をみたす点の全体は曲線？

(2) 平面曲線の概形を書く

「$y = f(x)$ のグラフを書け」という問題は高校でもお馴染みです（微分して増減表を書くと概形が分かるのでした）. では, 2 変数関数のグラフ $F(x, y) = 0$ を書くにはどうすれば良いでしょうか（これは解析学でやったかも知れませんが）. もっと複雑な形の曲線の概形を書くには？

(3) 平面曲線の曲がり具合を調べる（曲率）

平面曲線の形をより詳しく調べる為, 曲線の曲がり具合を表す量（曲率）を定義します. 例えば $y = x^2$ のグラフで, 曲がり方が一番大きいのはどこでしょうか（明らかに原点が一番曲がっているように見えますが, どうやって確かめれば良いでしょうか）. また, 道路などで見かける「$R = 400m$」と言う標識は道路の曲がり具合を表していますが, これは曲率を別の方法で表したものです.

(4) 与えられた性質を持つ平面曲線の構成

これまでは与えられた平面曲線を調べていましたが, ここでは「ある条件をみたす曲線を作る」という問題を考えます. 全ての点で曲がり具合が同じ曲線を作れ, 幅がどこでも一定な曲線を作れ（定幅曲線）, 与えられた曲率をもつような曲線を作れ, 等々. 例えば, 高速道路の出入口付近の道の形は, ハンドル操作が自然になるような形をしています（ハンドルを徐々に切って徐々に戻せば良いようになっています, 数学的に言うと, 曲率が徐々に大きくなって徐々に小さくなるような曲線）. そのような曲線を式で表せるでしょうか.

(5) 空間曲線

平面曲線を一般化して, 空間曲線（すなわち $\mathbb{R}^3$ の中の曲線）を考えます. 空間曲線に関しても, 平面曲線と殆ど同様のことを調べていきます. 定義は何か, 曲がり具合を表す量を定義せよ, 与えられた曲率を持つ空間曲線を作れ, 等々.

## 1.1 平面曲線の定義

$I$ を $\mathbb{R}$ の区間とする. $I$ は開区間や閉区間の場合もあれば $\mathbb{R}$ そのものの場合もある.

**定義 1.1.1** $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ を連続写像とする. $\gamma$ またはその像 $\gamma(I)$ が**なめらかな平面曲線**であるとは, 次を満たすこと:

$$(1)\ \ \gamma \text{ は } C^\infty\text{-級}, \quad (2)\ \ \forall t \in I,\ \frac{dc}{dt}(t) \neq (0,0).$$

また, $\gamma$ またはその像 $\gamma(I)$ が**区分的になめらかな平面曲線**であるとは, 次を満たすこと:

$$(1)\ \ \gamma \text{ は 区分的に } C^\infty\text{-級}, \quad (2)\ \ \forall t \in I, \gamma \text{ が } t \text{ で微分可能ならば } \frac{dc}{dt}(t) \neq (0,0).$$

平面曲線 $\gamma(I)$ に対して関数 $\gamma$ を**助変数表示**または**パラメータ表示**と呼ぶ. 助変数表示は一意ではない.

**定義 1.1.2** $C^\infty$-級関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に対し, 集合 $\{(x, f(x)) \mid x \in I\}$ を $y = f(x)$ **のグラフ**と呼ぶ. また, 集合 $\{(f(y), y) \mid y \in I\}$ を $x = f(y)$ **のグラフ**と呼ぶ.

**命題 1.1.3** $C^\infty$-級関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に対し, $y = f(x)$ のグラフおよび $x = f(y)$ のグラフはなめらかな平面曲線.

平面曲線に対し, $y = f(x)$ のような表示を**陽関数表示**といい, $F(x,y) = 0$ のような表示を**陰関数表示**という. 一般に $F(x,y) = 0$ で表された図形は平面曲線であるとは限らない.

**定理 1.1.4 (陰関数定理)** $C^\infty$-級関数 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対し, $F(x,y) = 0$ で表される図形とその上の点 $(x_0, y_0)$ を考える.

(1) $\frac{\partial}{\partial x}F(x_0,y_0) \neq 0$ なら $F(x,y) = 0$ は $(x_0,y_0)$ の近傍で $x = f(y)$ のグラフで書ける, i.e., $\exists U : (x_0,y_0)$ の近傍, $\exists f : I \to \mathbb{R} : C^\infty$ s.t. $\forall (x,y) \in U$, $F(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = f(y)$.

