2004年度幾何学特殊講義 / 多様幾何特論 D

担当：田丸 博士

0　序

この講義の目的は, 微分幾何学およびリーマン幾何学の入門部分を紹介することとします. より端的に述べると, 「リーマン幾何学とは何であるか」を紹介することが主な目的です. この講義では, 以下のものを扱います:

- 超曲面
  文字通り, 3年次前期に習った曲面の次元が高いバージョンです. 曲面論に於いて「第1基本形式」というものが登場しましたが, その概念はリーマン幾何学で非常に基本的です. そこで, その復習も兼ねて, まずは超曲面を扱います.

- 多様体
  多様体については3年次後期に習ったと思いますが, リーマン多様体を定義する為に必要な諸概念（接空間, 束, ベクトル場など）の復習をします.

- リーマン多様体
  標語的に言うと「リーマン多様体とは, 多様体に第1基本形式に相当する構造（リーマン計量）を足したもの」です. 曲面論に於いて, 第1基本形式を用いて曲面上の曲線の長さを測ったり, ガウス曲率を定義することが出来ました. リーマン多様体でも同様のことが出来ることを紹介します.

この講義の参考書として以下を挙げておきます:

- 微分幾何入門（上）, 落合卓四郎著, 東京大学出版会
- 多様体の基礎, 松本幸夫著, 東京大学出版会
- リーマン幾何学, 酒井隆著, 裳華房

こちらからのテスト・レポート・休講等の連絡は, 基本的に授業時間中に全て伝えます. また, 下記の web page でもお知らせします. 私への質問・コメント等の連絡がある場合には, 授業時間中でなくても構わないので, 適宜捕まえて下さい.

田丸 博士（たまる ひろし）
研究室：理学部 C-613
e-mail：tamaru @ math.sci.hiroshima-u.ac.jp
url：http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~tamaru/index-j.html

1　超曲面

1.1　[復習] 微分とは

まずは多変数関数の微分の復習を少ししておく．標語的に言うと,「微分＝線形近似」．

定義 1.1.1 D を $\mathbb{R}^m$ の開集合, $f : D \to \mathbb{R}^n$ を C^∞-関数とする．f の $p \in D$ での**微分** $(df)_p$ を次で定義する:

$$(df)_p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n : v \mapsto \lim_{t\to 0} \frac{f(p+vt)-f(p)}{t}.$$

このとき, 微分 $(df)_p$ は線形写像である．また, $\mathbb{R}^m$ の標準的な基底を $\{x_1, \ldots, x_m\}$ とすると, 定義から明らかに $(df)_p(x_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ が成立する．すなわち, 偏微分係数とは微分の特別な方向の値である．

定義 1.1.2 $(df)_p$ の標準的な基底に関する行列表示を **Jacobi 行列**と呼び, $(Jf)_p$ で表す:

$$(Jf)_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p) \end{bmatrix}.$$

微分とは元の写像を線形写像で近似することであり, その線形写像は Jacobi 行列を使って表される．次の逆関数定理（逆写像定理）は, 線形近似の性質から元の写像の性質が分かる, ということを主張している．

定理 1.1.3 (逆関数定理) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を C^∞-写像とし, $p \in \mathbb{R}^n$ とする．このとき, $(df)_p$ が線形同型ならば, f は点 p の周りで C^∞-同相写像.

$(df)_p$ が線形同型ということは, その行列表示 $(Jf)_p$ が逆行列を持つ (あるいは階数が n である) ことと同値. 教科書などではそのように書かれている場合が多い.

定理 1.1.4 (陰関数定理) $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を C^∞-写像とし, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ とする．このとき, $(dF\,|_{\{x_0\}\times\mathbb{R}^n})_{(x_0,y_0)}$ が線形同型ならば, 次が成立する:
$\exists W : \mathbb{R}^m$ における x_0 の開近傍, $\exists f : W \to \mathbb{R}^n : C^\infty$ s.t. $\forall x \in W,\ F(x, f(x)) = 0$.

簡単の為, $\mathbb{R}^2$ の直線 $y = ax$ を考えてみる．この直線は, $f(x) = ax$ とすれば $y = f(x)$ のグラフであるし, 一方で $F(x, y) = y - ax$ とすれば $F(x, y) = 0$ とも表せる．前者の表し方を**陽関数表示**, 後者の表し方を**陰関数表示**と呼ぶ．陽関数表示された曲線を陰関数表示することは容易である ($F(x, y) = y - f(x)$ とすれば良い)．しかし, 逆はいつでも出来るとは限らない (例えば, 直線 $F(x, y) = x$ は $y = f(x)$ の形では表せない)．陰関数定理は, 与えられた陰関数表示に対して, それを陽関数表示することが出来る為の条件を与えている．

1.2 超曲面の定義

ここでは超曲面の定義を述べ, その同値な言い換えを紹介する. 定義は「陰関数表示」で与えられ, 同値な言い換えは「陽関数表示」および「助変数表示」に対応している. このように様々な表示方法を持つことは, 平面曲線や曲面の場合と同じである (定義の条件や命題の主張が分かりにくい場合には, 例として平面曲線や曲面を考えるのが良い).

定義 1.2.1 $\mathbb{R}^{m+1} \supset M$ が**超曲面**であるとは, 次が成立すること:
$\forall p \in M,\ \exists (W, F)$ s.t.

(1) W は p の $\mathbb{R}^{m+1}$ における開近傍,
(2) $F : W \to \mathbb{R} : C^\infty$,
(3) $\forall q \in W,\ (JF)_q \neq (0, \ldots, 0)$,
(4) $M \cap W = \{x \in W \mid F(x) = 0\}$.

すなわち, $\mathbb{R}^{m+1} \supset M$ が超曲面であるとは, 局所的には陰関数で表示できる (W の中では $F(x) = 0$ と表せる) ことである.

例 1.2.2 $S^m := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid |x| = 1\}$ は $\mathbb{R}^{m+1}$ の超曲面.

例 1.2.3 $\mathbb{R}^m$ の開集合 U および C^∞-関数 $f : U \to \mathbb{R}$ に対し,

$$\mathrm{graph}(f) := \{(x_1, \ldots, x_m, f(x)) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x = (x_1, \ldots, x_m) \in U\}$$

は $\mathbb{R}^{m+1}$ の超曲面 (これを f **のグラフ**と呼ぶ).

このように, 超曲面を関数 f のグラフで表すことを陽関数表示と呼ぶ. 次の補題は, 超曲面は局所的には関数のグラフで表せることを主張している. ただしここで, グラフは $x_{m+1} = f(x)$ だけでなく, $x_k = f(x)$ $(k = 1, \ldots, m+1)$ のいずれかを意味するものとする.

