The proof of de Rham’s Theorem by A.Weil

広島大学理学部数学科
１４７１０１４Ｃ　柏　正
指導教員　田丸博士

平成１８年2月１０日

§1　Introduction

２つの多様体が与えられた時，それがどのくらいのレベルで “ 同じもの ” であるかを判定するのは一般には難しい．ここで使ったレベルというのは単なる曖昧な表現ではなくて，例えば同相なもの，微分同相なもの，または正則同値なものといった，多様体自身の構造の違いを意味するものである．そしてそれぞれのレベルに応じて, すなわち多様体構造に応じて, 不変量と呼ばれる大変重要な概念がある．・古くから知られている多様体の不変量には Euler 数があり，最も基本的な不変量の一つである．抽象的位相空間の持つ視覚的な形は，我々の理解できるものとしてはほとんど高が知れているが，Euler 数の概念は我々の見えない次元でのそれを記述することに成功した．この Euler 数は多様体の上の Toplogical な道具によって計算されたが，では多様体上の微分構造をもって定義された道具でその微分構造に依存した不変量が作れるはず，と考えるのは普通であろう．その一つとして de Rham Cohomology 群がある．道具としては多様体上の微分形式を用いるが，この概念は多様体を調べていけばごく自然に出てくる概念であると思われる．この de Rham Cohomology 群と言う名からも分かるようにこれは微積分の対象である微分多様体の不変量を，代数的に定義したものである．これが微分同相不変量であることは容易に分かる．ここで $f : M \longrightarrow N$ を微分同相写像とすれば，これは外微分作用素 d と可換な準同型写像 $f^* : \Omega^*(N) \longrightarrow \Omega^*(M)$ を誘導する. 容易に分かるように，これは閉形式を閉形式に，完全形式を完全形式に写す. このことから f は準同型

$$f^* \ : \ H^*_{\mathrm{DR}}(N) \ \longrightarrow \ H^*_{\mathrm{DR}}(M)$$

を誘導する. またこの誘導は，可微分多様体と可微分写像の圏から，次数付き加群と準同型の圏への反変関手である. 従って，上の準同型 f^* は同型である. 多様体そのものの形が分からないとき（と言ってもそれがごく自然な状況であろうが)，それを表す量が存在するとすれば，これは目に見えないものを表現すると言う意味では大変便利なものであることが分かるだろう．つまり de Rham Cohomology 群は “ 微分同相不変量 ” である；

$$\text{微分同相} \quad \Longrightarrow \quad \text{同じ不変量を持つ.}$$

単なる言い換えだが，違う不変量を持つ二つの多様体は微分多様体としては異なるものと考えるのである．言うまでもないことだが，これは不変量が異なればその上の理論の結果が全く異なってしまうといっているのではなく，異なってしまう可能性を示すものである．

さて，自明な多様体 $\mathbb{R}^n$ における微積分の基本的な結果である Stokes の定理は次のように一般化される．

M を境界を持つ n 次元向き付け可能多様体とする．M 上の $(n-1)$-form ω が Compact Support を持てば

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

これを単体複体の言葉で言うと，

c を多様体 M 上の p-chain $(p \geq 1)$ とし，ω を c の近傍上で定義された p-form とすれば,

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega.$$

後で述べるが，これは特異単体複体（Singuler Simplicial Complex）に直ちに拡張されるが，本質的な定理の形は変わらない. この定理は単純で綺麗であるがそれに見とれていても仕方がない．多様体（後者では p-chain をその部分多様体と見ている）とその上に定義された微分形式が " 双対的な " 関係でこの一つの方程式により繋がってのである．このように多様体にはその微分構造を記述することのできる，微分形式のような " 道具 " を考えることができる．しかもそれらは線形代数のような簡単な代数で表現できる. さらにその構造が " 複素 " の意味を含むならば，それに依存した更なる不変量を定義することが必要になる.de Rham Cohomology 群は，多様体の微分構造に依存した微分形式を用いて定義されたが，当然のように位相不変量である．de Rham の定理はこの事実を主張する. 実際は de Rham Cohomology と Singuler Cohomology は同型である，と主張する. 本稿ではこの de Rham の定理を A.Weil による古典的 (従って初等的) な方法に従って証明する. 全てではないが，少なくとも証明の基本的なアイデアは原論文に従った ([5]). 最近では代数トポロジーの一般論を展開し証明するのが普通であると思われる (そこから更に一般的な理論を展開する為だが). しかし，その方法は de Rham の定理だけを取り上げて論じるには，多少は必要でない概念にも触れざるを得ないだろう．そこで本稿では Weil による論法を選んだ．そもそも de Rham の定理は，１９３０年初頭 E. Cartan が予想したもので，１９３１年に de Rham により証明された. しかし，定理の最初の証明に使われた論法は今となっては少し読みづらいものとなっている. しかし，証明は Sheaf の理論により更に整理された. これが de Rham の定理の現代版となっている．Sheaf Cohomology の言葉を使えばかなりまとまった表現で言えるのだが，ここでは Sheaf を使わずに論じることにする. しかし，今後のことも考えれば Sheaf Cohomology を使う方がよい. というのは，現代