(2) $\frac{\partial}{\partial y}F(x_0,y_0) \neq 0$ なら $F(x,y) = 0$ は $(x_0,y_0)$ の近傍で $y = f(x)$ のグラフで書ける.

$F(x,y) = 0$ は $(\frac{\partial}{\partial x}F(x_0,y_0), \frac{\partial}{\partial x}F(x_0,y_0)) \neq (0,0)$ を満たす点の近傍では関数のグラフで表せる, すなわちなめらかな平面曲線である. $(\frac{\partial}{\partial x}F(x_0,y_0), \frac{\partial}{\partial x}F(x_0,y_0)) = (0,0)$ を満たす点 $(x_0,y_0)$ のことを**特異点**と呼ぶ.

## 1.2 平面曲線の概形

我々は $y = f(x)$ や $x = f(y)$ のグラフの概形を書く方法を知っている. $F(x,y) = 0$ の概形は, 陰関数定理を用いてグラフで表せば（陽関数表示すれば）, 書くことが出来る. 助変数表示された曲線も, 以下で示すように, 局所的にはグラフで表される（このことを用いて概形を書くことが出来る）.

**定理 1.2.1** なめらかな平面曲線 $\gamma : I \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (x(t), y(t))$ に対し,

(1) $\frac{d}{dt}x(t_0) \neq 0$ なら $\gamma(t)$ は $t_0$ の近傍で $y = f(x)$ のグラフで書ける, i.e., $\exists I' : t_0$の近傍, $\exists x^{-1} : x(I') \to I' : x$ の逆関数 s.t. $f := y \circ x^{-1}$, $\gamma(I') = \{(s, f(s)) \mid s \in x(I')\}$.

(2) $\frac{d}{dt}x(t_0) \neq 0$ なら $\gamma(t)$ は $t_0$ の近傍で $y = f(x)$ のグラフで書ける.

## 1.3 平面曲線の曲率

**定義 1.3.1** 平面曲線 $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ の $\gamma(t)$ での曲率 $\kappa(t)$ を次で定義: $\kappa(t) := \det(\gamma', \gamma'')/|\gamma'|^3$.

平面曲線の助変数表示は一意ではない. しかし, 曲線の曲がり具合は助変数表示に依らない（どのような助変数表示をしても同じ曲率になる）のが自然. まずそれを調べる.

**定義 1.3.2** $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ を平面曲線, $t : I' \to I$ を単調増加な $C^\infty$-同相とする. このとき, $\widetilde{\gamma} := \gamma \circ t : I' \to \mathbb{R}^2$ を $\gamma$ **の** $t$ **によるパラメータ変換**と呼ぶ.

もちろん $\widetilde{\gamma}$ は平面曲線であり, $\gamma$ と同じ曲線（の異なる助変数表示）を与える.

**命題 1.3.3** 平面曲線 $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ の曲率 $\kappa_\gamma(t)$ は, パラメータ変換に依らない, i.e., $\forall \widetilde{\gamma} = \gamma \circ t : I' \to \mathbb{R}^2$ : パラメータ変換, $\forall u \in I'$, $\kappa_{\widetilde{\gamma}}(u) = \kappa_\gamma(t(u))$.

次に, 何故これで曲がり具合が分かるか, について考える. 「$\kappa$ は決まった速度で走った時の加速度（横G）の大きさを表す」というのが, 一つの説明.

**定義 1.3.4** 平面曲線 $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ が **弧長パラメータ表示**とは, $|\gamma'| = 1$ が成立すること.

**命題 1.3.5** 全ての平面曲線 $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ は, パラメータ変換によって弧長パラメータ表示できる, i.e., $\exists t : I' \to I$ : パラメータ変換 s.t. $\widetilde{\gamma} := \gamma \circ t$ : 弧長パラメータ表示.

弧長パラメータ表示とは「曲線の上を速度 1 で走る」ことに対応し, 命題は「曲線の上を速度 1 で走ることが出来る」という当たり前のようなことを主張している.