補題 1.2.4 $\mathbb{R}^{m+1} \supset M$ が超曲面であるための必要十分条件は, 次が成立すること:
$\forall p \in M,\ \exists (W^*, f, U)$ s.t.

(1) W^* は p の $\mathbb{R}^{m+1}$ における開近傍,
(2) $\mathbb{R}^m \supset U$: 開集合,
(3) $f : U \to \mathbb{R} : C^\infty$,
(4) $W^* \cap M = \mathrm{graph}(f)$.

この表示方法は超曲面の「陽関数表示」である. 「陽関数表示 $\Rightarrow$ 陰関数表示」は容易. 「陰関数表示 $\Rightarrow$ 陽関数表示」には, 陰関数定理を用いる.

補題 1.2.5 $\mathbb{R}^{m+1} \supset M$ が超曲面であるための必要十分条件は, 次が成立すること:
$\forall p \in M,\ \exists (U, \phi, V)$ s.t.

(1) $\mathbb{R}^m \supset U$: 開集合, $\phi : U \to \mathbb{R}^{m+1} : C^\infty$,
(2) $\forall q \in U,\ \mathrm{rank}(J\phi)_q = m$,
(3) $V = \phi(U)$, V は p における M の開近傍, $\phi : U \to V$: 位相同型.

この表示方法は「助変数表示」である (U の座標を $(x_1, \ldots, x_m)$ とすると, この m 個の助変数で M を表示することが出来る). 「陽関数表示 $\Rightarrow$ 助変数表示」は容易. 「助変数表示 $\Rightarrow$ 陽関数表示」には, 逆関数定理を用いる.

1.3 C^∞-写像

ここでは超曲面上で定義された写像の微分可能性を定義し, その特徴を述べる. まず初めに, これからの論理展開の「手順」をまとめておく. 以下, 特に断らない限り M は $\mathbb{R}^{m+1}$ の超曲面を表すものとする.

定義 1.3.1 (U,ϕ,V) が超曲面 M の**局所座標系** $:\Leftrightarrow$ 補題 1.2.5 の (1)〜(3) を満たす.

超曲面論を展開する基本的な手順は,

「ある概念を定義する $\Rightarrow$ その概念を局所座標系を使って特徴付ける」

というものである. この手順は, 超曲面で定義された概念を多様体の場合に一般化する為に必要である (超曲面から「局所座標系」という概念を抽出したものが「多様体」である). 同様の手順は, 距離空間を学んだ際にも現れていたことを思い出そう (ある概念を定義する $\Rightarrow$ 開集合を使って特徴付ける $\Rightarrow$ 位相空間でも同様の概念が定義できる).

定義 1.3.2 関数 $f : M \to \mathbb{R}$ が**連続**であるとは, M の $\mathbb{R}^{m+1}$ から決まる相対位相に関して連続な関数であること. また, M 上の連続関数全体の集合を $C^0(M)$ で表す.

定義 1.3.3 $C^0(M) \ni f$ が C^∞**-関数**であることを次で定義する:
$\forall p \in M$, $\exists (W, \widetilde{f})$ s.t.
(1) W は $\mathbb{R}^{m+1}$ における p の近傍,
(2) $\widetilde{f} : W \to \mathbb{R} : C^\infty$,
(3) $\widetilde{f}|_{M\cap W} = f$.

すなわち, $f \in C^0(M)$ が C^∞-関数であるとは, 「局所的には $\mathbb{R}^{m+1}$ 上の C^∞-関数に拡張できる」ことである. M は $\mathbb{R}^{m+1}$ の開集合ではないので, M 上の関数の微分は通常の方法では定義できないことに注意. また, 大域的に $\mathbb{R}^{m+1}$ 上の C^∞-関数に拡張できるとは限らないことにも注意.

命題 1.3.4 $C^0(M) \ni f$ が C^∞-関数であるための必要十分条件は, 次が成立すること:
$\forall (U,\phi,V)$: 局所座標系, $f \circ \phi : U \to \mathbb{R} : C^\infty$.

次に超曲面から超曲面への写像の微分可能性について論ずる. 定義を与え, 局所座標系を使って特徴付ける, という手順は同じ.

定義 1.3.5 $\mathbb{R}^{m+1} \supset M$, $\mathbb{R}^{n+1} \supset N$ を超曲面とする. 連続写像 $F : M \to N$ が C^∞**-級写像**であるとは, $F = (f_1, \ldots, f_{n+1})$ としたとき, $\forall i$, $f_i \in C^\infty(M)$ となること.

超曲面上の C^∞-関数の定義より, F が C^∞-級写像であるとは, 「局所的には C^∞-写像 $\widetilde{F} : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ に拡張できる」ことである. 定義より明らかに, 超曲面上の C^∞-写像と C^∞-写像の合成は C^∞-写像である.

命題 1.3.6 連続写像 $F : M \to N$ が C^∞-関数であるための必要十分条件は, 次が成立すること: $\forall (U,\phi,V)$: M の局所座標系, $f \circ \phi : U \to \mathbb{R}^{n+1}$: C^∞.

1.4 接空間

前節で超曲面上の写像の微分可能性を述べたが, 実際の「微分」とは何かを述べる為には, 接空間の概念が必要になる. 多様体論に於ける「接空間」の概念は抽象的であり, 「曲線の接線」や「曲面の接平面」との関連が見えにくいが, 超曲面に於ける接空間を学習することによって多少は関係が見えやすくなる, と思われる.

定義 1.4.1 $p \in \mathbb{R}^{m+1}$ に対し, $T_p\mathbb{R}^{m+1} := \{p\} \times \mathbb{R}^{m+1}$ を $\mathbb{R}^{m+1}$ **の** p **での接空間**と呼ぶ. 接空間の元を**接ベクトル**と呼び, $\vec{u}_p := (p, u) \in T_p\mathbb{R}^{m+1}$ で表す.

要するに $\vec{u}_p$ は p を始点とするベクトルを表している. 通常の微積分では, $T_p\mathbb{R}^{m+1}$ を自然に $\mathbb{R}^{m+1}$ と同一視することが多い.

定義 1.4.2 超曲面 $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ および $p \in M$ を考える. p の周りの局所陰関数表示 (W, F) を用いて, M **の** p **での接空間**を次で定義する:

$$T_pM \;:=\; \{p\} \times \mathrm{Ker}(dF)_p \;=\; \{\vec{u}_p = (p, u) \in T_p\mathbb{R}^{m+1} \mid (dF)_p(u) = 0\}.$$

この定義は, 自然な意味での接空間を陰関数表示を用いて表したものである. 実際, 曲線 $F(x, y) = 0$ の (a, b) での接線は $F_x(a, b) \cdot (x - a) + F_y(a, b) \cdot (y - b) = 0$ で表されていた. この接線は $\{(a, b) + (u_1, u_2) \mid F_x(a, b) \cdot u_1 + F_y(a, b) \cdot u_2 = 0\}$ と表すことも出来る. また, 関数の微分の定義より, $(dF)_{(a,b)}(u_1, u_2) = F_x(a, b) \cdot u_1 + F_y(a, b) \cdot u_2$ である.