の複素多様体論においては Sheaf Cohomology 論が大きな役割を果たすからである（例えば Warner [4, pp. 161–185] を参照）． さて，Weil による証明では主に Diagram Chasing（図式追跡法）という論法を使うが，これは de Rham Complex とČech Complex の作る系列を “ 双対的 ” に扱うところにその本質があると思われる. そこで本質的な役割を果たすのが Homotopy 作用素の存在と，Poincaré の補題であり，共に Cohomology の消滅を意味するものである.

本稿で証明することは専ら de Rham の定理である. それにはあまり必要ではないが，第 1 節に必要最低限の概念を述べておいた. また，同じ節に通常の単体複体に対する de Rham の定理及び証明を書いた. その証明法に，双対性を考えるという議論の本質が見られる.

最後になったが，指導教官の田丸博士先生には大変お世話になり，また同じ研究室の吉田久志君には少しではあるが刺激を受けた. この場を借りて深くお礼申し上げたい.

§2　Preliminaries

2.1　Poancaré's Lemma

Thoerem 2.1.1 (Poincarě)

U は 1 点に可縮な $\mathbb{R}^n$ の領域とする．$\omega \in \Omega^{p+1}(U)(p \geq 1)$ に対して，

$$d\omega = 0 \quad \Longrightarrow \quad \omega = d\vartheta$$

なる $\vartheta \in \Omega^p(U)$ が存在する．
　この定理は，どんな閉形式も局所的には完全である，といっているのだ．

Proof)

　多様体 M と区間 $I = [0, 1]$ に対して，直積 $I \times M$ を考え Homotopy 作用素

$$K \ : \ \Omega^{p+1}(I \times M) \quad \longrightarrow \quad \Omega^p(M)$$

を次のように構成する．

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \xrightarrow{d} & \Omega^p(I \times M) & \xrightarrow{d} & \Omega^{p+1}(I \times M) & \xrightarrow{d} & \cdots \\
 & & \uparrow & \swarrow K & \uparrow & & \\
\cdots & \underset{d}{\rightarrow} & \Omega^p(M) & \underset{d}{\rightarrow} & \Omega^{p+1}(M) & \underset{d}{\rightarrow} & \cdots
\end{array}$$

t を I をパラメータとするると，$\omega \in \Omega^{p+1}(I \times M)$ は dt を含まない微分形式 ω_1, ω_2 によって，

$$\omega \ = \ \omega_1 \ + \ dt \wedge \omega_2$$

と表される．そのとき

$$K\omega = \int_0^1 dt \ \omega_2$$

と定義する．ω_2 は dt を含まないが，t に依存する $\Omega^{p+1}(I \times M)$ の元であるから，

$$\omega_2 = \frac{1}{p!} \sum a_{i_1 \cdots i_p}(t, x) \, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

の形をしている．したがって，

$$K\omega = \frac{1}{p!} \sum \left(\int_0^1 a_{i_1 \cdots i_p}(t, x) \, dt \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

である．さて写像，j_0，j_1 を次のようなものとする．

$$j_0 \ : \ M \quad \longrightarrow \quad I \times M \ ; \ j_0(x) = (0, x), \ x \in M$$

$$j_1 \ : \ M \quad \longrightarrow \quad I \times M \ ; \ j_1(x) = (1, x), \ x \in M$$