**定義 1.3.6** 平面曲線の弧長パラメータ表示 $\gamma : I \to \mathbb{R}^2 : s \mapsto (x(s), y(s))$ に対し, $\mathbf{e}(s) := (x'(s), y'(s))$ を**単位接ベクトル**, $\mathbf{n}(s) := (-y'(s), x'(s))$ を**単位法ベクトル**と呼ぶ.

**命題 1.3.7** 弧長パラメータ表示された平面曲線 $\gamma$ に対し, $\gamma''(s) = \kappa(s) \cdot \mathbf{n}(s)$.

何故上で定義した曲率で曲がり具合が分かるか, に対するもう一つの説明は, 「接している円の半径を表すから」である.

**定義 1.3.8** 曲線 $\gamma_1, \gamma_2$ が**点** $p$ **で** 2 **次の接触をする**とは, 適当なパラメータ変換の元で次が成立すること: $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$, $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0)$, $\gamma_1''(0) = \gamma_2''(0)$.

**定義 1.3.9** 弧長パラメータ表示された平面曲線 $\gamma$ に対し, $\gamma(s)$ **での曲率円**を次で定義:
(i) $\kappa(s) \neq 0$ のとき, 中心が $\gamma(s) + \mathbf{n}(s)/\kappa(s)$, 半径が $1/|\kappa(s)|$ の円,
(ii) $\kappa(s) = 0$ のとき, $\gamma(s)$ での接線.

**命題 1.3.10** 平面曲線 $\gamma$ と $\forall s$ に対し, $\gamma(s)$ での曲率円は $\gamma(s)$ で 2 次の接触をする.

すなわち曲率が $\kappa$ である点では, 接する円の半径は $1/|\kappa|$ である. 道路で見掛ける「$R = 400m$」などの数字は, $1/|\kappa|$ を表している.

## 1.4 平面曲線の基本定理

前節では曲線に対して曲率を定義したが, ここでは「与えられた曲率を持つ曲線が存在する」ことを示す. さらに, 曲率は回転と平行移動で不変であること, 曲率が同じ曲線は本質的に同じであること, を示す.

**定理 1.4.1 (曲線論の基本定理)** (1) $\forall \kappa : I \to \mathbb{R} : C^\infty$, $\exists \gamma : I \to \mathbb{R}^2$ : 曲線の弧長パラメータ表示 s.t. $\kappa = \kappa_\gamma$. (2) $\gamma_1, \gamma_2$ を曲線の弧長パラメータ表示とする. 両者の曲率が一致するための必要十分条件は $\gamma_1$ と $\gamma_2$ は回転と平行移動で互いに写りあうこと.

(1) の証明は, $\gamma$ を以下のように定めれば良い:

$$\gamma(s) := \int_0^s \left( \cos(\int_0^t \kappa(u)du),\ \sin(\int_0^t \kappa(u)du) \right) dt.$$

**例 1.4.2** 曲率 $\kappa(s) = s$ を持つ曲線を**クロソイド曲線**と言う.

(2) の必要性を証明する為, 「回転と平行移動」を定式化する.

**定義 1.4.3** 次で定義される群を $\mathbb{R}^2$ **の回転群**または 2 **次特殊直交群**と呼ぶ:

$$SO(2) := \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

また, $SO(2)$ と $\mathbb{R}^2$ の平行移動で生成される群を**運動群**と呼び $M_2$ で表す.

$M_2$ の各元は $g = (A, v)$ と表すことができ, $g \cdot z := Az + v$ によって $\mathbb{R}^2$ の合同変換を与える. また $(g \cdot \gamma)(s) := g \cdot \gamma(s)$ によって曲線を曲線に写す.

**命題 1.4.4** $M_2$ の作用は曲率を不変にする, i.e., $\forall g \in M_2$, $\forall \gamma$ : 曲線, $\kappa_\gamma = \kappa_{g \cdot \gamma}$.

次に (2) の十分性を示すが, 証明には次の公式を使う.

**補題 1.4.5 (フルネの公式)** 弧長パラメータ表示された曲線 $\gamma$ と単位接ベクトル $\mathbf{e}(s)$, 単位法ベクトル $\mathbf{n}(s)$ に対し,

$$(\mathbf{e}(s), \mathbf{n}(s))' = (\mathbf{e}(s), \mathbf{n}(s)) \begin{pmatrix} & -\kappa(s) \\ \kappa(s) & \end{pmatrix}.$$

また, 定義より $(\mathbf{e}(s), \mathbf{n}(s)) \in SO(2)$ であることが直ちに分かる. これらを使って曲線論の基本定理 (2) は証明される.