この接空間の定義が局所陰関数表示に依存しないことを示すことは, 数学全般に共通する「手順」である. また, 超曲面論に於ける「手順」によると, 接空間の概念を局所座標系を使って表すことも重要である.

定義 1.4.3 $\mathbb{R} \supset I$ を開区間, $\mathbb{R}^{m+1} \supset M$ を超曲面とする. C^∞-写像 $c : I \to M$ を M 上の C^∞**-曲線**と呼ぶ. また, $t_0 \in I$ に対し, **曲線** c **の** $c(t_0)$ **での接ベクトル**を次で定義する:

$$\dot{c}(t_0) := (c(t_0), \frac{dc}{dt}(t_0)) \in T_p\mathbb{R}^{m+1}.$$

定理 1.4.4 超曲面 $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ およびその p での接空間 T_pM に対し, 次が成立する:

(1) T_pM は m 次元ベクトル空間,

(2) $T_pM = \{\dot{c}(0) \mid c : I \to M : C^\infty,\ c(0) = p\}$,

(3) (U, ϕ, V) を p の周りの局所座標系とすると, $T_pM = \{p\} \times \mathrm{Im}(d\phi)_{\phi^{-1}(p)}$,

(4) T_pM は局所陰関数表示および局所座標系の取り方に依存しない.

(4) は (2) から直ちに導かれる ((2) の表示方法は局所陰関数表示および局所座標系の取り方に依存しないから).

1.5 写像の微分

C^∞-写像 $F:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ の微分 $(dF)_p$ とは, 元の写像の「線形近似」であった. ここでは超曲面の間の写像の微分を定義し, ユークリッド空間の場合と同様の性質, 特に逆関数定理が成り立つことを紹介する.

定義 1.5.1 $F:M\to N$ を C^∞-写像とし, $p\in M$ を取る. p の周りの F の局所 C^∞-拡張 $(W,\widetilde{F})$ を用いて, F の $p\in M$ **における微分** $(F_*)_p$ を次で定義する:

$$(F_*)_p : T_pM \to T_{F(p)}N : (p,u) \mapsto (F(p), (d\widetilde{F})_p(u)).$$

例によって「手順」により, この定義が局所 C^∞-拡張の取り方によらないことを示す必要がある. また, $(F(p),(d\widetilde{F})_p(u)) \in T_{F(p)}N$ も示す必要がある. それらは次から導かれる.

命題 1.5.2 $F:M\to N$ を C^∞-写像, $p\in M$, $\vec{u}_p \in T_pM$ とする. このとき, C^∞-曲線 $c:I\to M$ が $\dot{c}(0)=\vec{u}_p$ を満たすならば,

$$(F_*)_p(\vec{u}_p) = (F(p), \frac{d(F\circ c)}{dt}(0)).$$

$F\circ c$ は N 上の曲線なので, その接ベクトルは接空間の元である. また, この曲線を用いた表示は, F の局所拡張の取り方に無関係なので, 上の定義が局所拡張の取り方に依存しないことも分かる.

命題 1.5.3 $F:M\to N$ を C^∞-写像, $p\in M$, (U,ϕ,V) を p の周りの局所座標系とすると,

$$(F_*)_p(\vec{u}_p) = (F(p), d(F\circ\phi)_{\phi^{-1}(p)}((d\phi^{-1})_p(u)).$$

式は複雑であるが, 証明は容易. これが F の微分の局所座標系による定式化である. 何を言っているかは, 図を書くと分かりやすい ($\TeX$ で絵を書くのは大変なので省略する).

補題 1.5.4 $F:M\to N$ が C^∞-写像 $\Leftrightarrow \exists(U,\phi,V)$: 局所座標 s.t. $F\circ\phi$: C^∞.

この補題の証明は命題 1.3.4 と同様である. これから次が導かれる.

命題 1.5.5 局所座標系 (U,ϕ,V) に対し, $\phi:U\to V$ は $\mathbb{R}^{m+1}$ の超曲面として C^∞-同相.

このことから, 超曲面の「座標変換」が C^∞-写像であることが示される.

系 1.5.6 超曲面 M および $p\in M$ に対し, (U,ϕ,V) および (U',ϕ',V') を p の周りの局所座標系とする. このとき, 次は C^∞-同相写像である.

$$\phi^{-1}\circ\phi' : (\phi')^{-1}(V\cap V') \to \phi^{-1}(V\cap V').$$

最後に超曲面での陰関数定理を述べる. 証明は, 上の命題などを用いて, ユークリッド空間の場合の逆関数定理に帰着される.

定義 1.5.7 C^∞-写像 $F:M\to N$ が C^∞**-同相写像** (または**微分同相写像**) であるとは, 次が成立すること: F : 全単射かつ F^{-1} : C^∞.

定理 1.5.8 (逆関数定理) C^∞-写像 $F:M\to N$ および $p\in M$ に対し, $(F_*)_p : T_pM \to T_{F(p)}$ が線形同型ならば, F は p の周りで局所的に C^∞-同相.

1.6 ベクトル場

ここでは超曲面のベクトル場を考える. ベクトル場とは, 直感的には「超曲面の各点に接ベクトルが付いているもの」であり, 例えば地球上の各点に風向きを対応させたものなどはベクトル場である. 物理学の電場・磁場・重力場などもベクトル場の重要な例である.

定義 1.6.1 $\mathbb{R}^{m+1} \supset M$ を超曲面とする. 写像 $\vec{X} : M \to M \times \mathbb{R}^{m+1}$ が M **に沿ったベクトル場**であるとは, 次が成立すること: $\exists X : M \to \mathbb{R}^{m+1} : C^\infty$ s.t. $\vec{X}(p) = (p, X(p))$.

M に沿ったベクトル場の全体を $\Gamma(M \times \mathbb{R}^{m+1})$ で表す.

命題 1.6.2 $\Gamma(M \times \mathbb{R}^{m+1})$ は次によって $C^\infty(M)$-加群の構造を持つ: $f, g \in C^\infty(M)$ および $\vec{X}, \vec{Y} \in \Gamma(M \times \mathbb{R}^{m+1})$ に対し,

$$(f\vec{X} + g\vec{Y})(p) \ := \ \overrightarrow{fX + gY}(p) \ := \ (p, f(p)X(p) + g(p)Y(p)).$$

すなわち, ベクトル場に対して「和」と「関数倍」という操作が定義され, それが分配法則や結合法則等の所定の条件を満たす, という意味である (加群の正確な定義は省略する).