このとき次を示そう．

$$K(d\omega) + d(K\omega) = j_1^*\omega - j_0^*\omega, \ \ \omega \in \Omega^{p+1}(I \times M), \ p \geq 0$$

$$\omega = \sum a_J(t, x)\, dx^J + \sum a_H(t, x)\, dt \wedge dx^H$$

但し，

$$J \longleftrightarrow j_1, j_2, \cdots, j_{p+1}, \quad dx^J \longleftrightarrow dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{p+1}}$$

なる対応付けをした．H も同様である．さてそのとき，

$$K(d\omega) \qquad = \sum K\left(\frac{\partial a_J}{\partial t}\, dt \wedge dx^J \ - \ \frac{\partial a_H}{\partial x^i}\, dt \wedge dx^i \wedge dx^H\right)$$

$$= \sum a_J(1, x)\, dx^J \ - \ \sum a_J(0, x)\, dx^J \ - \ \left(\int_0^1 \frac{\partial a_H}{\partial x_i}\, dt\right) dx^i \wedge dx^H$$

さらに，

$$d(K\omega) = \sum d\left(\left(\int_0^1 a_H\, dt\right) dx^H\right) = \sum \left(\int_0^1 \frac{\partial a_H}{\partial x^i}\, dt\right) dx^i \wedge dx^H$$

であるから，

$$K(d\omega) + d(K\omega) = \sum a_J(1, x)\, dx^J - \sum a_J(0, x)\, dx^J = j_1^*\omega - j_0^*\omega.$$

さて m の座標近傍 U で局所 *Euclid* 同相かつ１点に可縮なものをとって考えよう. 簡単のため，U は $\mathbb{R}^n$ の開集合とする．つまり，写像

$$\phi \ \ : \ \ I \times U \ \ \longrightarrow \ \ \ U$$

と１点 $x_0 \in U$ が存在して，全ての $x \in U$ に対し，

$$\phi(1, x) = x, \ \ \phi(0, x) = x_0$$

であるとする．

$$\phi \circ j_0(x) = x_0, \ \ \phi \circ j_1(x) = x$$

であるから，$\omega \in \Omega^{p+1}(U)$ に対し，$\phi^*\omega \in \omega^{p+1}(I \times U)$ は，

$$j_o^*(\phi^*\omega) = 0, \ \ j_1^*(\phi^*\omega) = \omega$$

なる性質を持つ．したがって上に示した関係式により，

$$K d\phi^* \omega + dK\phi^* \omega = \omega$$

よってもし $\omega = 0$ ならば，$d\phi^*\omega = \phi^* d\omega = 0$ であるから，

$$d(K\phi^*\omega) = \omega$$

を得る． □

2.2 de Rham Cohomology

次の de Rham Complex を考える ($p \geq 0$).

$$\cdots \xrightarrow{d} \Omega^{p-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^p(M) \xrightarrow{d} \Omega^{p+1}(M) \xrightarrow{d} \ldots$$

先の Poincaré's Lemma によれば，M のある座標近傍 U に対しては

$$\omega \in \ker d \implies \omega \in \operatorname{Im} d.$$

実は、M の点をとるごとにこのような座標近傍 U が存在することが知られている．よってこのような U に対して，$p(\geq 1)$ 次元 de Rhma Cohomology 群は

$$H^p(U) = H^p_{\mathrm{DR}}(U) := \ker d / \operatorname{Im} d = 0$$

で定義される．M のこのような被覆のことを " 良い被覆 "，または " 可縮な被覆 " という．Čech Cohomology 論においては（被覆の局所有限性から），$U_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_q} := U_{\alpha_0} \cap U\alpha_1 \cap \cdots \cap U_{\alpha_q}$ が 1 点に可縮であることが要求れる．つまり

$$H^q(U_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_q}; \mathbb{R}) = 0, \ (\forall \alpha \in A \ \ q \geq 1).$$

実はどんな多様体も可縮な被覆を持つことが知られている．また $H^0(U) = \mathbb{R}$ は容易に分かる。このように Homotopy 作用素

$$K : \Omega^{p+1}(I \times M) \longrightarrow \Omega^p(M)$$

の存在は Cohomology の消滅を意味する（実際は局所的なもの）．de Rham Cohomology の言葉では Poincaré の補題は次のように表現する．

$$H^p_{\mathrm{DR}}(U) = \begin{cases} \mathbb{R} & p = 0 \\ 0 & p \geq 1 \end{cases}$$

さて多元環

$$H(M) = \bigoplus_{p\geq 0} H^p(M) \cong \left(\bigoplus_{p\geq 0} \ker d\right) \Big/ \left(\bigoplus_{p\geq 0} \mathrm{Im}\, d\right)$$

において，$\omega \in \Omega^p(M)$，$\vartheta \in \Omega^q(M)$ の代表元をそれぞれ $[\omega]$，$[\vartheta]$ とすれば

$$[\omega]\cdot[\vartheta] = [\omega \wedge \vartheta]$$

により $H(M)$ 内に積 $\wedge$ が入る. このとき $H(M)$ を de Rham Cohonology 環という.