## 1.5 空間曲線

空間曲線, $\mathbb{R}^3$ の中の曲線について考える. 空間曲線に対して「曲率」「捩率」という量を定義する. これらは回転と平行移動によって不変であり, さらに平面曲線の基本定理と同様のことが成立する.

**定義 1.5.1** 連続写像 $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ またはその像 $\gamma(I)$ が **(区分的に) なめらかな空間曲線**とは, 次を満たすこと:

(1) $\gamma$ は (区分的に) $C^\infty$-級, (2) $\forall t \in I$, ($t$ で微分可能ならば) $\dfrac{dc}{dt}(t) \neq (0,0)$.

**定義 1.5.2** 空間曲線 $\gamma$ に対し, $\gamma(t)$ における曲率 $\kappa(t)$ と捩率 $\tau(t)$ を次で定義する:

$$\kappa(t) := \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3}, \quad \tau(t) := \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t))}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^2}$$

「捩率」は「れいりつ」と読む. 「捩」は「ねじれ」の意味.

**定義 1.5.3** $R^3 \ni \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3), \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ に対し, 次のベクトル $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ を $\mathbf{v}$ と $\mathbf{w}$ の**ベクトル積**と呼ぶ:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} := \left( \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_3 & w_3 \\ v_1 & w_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \right).$$

空間曲線に対しても平面曲線と同様にして「パラメータ変換」が定義出来る. 曲率と捩率はパラメータ変換をしても変わらず, また任意の空間曲線はパラメータ変換によって弧長パラメータ表示 (すなわち $|\gamma'| = 1$ となる助変数表示) 出来る.

**定義 1.5.4** 弧長パラメータ表示された空間曲線 $\gamma$ が $\gamma'' \neq 0$ をみたすとき, $\mathbf{e}(s) := \gamma'(s)$ を**単位接ベクトル**, $\mathbf{n}(s) := \mathbf{e}'(s)/|\mathbf{e}'(s)|$ を**主法線ベクトル**, $\mathbf{b}(s) := \mathbf{e}(s) \times \mathbf{n}(s)$ を**従法線ベクトル**と呼ぶ.

**補題 1.5.5 (フルネ-セレの公式)** 弧長パラメータ表示された空間曲線 $\gamma$ に対し,

$$(\mathbf{e}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))' = (\mathbf{e}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)) \begin{pmatrix} & -\kappa(s) & \\ \kappa(s) & & -\tau(s) \\ & \tau(s) & \end{pmatrix}.$$

**定理 1.5.6 (空間曲線の基本定理)** (1) $\forall \kappa, \tau : I \to \mathbb{R} : C^\infty$, $\exists \gamma : I \to \mathbb{R}^3$ : 空間曲線の弧長パラメータ表示s.t. $\kappa = \kappa_\gamma$, $\tau = \tau_\gamma$. (2) $\gamma_1, \gamma_2$ を曲線の弧長パラメータ表示とする. 両者の曲率と捩率が共に一致するための必要十分条件は $\gamma_1$ と $\gamma_2$ は回転と平行移動で互いに写りあうこと.

ちなみに $\mathbb{R}^3$ の回転とは, 以下の群の作用のこと:

$$SO(3) := \{X \in M_3(\mathbb{R}) \mid X \cdot {}^t X = I, \ \det(X) = 1\}.$$

これと平行移動によって生成される群 $M_3$ を $\mathbb{R}^3$ **の運動群**と呼ぶ.

# 2　曲面

この講義の後半は曲面について考えます. 非常に大雑把に言って, 平面曲線が $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ で表されていたのと同様に, 曲面は $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ で表されます. このような写像の微分を使って曲線や曲面を調べるのですが, 1 変数関数の微分と 2 変数関数の微分の違いから, 曲面の方が当然ながら扱いが難しくなります（偏微分を使います）. しかし, 「何を調べるのか」という粗筋は同じである, ということを意識して欲しいと思います.

(1) 曲面とは何か（定義）

(2) 曲面の陽関数表示と陰関数表示

(3) 曲面の曲がり具合を調べる（曲率）

曲面論は, それ自身現在でも活発に研究が続けられている分野ですが, これから幾何学を勉強すると現れるであろう「多様体」の基礎となる, という意味でも非常に重要です. そのような先々のテーマに, この講義で行った曲面論の話が役に立つと嬉しく思います.