定義 1.6.3 超曲面 M に沿ったベクトル場 $\vec{X} : M \to M \times \mathbb{R}^{m+1}$ が**接ベクトル場**であるとは, 次が成立すること: $\forall p \in M,\ \vec{X}(p) = (p, X(p)) \in T_pM$.

M の接ベクトル場の全体を $\Gamma(TM)$ で表すことにする. 明らかに $\Gamma(TM)$ は $\Gamma(M \times \mathbb{R}^{m+1})$ の部分集合だが, 更に次が成り立つ.

命題 1.6.4 $\Gamma(TM)$ は $\Gamma(M \times \mathbb{R}^{m+1})$ の $C^\infty(M)$-加群として部分加群である.

すなわち, $\Gamma(TM)$ は和と関数倍という操作で閉じている, という意味である. 正確に述べると, $\forall f, g \in C^\infty(M)$, $\forall \vec{X}, \vec{Y} \in \Gamma(TM)$, $f\vec{X} + g\vec{Y} \in \Gamma(TM)$.

命題 1.6.5 M のベクトル場 $\vec{X} \in \Gamma(M \times \mathbb{R}^{m+1})$ が**単位法ベクトル場**または**向付け**であるとは, 次が成り立つこと: (i) $\forall p \in M,\ |X(p)| = 1$, (ii) $\forall \vec{u}_p \in T_pM,\ \langle u, X(p) \rangle = 0$.

単位法ベクトル場を通常 $\vec{\xi}$ で表す. 単位法ベクトル場は常に存在するとは限らない (例えばメビウスの帯). しかし, 局所的には必ず存在する.

例 1.6.6 半径 r の球面 $S^m(r) := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid |x| = r\}$ に対し, 次の $\vec{\xi}$ は単位法ベクトル場である:

$$\vec{\xi} : S^m(r) \to S^m(r) \times \mathbb{R}^{m+1} : p \mapsto (p, p/r).$$

また明らかに, $\vec{\xi}$ が単位法ベクトル場ならば $-\vec{\xi}$ も単位法ベクトル場である.

1.7 共変微分・型作用素

超曲面の上の関数や写像の微分の概念は既に定義したが, ここで述べる共変微分とは「ベクトル場の微分」である. また, 共変微分を使ってガウス曲率・平均曲率が定義される.

定義 1.7.1 $f \in C^\infty(M)$ の $\vec{u}_p \in T_pM$ による**方向微分**を次で定義する:

$$\vec{u}_p f := \frac{df(p+tu)}{dt}\,|_{t=0}\ .$$

これは, 我々の微分の定義で書くと $\vec{u}_p f = (df)_p(u)$ である. すなわち, p に於ける u 方向の変化率を表している. また超曲面から超曲面への写像の方向微分も同様に定義出来る.

定義 1.7.2 $\vec{X} \in \Gamma(TM)$ による $\vec{Y} \in \Gamma(M \times \mathbb{R}^{m+1})$ の**共変微分** $D_{\vec{X}}\vec{Y} \in \Gamma(M \times \mathbb{R}^{m+1})$ を次で定義する:

$$D_{\vec{X}}\vec{Y} : M \to TM : p \mapsto (p, \vec{X}(p)Y).$$

定義 1.7.3 ベクトル場 $\vec{X}, \vec{Y} \in \Gamma(TM)$ の **bracket 積**を次で定義する:

$$[\vec{X}, \vec{Y}] := D_{\vec{X}}\vec{Y} - D_{\vec{Y}}\vec{X}.$$

この bracket 積は歪対称双線形であり, さらに Jacobi 律を満たす.

補題 1.7.4 $\vec{\xi}$ を M の単位法ベクトル場とすると, $\forall \vec{X} \in \Gamma(TM),\ \ D_{\vec{X}}\vec{\xi} \in \Gamma(TM)$.

超曲面 M とその単位法ベクトル場の組 $(M, \vec{\xi})$ を**向付けられた超曲面**と呼ぶ.

定義 1.7.5 向付けられた超曲面 $(M, \vec{\xi})$ の**型作用素 (shape operator)** を次で定義する:

$$A : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM) : \vec{X} \mapsto -D_{\vec{X}}\vec{\xi}.$$

型作用素は, 各点 $p \in M$ に対して線形写像

$$A_p : T_pM \to T_pM : \vec{X}(p) \mapsto -(D_{\vec{X}}\vec{\xi})(p)$$

を与える (逆に言うとこのような線形写像をまとめたものが型作用素である). この写像の線形代数的不変量によって曲率を定義する.

定義 1.7.6 向付けられた超曲面 $(M, \vec{\xi})$ の**ガウス曲率** K, **平均曲率** H を次で定義する:

$$K : M \to \mathbb{R} : p \mapsto (-1)^m \det(A_p),$$
$$H : M \to \mathbb{R} : p \mapsto (1/m)\mathrm{tr}(A_p).$$

単位法ベクトル場を $\vec{\xi}$ の代わりに $-\vec{\xi}$ を選んでも, ガウス曲率は変わらない (平均曲率は -1 倍される). また, 向付け不可能な超曲面に対しても, 局所的な単位法ベクトル場によって同様に曲率を定義することが出来る. いずれにせよ, 我々は平均曲率の符号にはあまり拘らないことにする.

1.8 テンソル場

曲面の場合と同様に, 超曲面に対しても第１基本形式・第２基本形式が定義される. 我々はそれらをテンソル場の言葉を使って述べたい. そこで, ここではテンソル場について説明する. 標語的に述べると,

- ベクトル場＝ベクトルの集合（各点に接ベクトルを対応させたもの）
- テンソル場＝テンソルの集合（各点にテンソルを対応させたもの）

定義 1.8.1 ベクトル空間 V の**双対空間**を次で定義する: $V^* := \{f : V \to \mathbb{R} \mid f :$ 線形写像$\}$.

双対空間 V^* もベクトル空間であることが分かる. さらに, $\{e_1, \dots, e_n\}$ を V の基底とし, $f_1, \dots, f_n \in V^*$ を

$$f_i(e_j) := \delta_{ij}$$

によって定めると, $\{f_1, \dots, f_n\}$ は V^* の基底となる (これを**双対基底**と呼ぶ).