2.3 Čech Cohomology

$\mathfrak{U} := \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を局所有限な M の Covering とする．$U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q} \neq \phi$ のとき，

$$U_{\alpha_0\cdots\alpha_q} := U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q}$$

として，M のČech q-Simpex という．ここで，

$$U_\alpha \longleftrightarrow \alpha$$
$$U_\alpha \cap U_\beta \longleftrightarrow \alpha, \beta \text{を結ぶ辺}$$

と考えれば通常の Simplex との対応がある．また，（Čech の意味での）q-chain 全体 $C_q(\mathfrak{U}:\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$-Vector Space をなし，その双対全体（q-cochain 全体）$C^q(\mathfrak{U};\mathbb{R}) := C_q(U;\mathbb{R})^*$ を考えることができる．つまり $c \in C^q(U;\mathbb{R})$ とは、

$$c \;:\; U_{\alpha_0\cdots\alpha_q} \;\mapsto\; c_{\alpha_0\cdots\alpha_q}$$
$$c = (c_{\alpha_0\cdots\alpha_q})$$

なる線形写像である．さらに我々は c は交代的であるとする．つまり，

$$c_{\alpha_0\cdots\alpha_i\cdots\alpha_j\cdots\alpha_q} = -\, c_{\alpha_0\cdots\alpha_j\cdots\alpha_i\cdots\alpha_q}$$

を要求する．また Coboundary operator も同様に構成される．つまり，

$$\delta : C^q(\mathfrak{U};\mathbb{R}) \;\longrightarrow\; C^{q+1}(\mathfrak{U};\mathbb{R})$$
$$(\delta c)_{\alpha_0\cdots\alpha_{q+1}} := \sum_{0\leq i\leq q+1} (-1)^i\, c_{\alpha_0\cdots\hat{\alpha}_i\cdots\alpha_{q+1}}$$

つまり，

$$\delta c : U_{\alpha_0\cdots\alpha_{q+1}} \mapsto \sum_{0\leq i\leq q+1} (-1)^i c_{\alpha_0\cdots\hat{\alpha}_i\cdots\alpha_{q+1}}$$

とすれば容易に $\delta\circ\delta = 0$ を得る.

Definition 2.3.1 (Čech Cohomology)

Cochain Conplex

$$\cdots \xrightarrow{\delta} C^{q-1}(\mathfrak{U};\mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} C^{q}(\mathfrak{U};\mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} C^{q+1}(\mathfrak{U};\mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} \ldots$$

に対して商空間

$$\check{H}^q(\mathfrak{U};\mathbb{R}) = \ker d/\mathrm{Im} d$$

を多様体 M の Covering $\mathfrak{U}$ に関する q 次元 Čech Cohomology 群という.

さてここからが面白いところである．c は p-form 全体 $\Omega^p(M)$ に値をとる写像であるとする．つまり

$$c : \mathfrak{U} \longrightarrow \Omega^p(M)$$

$$c : U_{\alpha_0\cdots\alpha_q} \longmapsto \omega_{\alpha_0\cdots\alpha_q}$$

として, 族 $\omega = (\omega_{\alpha_0\cdots\alpha_q})$ を考え, $p = 0$ では初めに定義した関数値としての Čech Cochain であり，それを form 全体に矛盾なく拡張するのである．こうして次の $\Omega^p := \Omega^p(M)$ $(p \geq 0)$ 係数のČech Cochain Complex を得る (このような複体を Double cmplex という).

$$\cdots \xrightarrow{\delta} C^{q-1}(U;\Omega^p) \xrightarrow{\delta} C^{q}(\mathfrak{U};\Omega^p) \xrightarrow{\delta} C^{q}(\mathfrak{U};\Omega^{p+1}) \xrightarrow{\delta} \ldots$$