## 2.1　曲面の定義

$D$ を $\mathbb{R}^2$ の領域（連結開集合）とする.

**定義 2.1.1** $p : D \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ を連続写像とする. $p$ またはその像 $p(D)$ が**曲面片**であるとは, 次をみたすこと:

(1) $p$ は $C^\infty$-級,　(2) $\forall (u,v) \in D, \mathrm{rank}(p_u(u,v), p_v(u,v)) = 2$.

ここで, 記号 $p_u$ は $p$ の $u$ での偏微分を表す. すなわち,

$$p_u = (x_u, y_u, z_u) = (\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}), \quad p_v = (x_v, y_v, z_v) = (\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}).$$

**定義 2.1.2** $\mathbb{R}^3$ の連結部分集合 $M$ が**曲面**であるとは, $M$ が曲面片の和集合であること, i.e., $\forall m \in M, \exists p : D \to \mathbb{R}^3$ : 曲面片 s.t. $m \in P(D) \subset M$.

すなわち, 曲面は曲面片を貼り合せたものである. 特に曲面片は曲面. しかし一般に曲面が一つの曲面片で表せるとは限らない.

曲面片 $p(D)$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合 $D$ と「同じ」（正確には微分同相）であり, 曲面はそれらを貼り合せたものである. 幾何学では「多様体」という概念が重要であるが, $n$ 次元多様体は「$\mathbb{R}^n$ の開集合を貼り合せたもの」として定義される. ちなみに曲面は 2 次元多様体である.

**定義 2.1.3** $C^\infty$-関数 $f : D \to \mathbb{R}$ に対し, 集合 $\{(x, y, f(x,y)) \mid (x,y) \in D\}$ を $z = f(x,y)$ **のグラフ**と呼ぶ.

**命題 2.1.4** $z = f(x,y)$ のグラフは曲面である.

もちろん $x = f(y,z)$ のグラフや $y = f(z,x)$ のグラフも同様に定義でき, それらも曲面である（実は曲面片になる）.

## 2.2 [復習] 微分とは

ここで多変数関数の微分の復習を少ししておく. 微分という概念を把握することは曲面論を学ぶ上で必修である.

**定義 2.2.1** $D$ を $\mathbb{R}^m$ の開集合, $f : D \to \mathbb{R}^n$ を $C^\infty$-関数とする. $f$ の $p \in D$ での**微分** $(df)_p$ を次で定義する:

$$(df)_p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n : v \mapsto \lim_{t \to 0} \frac{f(p + vt) - f(p)}{t}.$$

このとき, 微分 $(df)_p$ は線形写像である. 標語的に言うと「微分＝線形近似」.

$\mathbb{R}^m$ の標準的な基底を $\{x_1, \ldots, x_m\}$ とすると, 定義から明らかに $(df)_p(x_i) = (\frac{\partial f}{\partial x_i})_p$ である. 偏微分係数とは, 微分の特別な方向の値である.

**定義 2.2.2** $(df)_p$ の標準的な基底に関する行列表示を **Jacobi 行列**と呼び, $(Jf)_p$ で表す:

$$(Jf)_p = \begin{bmatrix} (\frac{\partial f_1}{\partial x_1})_p & \cdots & (\frac{\partial f_1}{\partial x_m})_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\frac{\partial f_n}{\partial x_1})_p & \cdots & (\frac{\partial f_n}{\partial x_m})_p \end{bmatrix}.$$

**命題 2.2.3** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が点 $p$ の近傍で $C^\infty$-同相であるとする. このとき $(df)_p$ は線形同型であり, さらに次が成立: $(d(f^{-1}))_{f(p)} = (df)_p^{-1}$.

上の命題の逆が成り立つ, という定理が逆写像定理である. すなわち, 線形近似の性質から元の写像の性質が分かる, ということを主張している.

**定理 2.2.4 (逆写像定理)** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $C^\infty$-写像とする. $(df)_p$ が線形同型ならば, $f$ は点 $p$ の周りで $C^\infty$-同相.

$(df)_p$ が線形同型ということは, その行列表示 $(Jf)_p$ が逆行列を持つ（あるいは階数が $n$ である）ことと同値. そのような書き方をしている本が多い.