集合 X に対し, $< X >$ によって X の元の有限和の全体の成す加法群を表すことにする. すなわち,

$$< X > := \{\sum_{k=1}^{N} x_k \mid x_k \in X\}.$$

定義 1.8.2 ベクトル空間 V, W に対し, $< V \times W >$ を以下の部分空間 I で割った商空間を V と W の**テンソル積**と呼び, $V \otimes W$ で表す:

$$I := \left\langle \left\{ \begin{array}{ll} (v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w) & \\ (v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2) & \mid a \in \mathbb{R}, v, v_1, v_2 \in V, w, w_1, w_2 \in W \\ (av, w) - (v, aw) & \end{array} \right\} \right\rangle.$$

多くの本では「普遍性」によってテンソル積を定義しているが, ここで述べた定義はそれと同値である. $(v, w) \in < V \times W >$ の同値類を $v \otimes w$ で表す.

命題 1.8.3 $V \otimes W$ には, $< V \times W >$ の和から決まる加法群の構造が入る. さらに, スカラー倍を次で定義することにより, $V \otimes W$ はベクトル空間:

$$a(v \otimes w) := (av) \otimes w = v \otimes (aw).$$

命題 1.8.4 $\{e_i\}$ を V の基底, $\{h_j\}$ を W の基底とすると, $\{e_i \otimes h_j\}$ は $V \otimes W$ の基底.

ベクトル空間 V の n 個のテンソル積を $\otimes^n V$ で表すことにする ($V \otimes (V \otimes V) \cong (V \otimes V) \otimes V$ に注意).

定義 1.8.5 S_n を n 次対称群とする. $x \in \otimes^n V$ に対し, $\forall \sigma \in S_n$, $\sigma(x) = x$ が成り立つときに**対称テンソル**, $\forall \sigma \in S_n$, $\sigma(x) = \mathrm{sgn}(\sigma) x$ が成り立つときに**交代テンソル**と呼ぶ. ただしここで, S_n の $\otimes^n V$ への作用は次で定める:

$$\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) := v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}.$$

n 次対称テンソルの全体を $S^n V$, n 次交代テンソルの全体を $\bigwedge^n V$ で表すことにする. 交代テンソルを外積と呼んだり, その元を $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$ と書くことが多い (正確に述べると, $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ の交代化作用素 $\mathcal{A} : \otimes^n V \to \bigwedge^n V$ による像が $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$).

1.9 基本形式

曲面論でも登場した第1基本形式および第2基本形式を紹介する．これらはテンソル場として定式化される．テンソル場とは, 超曲面の各点にテンソルが対応しているものである．ここでテンソルとは, 接空間 T_pM とその双対空間 T_p^*M を何個かづつテンソル積したものを意味している．

定義 1.9.1 $\mathbb{R}^{m+1} \supset M$ を超曲面とする．写像 $\vec{X} : M \to M \times (\otimes^r \mathbb{R}^{m+1}) \otimes (\otimes^s (\mathbb{R}^{m+1})^*)$ が M **に沿ったテンソル場**であるとは, 次が成立すること:

$$\begin{aligned} &\exists X : M \to (\otimes^r \mathbb{R}^{m+1}) \otimes (\otimes^s (\mathbb{R}^{m+1})^*) \ : \ C^\infty \\ &\quad \text{s.t.} \ \ \vec{X}(p) = (p, X(p)), \quad X(p) \in (\otimes^r T_pM) \otimes (\otimes^s T_p^*M). \end{aligned}$$

正確には, 上のようなテンソル場を (r, s) **型テンソル場**と呼ぶ.

定義 1.9.2 次で定義される $(0, 2)$ 型テンソル場 g を, 超曲面 M の**第１基本形式**と呼ぶ:

$$T_p^*M \otimes T_p^*M \ni g(p) : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R} : (\vec{X}(p), \vec{Y}(p)) \mapsto \langle X(p), Y(p) \rangle.$$

ベクトル空間 V に対して, $V^* \otimes V^* \cong \{ f : V \times V \to \mathbb{R} :$ 双線形写像 $\}$ と自然に同一視できる (線形同型写像が存在する) ことに注意.

定義 1.9.3 次で定義される $(0, 2)$ 型テンソル場 h を, 超曲面 M の**第２基本形式**と呼ぶ:

$$T_p^*M \otimes T_p^*M \ni h(p) : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R} : (\vec{X}(p), \vec{Y}(p)) \mapsto \langle D_{\vec{X}} \vec{Y}, \xi \rangle.$$

これらのテンソル場を基底を使って表示することを考える．超曲面 M の局所座標表示を (U, ϕ, V) とし, $\phi^{-1}(p) = (x_1(p), \ldots, x_m(p))$ によって C^∞-関数 $x_1, \ldots, x_m$ を定義する (これを**座標関数**と呼ぶ).

命題 1.9.4 $p \in M$ の周りの座標関数 $x_1, \ldots, x_m$ に対し, $\{(dx_1)_p, \ldots, (dx_m)_p\}$ は T_p^*M の基底となる．

簡単の為に $m = 2$, すなわち通常の曲面を考える．このとき座標関数を用いて T_p^*M の基底 $\{(dx_1)_p, (dx_2)_p\}$ を取ることが出来る．また $T_p^*M \otimes T_p^*M$ は 4 次元であり, その基底として

$$\{(dx_1)_p \otimes (dx_1)_p, \ (dx_1)_p \otimes (dx_2)_p, \ (dx_2)_p \otimes (dx_1)_p, \ (dx_2)_p \otimes (dx_2)_p\}$$

を取ることが出来る．更に, 第1基本形式と第2基本形式は対称テンソルであり,

$$(dx_i dx_j)_p := (1/2)(dx_i)_p \otimes (dx_j)_p + (1/2)(dx_j)_p \otimes (dx_i)_p$$

とすれば, 対称テンソルの全体は $\{(dx_1 dx_1)_p, (dx_1 dx_2)_p, (dx_2 dx_2)_p\}$ で張られる．すなわち, 基本形式はこれらの 1 次結合の形で表される $(g = E dx_1 dx_1 + 2F dx_1 dx_2 + G dx_2 dx_2)$.