したがって，Čech Cohomology 群

$$\check{H}^q(\mathfrak{U};\Omega^p) := \ker d/\mathrm{Im} d$$

が定義できる。[*1] さらに $\Omega^0 = \mathbb{R}$ 係数に入れたときと同様に、多元環

$$\check{H}(M) = \bigoplus_{q\geq 0} \check{H}^q(\mathfrak{U};\Omega^p) \cong \left(\bigoplus_{q\geq 0} \ker\delta\right) \Big/ \left(\bigoplus_{q\geq 0} \mathrm{Im}\ \delta\right)$$

にも積構造が入り, Čech Cohomology 環という．さてこれで、このČech Cochain Complex に先同様に Homotopy 作用素

$$L : C^q(\mathfrak{U};\Omega^p) \longrightarrow C^{q-1}(\mathfrak{U};\Omega^p)$$

を定義することができ，したがってこれにより Cohomology の消滅を導くのである．Cohomology の消滅は, どんな Cosycle も Coboundary であるといっているのだが、これ

[*1] これは Sheaf Cohomology の例だが、ここではこれについては触れない．例えば，Warner [4, pp. 161–185] を参照.

が実に便利な性質であることは後で分かるだろう．開被覆 $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$に対する 1 の分割 $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$とし，$\rho_\alpha\omega_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_q}$を $U_{\alpha\alpha_0\alpha\ldots\alpha_{q-1}}$ 上の form と考える．Homotopy 作用素 L は

$$\omega = (\omega_{\alpha_0\ldots\alpha_q}) \longmapsto (L\omega)_{\alpha\alpha_0\ldots\alpha_{q-1}} = \sum_\alpha \rho_\alpha \omega_{\alpha\alpha_0\ldots\alpha_{q-1}}$$

で与えられる．このとき次を得る．

$$\begin{aligned}
(\delta L\omega)_{\alpha_0\ldots\alpha_q} &= \sum_i (-1)^i (L\omega)_{\alpha_0\ldots\hat{\alpha}_i\ldots\alpha_q} \\
&= \sum_{\alpha i} (-1)^i \rho_\alpha \omega_{\alpha\alpha_0\ldots\alpha_q} \\
(L\delta\omega) &= \sum_\alpha \rho_\alpha (\delta\omega)_{\alpha\alpha_0\ldots\alpha_q} \\
&= \left(\sum_\alpha \rho_\alpha\right) \omega_{\alpha_0\ldots\alpha_q} + \sum_{\alpha i} (-1)^{i+1} \rho_\alpha \omega\alpha\alpha_0 \ldots \alpha \ldots \hat{\alpha}_i \ldots \alpha_q \\
&= \omega_{\alpha_0\ldots\alpha_q} - (\delta L\omega)_{\alpha_0\ldots\alpha_q}
\end{aligned}$$

したがって，

$$\delta L + L\delta = 1,\ \omega = (\omega_{\alpha_0\ldots\alpha_q}) \in C^q(\mathfrak{U};\Omega^p),\ (p \geq 1)$$

よって，もし $\delta\,\omega = 0$ ならば$\omega = (\omega_{\alpha_0\ldots\alpha_q})$ であるから，次を得る．

$$\check{H}^q(\mathfrak{U};\Omega^p) = 0,\ (p \geq 1)$$

さて $q = 0$ の場合を考えよう．

$$\check{H}^0(\mathfrak{U};\Omega^p) = \{\omega \in C^0(\mathfrak{U};\Omega^p) \mid \delta\,\omega = 0\}$$

であるから定義通り，

$$\begin{aligned}
\delta\,\omega = 0 &\iff (\delta\,\omega)_{\alpha_0\alpha_1} = \omega_{\alpha_0} - \omega_{\alpha_1} = 0 \\
&\iff \omega_{\alpha_1} = \omega_{\alpha_0}\ on\ U_{\alpha_0\alpha_1} = U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1}
\end{aligned}$$

このように $q = 0$ のときは M 上のq-form として $\omega = (\omega_\alpha)$ が定まるのである．まとめると次のようになる．

$$\check{H}^q(\mathfrak{U};\Omega^p) = \begin{cases} \Omega^p(M) & q = 1 \\ 0 & q \geq 1 \end{cases}$$