## 2.3 曲面の陽関数表示・陰関数表示

曲線論の場合と同様に「助変数表示 $\leftrightarrow$ 陽関数表示 $\leftrightarrow$ 陰関数表示」という（局所的な）同値性が成り立つ.

**命題 2.3.1** 曲面 $M$ は局所的にはグラフで書ける*, i.e.,* $\forall m \in M, \exists U_m : M$ における $m$ の近傍$, \exists f : D \to \mathbb{R} : C^\infty$ *s.t.* $U_m$ は $f$ のグラフ.

上の証明には逆関数定理を本質的に用いる. また, 陰関数定理より, 次が成り立つ.

**命題 2.3.2** $C^\infty$-関数 $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ が $\forall (x_0, y_0, z_0), (F_x, F_y, F_z)_{(x_0,y_0,z_0)} \neq (0, 0, 0)$ を満たすならば, $F(x, y, z) = 0$ で表される集合は曲面である.

例えば球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ が曲面であることを証明する場合, 定義に従って（曲面片を具体的に決めて）証明するのは面倒であった. しかし, この命題を使えば証明は殆ど明らかである.

## 2.4　微分形式

$D$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合とする．ここでは $D$ 上の関数で話をするが, $\mathbb{R}^n$ の開集合上で定義された関数に対しても議論は全く同様である．

**定義 2.4.1** $C^\infty$-関数 $f : D \to \mathbb{R}$ の**外微分**を次で定義: $df : D \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) : m \mapsto (df)_m$.

ここで, $\mathrm{End}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) := \{\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : 線形\}$ であり, これは $\mathbb{R}^2$ の双対空間と一致する．

**定義 2.4.2** $C^\infty$-写像 $\alpha : D \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ を $D$ **上の 1 次微分形式 (1-form)** と呼ぶ．

$\mathcal{A}^1(D)$ で $D$ 上の 1 次微分形式の全体を表す．$\mathrm{End}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ の代数的構造から, 次のような $\mathcal{A}^1(D)$ の代数的構造（和と関数倍）が定まる．

**定義 2.4.3** $\alpha, \beta \in \mathcal{A}^1(D)$, $C^\infty$-関数 $f : D \to \mathbb{R}$ に対し, $\alpha + \beta, f\alpha \in \mathcal{A}^1(D)$ を次で定義:

$$(\alpha + \beta)_m := (\alpha)_m + (\beta)_m, \quad (f\alpha)_m := f(m) \cdot (\alpha)_m.$$

$D$ 上の $C^\infty$-関数全体の集合を $C^\infty(D)$ で表す．$C^\infty(D)$ は関数の和と積によって環になる．上で定義した和と関数倍によって, $\mathcal{A}^1(D)$ は $C^\infty(D)$-加群である．

**定義 2.4.4** $D$ の座標を $(u, v)$ としたとき, $u$ および $v$ は

$$u : D \to \mathbb{R} : (u, v) \mapsto u, \quad v : D \to \mathbb{R} : (u, v) \mapsto v$$

という $C^\infty$-関数を表し, この外微分を $du$, $dv$ で表す．

**命題 2.4.5** $C^\infty$-関数 $f : D \to \mathbb{R}$ に対し, $df = f_u du + f_v dv$.

**定義 2.4.6** $\alpha, \beta \in \mathcal{A}^1(D)$ に対し, $\alpha\beta : D \to S^2(\mathrm{End}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}))$ を次で定義:

$$(\alpha\beta)_m(X, Y) := \frac{1}{2}(\alpha_m(X)\beta_m(Y) + \alpha_m(Y)\beta_m(X)).$$

ここで, $S^2(\mathrm{End}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})) := \{\omega : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : 双線形 \mid \omega(X, Y) = \omega(Y, X)\}$ である．$S^2(\mathrm{End}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}))$ の元を対称 2 次形式, $D$ から $S^2(\mathrm{End}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}))$ への $C^\infty$-写像を $D$ 上の対称 2 次形式と呼ぶ．