1.10 基本形式と曲率

我々は超曲面のガウス曲率・平均曲率を型作用素を用いて定義した．一方で曲面論では第１基本形式・第２基本形式を用いて曲率を定義することが多い．ここでは, その両者が一致することを示す．

命題 1.10.1 向き付けられた超曲面 $(M, \vec{\xi})$ の第１基本形式を g, 第２基本形式を h, 型作用素を A とすると,

$$h(\vec{X}, \vec{Y}) = g(A(\vec{X}), \vec{Y}) \qquad \text{for} \ \ \forall \vec{X}, \vec{Y} \in \Gamma(TM).$$

これにより, 第１基本形式・第２基本形式から型作用素および曲率を定義することが出来る．実際に曲面 (すなわち $m = 2$) の場合に, この方法で求めてみる．M を曲面, $p \in M$ での局所座標系を (U, ϕ, V) とし, さらに $\phi^{-1} = (x_1, x_2)$ とおく．

命題 1.10.2 曲面 M の第１基本形式および第２基本形式が (p の近傍で) それぞれ

$$\begin{aligned} g &= E dx_1 dx_1 + 2F dx_1 dx_2 + G dx_2 dx_2, \\ h &= L dx_1 dx_1 + 2M dx_1 dx_2 + N dx_2 dx_2 \end{aligned}$$

と表されていたとすると, 型作用素は適当な基底に関して次のように行列表示される:

$$A_p = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}.$$

正確な記号を使うならば, 行列の成分は $E(p), F(p), G(p)$ などになるが, 見た目が煩雑になるので省略する．この行列の行列式および trace を計算すれば, 次を得る:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}.$$

すなわち, 我々が超曲面に対して定義したガウス曲率・平均曲率は, 曲面に対して定義されていたガウス曲率・平均曲率の拡張になっている．

定理 1.10.3 (ガウスの驚異の定理) 超曲面のガウス曲率は, 第１基本形式のみに依存する．

超曲面でない一般の多様体に於いても,「第１基本形式さえあれば曲率が定義できる」, という発想が, リーマン多様体の基本である．この第１基本形式に相当するものをリーマン計量と呼ぶことになる．

一方で, 一般の多様体では「外の空間」に相当するものが無いので, 第２基本形式に相当するものは定義することができない (法ベクトル場 $\vec{\xi}$ の相当するものが無いので)．しかし, 多様体の外にも多様体がある状態 (部分多様体) になっている場合には, 同様の概念を定義し同様の議論を行うことが出来る．これは部分多様体論に於ける主要な研究対象となる．

2　多様体

2.1　定義・接空間

定義 2.1.1 ハウスドルフ空間 M が m **次元多様体**であるとは, 次が成立すること:
$\exists\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ s.t.
 (1) $\{U_\alpha\}$ は M の開被覆,
 (2) $\phi_\alpha : U_\alpha \to \phi_\alpha(U) \subset \mathbb{R}^m$ は位相同型写像,
 (3) 座標変換 $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ は C^∞-写像.

上の条件を満たす $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ を多様体 M の**局所座標系**, 各々の (U_α, ϕ_α) を**局所座標**と呼ぶ. 超曲面が「局所座標表示」出来ることから, 次が成り立つ.

命題 2.1.2 $\mathbb{R}^{m+1}$ の超曲面は m 次元多様体である.

ここから, 超曲面に関する概念を多様体に対しても拡張する. 超曲面に関する概念を局所座標系の言葉で特徴付けていたのは, この為である.

定義 2.1.3 M, N を多様体とする. 連続写像 $F : M \to N$ が C^∞**-級**であるとは, 次が成立すること: $\forall p \in M$, $\forall(U, \phi)$: p の周りの局所座標, $\forall(V, \psi)$: $F(p)$ の周りの局所座標, $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ は $\phi(p)$ の周りで C^∞-写像.

実際には「全ての局所座標」で確かめる必要は無く,「一つの局所座標に関して C^∞ ならば他に関しても C^∞」である. そのことを保証しているのが, 多様体の定義に現れた「座標変換が C^∞」という条件である.

定義 2.1.4 $C^\infty(M)$ を M 上の C^∞-関数の全体とする. 線形写像 $u : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ が p **における方向微分**または p **における接ベクトル**であるとは, 次が成立すること:

$$\forall f, g \in C^\infty(M),\ u(fg) = u(f)g(p) + f(p)u(g).$$

また p における接ベクトルの全体を T_pM で表し, p **における接ベクトル空間**または単に**接空間**と呼ぶ.

超曲面の場合には, 接ベクトルを先に定義し, その後で接ベクトルは方向微分を与えることを示した. 多様体の場合には「外の空間」が無い為, 接ベクトルを先に与えることはせず,「接ベクトル＝方向微分」によって定義している. この定義方法が最もシンプルであり, また T_pM がベクトル空間であることの証明も容易になる (しかしいきなりこれをやると, 接ベクトルのイメージが全く掴めない危険が伴う諸刃の剣).

命題 2.1.5 M を多様体, (U, ϕ) を p の周りの局所座標とする. $\phi = (x_1, \ldots, x_m)$ とすると,

$$(\frac{\partial}{\partial x_i})_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : f \mapsto \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(p)).$$

は p における接ベクトルである. さらに, $\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_m})_p\}$ は T_pM の基底である.

2.2 ベクトル束

ここでは接空間 T_pM やその双対空間 T_p^*M などを「束ねたもの」を考える. これらはベクトル束と呼ばれるものになっている.

定義 2.2.1 多様体 M に対し, 次を**接束 (tangent bundle)** と呼ぶ:

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_pM.$$

定義 2.2.2 m 次元多様体 M の接束 TM は $2m$ 次元多様体の構造を持つ.

$\pi : TM \to M$ を自然な射影とし, $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ を M の局所座標系とする. このとき,

$$\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to \phi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^m : \sum a_i (\frac{\partial}{\partial x_i})_p \mapsto (\phi_\alpha(p), (a_1, \ldots, a_m))$$

という全単射を用いて TM に位相を定義すると, $\{(\pi^{-1}(U_\alpha), \Phi_\alpha)\}$ は TM の局所座標系となる.

T_pM の双対空間 T_p^*M やそれらのテンソル積 $T_pM \otimes T_pM$, $T_pM \otimes T_p^*M$ などに対しても, 同様に多様体を構成することが出来る (特に $T^*M := \bigcup T_p^*M$ を**余接束**と呼ぶ). 多様体の構造の入れ方は, 接束の場合と全く同様であり, その決め方より, それらがベクトル束となることが示される.

定義 2.2.3 多様体 E, M に対し, $\pi : E \to M$ が**ベクトル束**であるとは, 次をみたすこと:

(1) π は 全射かつ C^∞,

(2) $\forall p \in M$, $E_p := \pi^{-1}(p)$ は n 次元ベクトル空間,

(3) 局所自明性が成り立つ (i.e., $\forall p \in M$, $\exists U$: p の近傍 s.t. $\pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{R}^n$).

正確には (E, M, π) の組がベクトル束であるが, 省略して E そのものをベクトル束と呼ぶこともある. ベクトル束 E に対し E_p を p **上のファイバー**と呼ぶ.

定義 2.2.4 ベクトル束 E, F の**テンソル積**を $E \otimes F := \bigcup (E_p \otimes F_p)$ で定義する.