以上の議論において，$\check{H}^q(\mathfrak{U};\Omega^p)$ においてのみ Homotopy 作用素 L が構成できたことに注意しておく．さて以上の準備の下，de Rham Cohomology $H^q_{\mathrm{DR}}(M)$ と Čech Cohomology $\check{H}^q(\mathfrak{U};\mathbb{R})$ との間に自然な同型が存在する（特別な case の de Rhma の 定理）ことを証明しよう．

2.4 de Rham's Theorem (The special case)

Thoerem 2.4.1 (de Rham (The special case))

$$H^p_{\mathrm{DR}}(M) \;\cong\; \check{H}^p(\mathfrak{U};\mathbb{R})$$

Proof)

次の図式にしたがって証明しよう（これを Diagram Chasing と言う）.

$$\begin{array}{ccccccc}
C^{p+1}(\mathfrak{U};\mathbb{R}) & \overset{\iota}{\hookrightarrow} & C^{p+1}(\mathfrak{U};\Omega^0) & \overset{d}{\longrightarrow} & \dots & \overset{d}{\longrightarrow} & C^{p+1}(\mathfrak{U};\Omega^p) \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow \\
C^{p}(\mathfrak{U};\mathbb{R}) & \overset{\iota}{\hookrightarrow} & C^{p}(\mathfrak{U};\Omega^0) & \overset{d}{\longrightarrow} & \dots & \overset{d}{\longrightarrow} & C^{p}(\mathfrak{U};\Omega^p) \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow \\
C^{p-1}(\mathfrak{U};\mathbb{R}) & \overset{\iota}{\hookrightarrow} & C^{p-1}(\mathfrak{U};\Omega^0) & \overset{d}{\longrightarrow} & \dots & \overset{d}{\longrightarrow} & C^{p-1}(\mathfrak{U};\Omega^p) \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow \\
C^{0}(\mathfrak{U};\mathbb{R}) & \overset{\iota}{\hookrightarrow} & C^{0}(\mathfrak{U};\Omega^0) & \overset{d}{\longrightarrow} & \dots & \overset{d}{\longrightarrow} & C^{0}(\mathfrak{U};\Omega^p) \\
 & & & & & & \| \\
 & & & & & & \Omega^p(M)
\end{array}$$

まず写像

$$\psi^* \;:\; \check{H}^p(\mathfrak{U};\mathbb{R}) \;\longrightarrow\; H^p_{\mathrm{DR}}(M)$$

を構成しよう．構成の本質は局所有限な開被覆 $\mathfrak{U}$ に関する 1 の分割 $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ により Homotopy 作用素 $L \;:\; C^q(\mathfrak{U};\Omega^p) \;\longrightarrow\; C^{q+1}(\mathfrak{U};\Omega^p)$ が作れることから，$\check{H}^q(\mathfrak{U};\Omega^p) = 0$ $(p \geq 1)$ を使うことである．つまり δ で拾って d で送るのである．

$c = (C_{\alpha_0\dots\alpha_p}) \in C^p(\mathfrak{U};\mathbb{R})$, $\delta\, c = 0$ を任意にとる (つまり c は p-cosycle).

$\omega^{(p,0)} := \iota\omega \in C^p(\mathfrak{U};\mathbb{R})$ とおく．$0 = \iota\delta c = \delta\iota c = \delta\omega^{(p,0)}$であるが, $\check{H}^p(\mathfrak{U};\Omega^p) = 0$ より $\omega^{(p,0)} = \delta\vartheta^{(p-1,0)}$ なる $\vartheta^{(p-1,0)} \in C^{p-1}(\mathfrak{U};\Omega^0)$ が存在する．但し，$\vartheta^{(p-1,0)} := (\vartheta^{(p-1,0)}_{\alpha_0\dots\alpha_p})$ である．

また $\omega^{(p-1,1)} := d\vartheta^{(p-1,0)} \in C^{p-1}(\mathfrak{U},\Omega^1)$ とく.

$$\begin{aligned}
\delta\omega^{(p-1,1)} &= \delta d\vartheta^{(p-1,0)} \\
&= d\delta\vartheta^{(p-1,0)} \\
&= d\omega^{(p,0)} \\
&= d\iota c = 0
\end{aligned}$$