## 2.5　基本形式

曲面 $M$ 上の微分形式 $dp$, $d\nu$ を, 次の手順で定義する．

1. $m \in M$ に対し, $m$ を含む曲面片 $\bar{p} : D \to \mathbb{R}^3$ を取り, $\bar{p}(u_0, v_0) = m$ とする．
2. $(dp)_m := (d\bar{p})_{(u_0, v_0)} \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.
3. $\bar{\nu} : D \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto \dfrac{\bar{p}_u \times \bar{p}_v}{|\bar{p}_u \times \bar{p}_v|}$ と定義し, $(d\nu)_m := (d\bar{\nu})_{(u_0, v_0)} \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

このとき $dp, d\nu : M \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. これらが well-defined であること（すなわち曲面片の選び方に依存しないこと）は証明する必要がある．

**定義 2.5.1** 曲面 $M$ の第 1 基本形式, 第 2 基本形式を次で定義する:

$$\mathrm{I} := dp \cdot dp, \quad \mathrm{II} := -d\nu \cdot dp.$$

**定義 2.5.2** 曲面片 $p : D \to \mathbb{R}^3$ および $C^\infty$-同相写像 $\phi : D' \to D$ に対し, $p \circ \phi$ を $p$ の $\phi$ による**座標変換**と呼ぶ. また, $\phi$ が $\forall m \in D', \det(d\phi)_m > 0$ を満たすとき, その座標変換を**正の座標変換**と呼び, $\forall m \in D', \det(d\phi)_m < 0$ を満たすときには**負の座標変換**と呼ぶ.

座標変換 $p \circ \phi$ も曲面片である. また, $\det(d\phi)_m = 0$ となる点 $m \in D'$ は存在しないので（存在したとするとその点の近傍で $C^\infty$-同相ではなくなる）, 任意の座標変換は正または負のいずれかになる.

**補題 2.5.3** 曲面片に対し, $dp$ は座標変換に依存しない. $d\nu$ は正の座標変換に依存しない.

**命題 2.5.4** 曲面の第 1 基本形式は座標変換に依存しない. 第 2 基本形式は正の座標変換に依存しない.

ここで曲面の第 1 基本形式, 第 2 基本形式を別の方法で表示する.

**命題 2.5.5** $p : D \to \mathbb{R}^3$ を曲面片とする. このとき,

(1) $E := p_u \cdot p_u, F := p_u \cdot p_v, G := p_v \cdot p_v$ とすると, $\mathrm{I} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$.
(2) $L := -p_u \cdot \nu_u, M := -p_u \cdot \nu_v, N := -p_v \cdot \nu_v$ とすると, $\mathrm{II} = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$.

## 2.6 ガウス曲率・平均曲率

**定義 2.6.1** 曲面 $M$ に対し, 次を満たす写像 $A : M \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ を**型作用素**と呼ぶ:

$$\forall m \in M,\ \forall X, Y \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{II}_m(X, Y) = \mathrm{I}_m(A_m X, Y).$$

**命題 2.6.2** $\mathrm{I} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$, $\mathrm{II} = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ とする. $A$ の標準的な基底に関する行列表示は,

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

**定義 2.6.3** 曲面 $M$ に対し, $K : M \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) : m \mapsto \det(A_m)$ を**ガウス曲率**, $H : M \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) : m \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_m)$ を**平均曲率**と呼ぶ.

向きを保つ合同変換（i.e., $SO(3)$ と平行移動で生成される群 $M_3$ の作用）を考える.

**命題 2.6.4** $M$ を曲面, $g \in M_3$ とすると, $M' := g \cdot M$ も曲面である. さらに,

$$\mathrm{I}_m = \mathrm{I}'_{g\cdot m}, \quad \mathrm{II}_m = \mathrm{II}'_{g\cdot m}, \quad \mathrm{K}_m = \mathrm{K}'_{g\cdot m}, \quad \mathrm{H}_m = \mathrm{H}'_{g\cdot m}.$$

このことを用いて, 平面 $\mathbb{R}^2$, 球面 $S^2(r)$, 円柱に対し, そのガウス曲率と平均曲率が一定であることが分かる（このような曲面を**等質**であると言う）.

**定義 2.6.5** 曲面 $M$ が **$z$-軸の周りの回転面**であるとは, 次が成立すること:

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot M = M.$$

回転面は, $xz$-平面の曲線 $\gamma(u) = (x(u), z(u))$ を $z$-軸の周りに回転させたものとして得られ, $p(u, v) := (\cos\theta \cdot x(u), \sin\theta \cdot x(u), z(u))$ によって助変数表示できる.