同様に, ベクトル空間に関して定義された演算は自然にベクトル束に対しても定義できる (例えば, 直和・対称テンソル・交代テンソルなど).

定義 2.2.5 ベクトル束 $\pi : E \to M$ に対し, C^∞-写像 $s : M \to E$ が**切断 (section)** であるとは, $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$ が成立すること.

特に接束 TM の切断 $s : M \to TM$ を**ベクトル場**と呼ぶ. 切断の定義より $s(p) \in \pi^{-1}(p) = T_pM$ である. すなわち, ベクトル場とは M の各点に接ベクトルを対応させる写像である. 余接束 T^*M の切断を 1 **次微分形式 (1-form)** と呼び, $\bigwedge^k T^*M$ の切断を k **次微分形式 (k-form)** と呼ぶ.

2.3 リーマン計量

リーマン計量とは, 直感的には「多様体の各点の接空間に内積を定めるもの」である. これをきちんと述べると, 対称 2 次テンソル場 (で所定の性質を満たすもの) として定義されることになる. ベクトル空間 V の内積は, 対称 2 次形式 (すなわち $V \times V \to \mathbb{R}$ という対称双線形写像) であったことに注意する.

定義 2.3.1 対称テンソル場 $S^2(T^*M) := \bigcup S^2(T_p^*M)$ の切断 $g : M \to S^2(T^*M)$ が**リーマン計量**であるとは, 次をみたすこと: $\forall p \in M$, g_p : 正定値内積.

ここで, $S^2(T_p^*M) \cong \{f : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R} :$ 対称, 双線形$\}$ という同一視をしている. また, g_p が正定値であるとは, 次が成り立つこと: $\forall X \in T_pM$, $X \neq 0 \Rightarrow g_p(X, X) > 0$.

定義 2.3.2 多様体 M とその上のリーマン計量 g の組 (M, g) を**リーマン多様体**と呼ぶ.

リーマン計量 g の各点での値 g_p はベクトル空間の元なので, それを基底の 1 次結合で表すことを考える.

命題 2.3.3 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ を多様体 M の局所座標系とし, $\phi_\alpha = (x_1, \ldots, x_m)$ とすると,
(1) $\forall p \in U_\alpha$, $\{(dx_i)_p\}$ は T_p^*M の基底,
(2) $dx_i : U_\alpha \to T^*M : p \mapsto (dx_i)_p$ は切断.

ここで, $(dx_i)_p$ は「関数 x_i の微分」である. 正確に述べると,

$$(dx_i)_p(\sum a_j(\frac{\partial}{\partial x_j})_p) := \sum a_j(\frac{\partial}{\partial x_j})_p(x_i) = a_i.$$

すなわち, $\{(dx_i)_p\}$ は $\{(\frac{\partial}{\partial x_i})_p\}$ の双対基底である.

補題 2.3.4 $S^2(T_p^*M) = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{(dx_i dx_j)_p \mid i \leq j\}$.

リーマン計量は局所的には (局所座標 (U, ϕ) の中では) この基底の 1 次結合で書ける. $\mathbb{R}^m$ に対して (自明な局所座標を取って考えると), $g := dx_1dx_1 + dx_2dx_2 + \cdots + dx_mdx_m$ はリーマン計量である. これを $\mathbb{R}^m$ の**標準的な計量**と呼ぶ.

命題 2.3.5 超曲面の第 1 基本形式はリーマン計量である.

定義 2.3.6 (M, g) をリーマン多様体, $\gamma : [a, b] \to M$ を C^∞-曲線とする. このとき曲線 γ の**長さ**を次で定義する:

$$L(\gamma) := \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))}dt.$$

$\mathbb{R}^m$ 内の曲線を標準的な計量で測った長さは, 通常の意味での曲線の長さに一致する. もちろん, 計量が変われば曲線の長さも変わる.

定義 2.3.7 上半平面 $H^m := \{(x_1, \ldots, x_m) \mid x_m > 0\}$ に計量 $g := (1/x_m^2)(dx_1dx_1 + \ldots + dx_mdx_m)$ を入れたリーマン多様体を**実双曲空間** **(real hyperbolic space)** と呼ぶ.

実双曲空間は, 多様体としてはユークリッド空間と同じであるが, 計量が異なっている. その計量の違いが幾何に与える影響は極めて大きい.

2.4 共変微分 (Levi-Civita 接続)

我々は, 超曲面に対して接空間・方向微分・共変微分を定義した (そして共変微分は超曲面の幾何を調べる上で本質的であった). また, これまでに多様体に対しても接空間・方向微分を定義した. ここでは, 多様体上の共変微分を定義する. 特に, リーマン多様体上にはリーマン計量と「適合する」共変微分が存在する.

定義 2.4.1 $\Gamma(TM)$ を 多様体 M 上のベクトル場の全体とする. このとき,

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM) : \ (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

が M **上のアフィン接続**であるとは, 次を満たすこと:

(1) ∇ は双線形写像,

(2) $\forall f \in C^\infty(M), \forall X, Y \in \Gamma(TM), \ \nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y,$

(3) $\forall f \in C^\infty(M), \forall X, Y \in \Gamma(TM), \ \nabla_X (fY) = (Xf)Y + f \nabla_X Y.$

ここで, 記号 Xf について説明しておく. ベクトル場とは, 接ベクトル束 TM の切断, すなわち $X : M \to TM : p \mapsto X_p$ という写像 (で所定の性質を満たすもの) であった. また, $X_p \in T_p M$ は方向微分 $X_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : f \mapsto X_p f$ を与えていた. これらから Xf は

$$X : C^\infty(M) \to C^\infty(M) : f \mapsto Xf$$

によって定義される. ただしここで $Xf : M \to \mathbb{R} : p \mapsto X_p f$ である.

定義 2.4.2 多様体とアフィン接続の組 (M, ∇) を**アフィン多様体**と呼ぶ.

アフィン多様体の導入までの道筋を, 学部で習った幾何学と比較すると,

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\text{距離を抽出}} & \text{距離空間} & \xrightarrow{\text{開集合系を抽出}} & \text{位相空間} \\ \text{超曲面} & \xrightarrow{\text{第 1 基本形式を抽出}} & \text{リーマン多様体} & \xrightarrow{\text{共変微分を抽出}} & \text{アフィン多様体} \end{array}$$

のように, 非常に似た論法をしている. 次に行うことは, 「リーマン多様体上には自然なアフィン接続が存在する」ことである.