$\check{H}^{p-1}(\mathfrak{U};\Omega^1)=0$ より $\omega^{(p-1,1)}=\delta\vartheta^{(p-2,1)}$ なる $\vartheta^{(p-2,1)}\in C^{p-2}(\mathfrak{U};\Omega^1)$ が存在する.
$\omega^{(p-2,2)}:=d\vartheta^{(p-2.1)}\in C^{p-2}(\mathfrak{U};\Omega^1)$ とおく.

$$\begin{aligned}\delta\omega^{(p-2,2)} &= \delta d\vartheta^{(p-2,1)}\\ &= d\delta\vartheta^{(p-2,1)}\\ &= d\omega^{(p-1,1)}\\ &= d^2\vartheta^{(p-1,0)}=0\end{aligned}$$

$\check{H}^{q-2}(\mathfrak{U};\Omega^2)=0$ より $\omega^{(p-2,2)}=\delta\vartheta^{(p-3,2)}$ なる $\vartheta^{(p-3,2)}\in C^{p-3}(\mathfrak{U};\Omega^2)$ が存在する.
$\omega^{(p-3,3)}:=d\vartheta^{(p-3,2)}\in C^{p-3}(\mathfrak{U};\Omega^3)$ とおく．これを続けて $\check{H}^1(\mathfrak{U};\Omega^p)=0$ より、
$\omega^{(1,p-1)}=\delta\vartheta^{(0,p-1)}$ なる $\vartheta^{(0,p-1)}\in C^0(\mathfrak{U};\Omega^{p-1})$ 存在する.

$$\begin{aligned}\delta\omega^{(0,p)} &= \delta d\omega^{(0,p-1)}\\ &= d\delta\omega^{(0,p-1)}\\ &= d\omega^{(1,p-1)}\\ &= d^2\omega^{(1,p-2)}=0\end{aligned}$$

よって $\omega^{(0,p)}\in\Omega^p(M)$ であり，上から分かるように $d\omega^{(0,p)}=0$ であるから,

$$\omega^{(0,p)}\in\ker d$$

. よって $c\in C^p(\mathfrak{U};\mathbb{R})$ 及び，$\omega^{(0,p)}\in\Omega^p(M)$ 代表される Homology Class
$[c]\in\check{H}^p(\mathfrak{U};\mathbb{R}),[\omega^{(0,p)}]\in\Omega^p(M)$ に対して

$$\begin{array}{rcccc}\psi^* & : & \check{H}^p(\mathfrak{U};\mathbb{R}) & \longrightarrow & H^p_{\mathrm{DR}}(M)\\ & & [c] & \longmapsto & [\omega^{(0,p)}]\end{array}$$

が定まるが，この写像が well-defined であることは容易に分かるだろう．アイデアは，それぞれ異なる class

$$[\vartheta],\ [\vartheta']\ \in\check{H}^p(\mathfrak{U};\mathbb{R}),\quad [\omega],\ [\omega']\ \in H^p_{\mathrm{DR}}(M)$$

に対して，上同様に

$$\psi^*([\vartheta])\ =\ [\omega],\ \ \psi^*([\vartheta])\ =\ [\omega]$$

であるとき，ω, ω' が cohomologous つまり，$\omega\ -\ \omega'\in\mathrm{Im}\,d$ を確かめればよい．写像の向きが逆のときは，それぞれの役割を換えればよい．これで写像

$$\psi^*\ :\ \check{H}^p(\mathfrak{U};\mathbb{R})\ \longrightarrow\ H^p_{\mathrm{DR}}(M)$$

を作ることができた．

次に写像

$$\varphi^* \ : \ H^p_{\mathrm{DR}}(M) \ \longrightarrow \ \check{H}^p(\mathfrak{U};\mathbb{R})$$

を構成しよう．ここでの本質は可縮な covering $\mathfrak{U}$ に対して，Poincaré's Lemma を使うところである．つまり d で拾って δ で送るのである．

さて任意に $\omega \in \Omega^p(M),\ d\omega = 0$ をとり，

$$\omega^{(0,p)}_{\alpha_0} := \omega \,\Big|\, U_{\alpha_0},\ \ \omega^{(0,p)}_{\alpha_0} := (\omega^{(0,p)}_{\alpha_0}) \in \Omega^0(\mathfrak{U};\Omega^p)$$

とおくと，$\delta\omega^{(0,p)} = 0$.