定理 2.4.3 リーマン多様体 (M, g) に対し, 次を満たすアフィン接続 ∇ が唯一つ存在:

(4) $T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0,$

(5) $\forall X, Y, Y \in \Gamma(TM), \ Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$

(4) の T を**捩率 (torsion)** と呼び, (4) の条件を **torsion free** と言う. また, この定理の性質を満たす ∇ を**共変微分**または **Levi-Civita 接続**と呼ぶ. 因みにベクトル場の bracket 積 $[X, Y]$ は, 次によって定義されている:

$$[X, Y] : C^\infty(M) \to C^\infty(M) : \ \varphi \mapsto [X, Y]\varphi := X(Y\varphi) - Y(X\varphi).$$

また, この定理の存在に関しては, 次の式によって $\nabla_X Y$ を直接定めて証明する:

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) = (1/2)\{ & Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ & + g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) + g([Z, X], Y)\}. \end{aligned}$$

この式は, Levi-Civita 接続を直接計算する際に頻繁に使われる.

2.5　測地線

ユークリッド空間において，2 点間を結ぶ最短の曲線は直線であった．リーマン多様体において同様の問題を考える際に登場するのが測地線である．測地線は 2 点間を結ぶ最短線とは限らないが，「局所的には最短線」である．以下, (M, g) をリーマン多様体, ∇ を Levi-Civita 接続, $c : I \to M$ を滑らかな曲線とする (I は適当な区間).

定義 2.5.1 曲線 c が**測地線**であるとは, 次を満たすこと: $\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = 0$.

記号に多少ギャップがあるので, それを説明しておく. 曲線 c に対し, その微分は $\dot{c} : \mathbb{R} \to TM$ という写像である. これは厳密にはベクトル場ではないのだが, 曲線上の各点に接ベクトルを対応させるものと見なせる (すなわち $\dot{c} : c(I) \to TM$). このようなものを**曲線に沿ったベクトル場**と呼ぶ. 測地線の条件を正確に言うと「$c(I)$ 上で $\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = 0$」である (それ以外では定義されていない) が, 通常はその辺は省略して書く.

例 2.5.2 $\mathbb{R}^m$ 上の標準的なリーマン計量を g_0 とする. $(\mathbb{R}^m, g_0)$ の曲線が測地線である為の必要十分条件は直線であること.

実際, $(\mathbb{R}^m, g_0)$ の曲線 $c = (c_1, \ldots, c_m)$ に対し, 測地線の条件式は次の式と同値である:

$$\frac{d^2}{dt^2}c_i = 0 \ \text{ for } i = 1, \ldots, m.$$

一般のリーマン多様体に対しても, 測地線とは直感的に言って「加速度が 0 の曲線」である.

命題 2.5.3 測地線の方程式 $\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = 0$ は, t に関する 2 階の常微分方程式である.

常微分方程式の解の存在と一意性から, 次が言える.

系 2.5.4 $\forall p \in M$, $\forall X_p \in T_pM$ に対し, $\exists 1\ c$: 測地線 s.t. $c(0) = p$, $\dot{c}(0) = X_p$.

与えられた点と初期ベクトルに対して対応する測地線を求める為には, 2 階の常微分方程式を解けば良い. しかしながら, その微分方程式を直接的に解くことは一般には困難である.

例 2.5.5 2 次元実双曲空間 (H^2, g) に対し, 次の曲線は測地線である:

$$c(t) := (\cos s(t), \sin s(t)).$$

ただしここで, $s(t)$ は $\dot{s}(t) = \sin s(t)$ をみたす関数とする.

測地線であることを示す為には, その曲線が測地線の条件式 (微分方程式) を満たすことを確かめれば良い. これは Levi-Civita 接続が分かっていれば容易である (微分方程式の解を求めることは一般には困難であるけど, 与えられたものが微分方程式の解であるかどうかを判定するのは容易であろう).

本質的に同じ曲線であっても, パラメータ表示の方法によっては測地線とならないことに注意. この例では, $c(t) := (\cos t, \sin t)$ は (H^2, g) の測地線ではない.

2.6 曲率

リーマン多様体の曲率テンソルを定義する (実はアフィン多様体であれば曲率テンソルは定義できる). その曲率の概念は, 超曲面の曲率の一般化になっている.

定義 2.6.1 アフィン多様体 (M, ∇) に対し, 次の $(1,3)$-型テンソルを**曲率テンソル**と呼ぶ:

$$R(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

$(1,3)$-型テンソルであるとは, $R \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes T^*M \otimes TM)$ となること. これは $R \in \Gamma(\mathrm{End}(TM \otimes TM \otimes TM, TM))$ と同じ.

定義 2.6.2 リーマン多様体 (M, g) に対して, Levi-Civita 接続から決まる曲率テンソルを**リーマン曲率テンソル**と呼ぶ. また, 次の $(0,4)$-型テンソルのことも同様に**リーマン曲率テンソル**と呼ぶ:

$$R(X,Y,Z,W) := g(R(X,Y)Z, W).$$

例 2.6.3 $\mathbb{R}^m$ に標準的な計量 g_0 を入れたリーマン多様体 $(\mathbb{R}^m, g_0)$ に対して, $R = 0$.

定義 2.6.4 T_pM の 2 次元部分空間 σ に対し, $K_\sigma := g_p(R_p(u,v)v, u)$ を σ の**断面曲率**と呼ぶ. ただしここで $\{u, v\}$ は σ の正規直交基底.

断面曲率 K_σ は, σ の正規直交基底の取り方に依らないことは, もちろん証明する必要がある.

例 2.6.5 双曲平面 (H^2, g) の任意の点 p に対し, $K_{T_pH^2} = -1$.

定義 2.6.6 断面曲率が一定のリーマン多様体を**定曲率空間**と呼ぶ.

ユークリッド空間 (に標準的なリーマン計量を入れた空間), 球面 (に超曲面の第１基本形式でリーマン計量を定めた空間), 実双曲空間は, 定曲率空間である. また, 定曲率空間は本質的にこれらに限ることが知られている.

我々が最初に学習した超曲面は, リーマン多様体の特別な場合であった (第１基本形式をリーマン計量とすれば, 超曲面はリーマン多様体である). 特に曲面の場合には, 曲面としての曲率とリーマン多様体としての曲率 (断面曲率) が等しい.

命題 2.6.7 $R^3 \supset M$ を曲面, g を第１基本形式とする. このとき, 曲面 M のガウス曲率と, (M, g) の断面曲率は一致する (i.e., $\forall p \in M$, $K_p = K_{T_pM}$).

断面曲率はその定義より, リーマン計量のみで決まる量である. また, 曲面の場合には, 第１基本形式でリーマン計量を定めていた (特に, 第２基本形式は全く関係が無い). このことから, 次が示される:

定理 2.6.8 (ガウスの驚異の定理 (Theorema egregium)) 曲面のガウス曲率は第１基本形式のみで決まる (第２基本形式に依存しない).