$\omega^{(0,p)}_{\alpha_0} = 0$ より $\omega^{(0,p)}_{\alpha_0} = \delta\omega^{(0,p-1)}$ なる $\omega^{(0,1)}_{\alpha_0} \in \Omega^{p-1}(U_\alpha)$ が存在する. そこで

$$\omega^{(0,p-1)} := (\omega^{(0,p-1)}_{\alpha_0}),\ \omega^{(1,p-1)} := \delta\omega^{(0,p-1)} \in C^1(\mathfrak{U};\Omega^{p-1})$$

とおくと，

$$\begin{aligned} d\omega^{(1,p-1)} &= d\delta\omega^{(0,p-1)} \\ &= \delta d\omega^{(0,p-1)} \\ &= \delta\omega^{(0,p)} = 0. \end{aligned}$$

そこでこの $\omega^{(1,p-1)} = (\omega^{(1,p-1)}_{\alpha_0\alpha_1})$ に対し Poincaré's Lemma を使うと，$\omega^{(1,p-1)} = d\omega^{(1,p-2)}$ なる $\omega^{(1,p-2)}$ が存在する．ここで $\omega^{(1,p-2)} \in C^1(\mathfrak{U};\Omega^{p-2})$ として，証明の前半におけるものがとれることを注意しておく. 後は前半と逆の操作により，帰納的に $\omega^{(p-1,0)} \in C^{p-1}(\mathfrak{U};\Omega^0)$ が探せる. このようにして写像

$$\begin{array}{ccccc} \varphi^* & : & H^p_{\mathrm{DR}}(M) & \longrightarrow & \check{H}^p(\mathfrak{U};\mathbb{R}) \\ & & [\omega^{(0,p)}] & \longmapsto & [\omega^{(p,0)}] \end{array}$$

が定まるが，これは先に述べたように well-defined で作り方から前半の逆写像を与える;

$$\varphi^* \circ \psi^* \ = \ id,\ \ \psi^* \circ \varphi^* \ = \ id.$$

これにより自然な同型

$$H^p_{\mathrm{DR}}(M) \cong \check{H}^p(\mathfrak{U};\mathbb{R})$$

を得る． □

可縮な被覆の存在により，$\check{H}^p(\mathfrak{U};\mathbb{R})$ は Covering $\mathfrak{U}$ に依らない M そのもののČech Cohomology 群 $H^p(M;\mathbb{R})$ と同型であることが知られている．つまり，

$$H^p(M;\mathbb{R}) \ \cong \ H^p_{\mathrm{DR}}(M).$$

$\mathbb{R}$ 係数 Cochain を $\Omega^0(M)$ 係数 Cochain と考え，係数の次数を上げることで de Rham Complex を構成することがこの証明の本質である．さらにこの同型が環としての同型

$$\bigoplus_{p\geq 1} H^p(M;\mathbb{R}) \cong \bigoplus_{p\geq 1} H^p_{DR}(M)$$

を導くのは容易に示されるであろう．
さて，この同型対応はさらに一般的な Cohomology 環 $H_{\mathrm{Sing}}(M) = \bigoplus_{p\geq 1} H^p_{\mathrm{Sing}}(M)$ と同型である (de Rham's Theorem) が，まず Singuler Cohomology 群 $H^p_{\mathrm{Sing}}(M)$ について述べる．

2.5 Singuler Cohomology

これから Singuler Cohomology 群 $H^p_{\mathrm{Sing}}(M;\mathbb{R})$ を構成する. まず通常の単体複体から始める. $p \geq 1$ に対して

$$\Delta^p = \left\{(a_1,\ldots,a_p) \in \mathbb{R}^p \;\Big|\; \sum_{1\leq i\leq p} a_i \leq 1,\ \ a_i \geq 0\right\}$$

を $\mathbb{R}^p$ における standard p-simplex という. $p = 0$ に対しては Δ^0 は一点集合 0 であるとし，standard 0-simplex という．M を可微分多様体とする．M における differentiable singuler p-simplex σ とは, 任意連続写像

$$\sigma : \Delta^p \longrightarrow M$$

で,$\Delta^p \in \mathbb{R}^p$ の近傍から M の中への C^∞ 写像に拡張されるものをいう. この σ を単に M における p-simplex という. また 0-simplex は連続写像 $\sigma : \{0\} \to M$ からなる.M における p-chain とは p-simplex σ_i の $\mathbb{R}$ 上の線形結合 $c = \sum a_i\sigma_i$ $(a_i \in \mathbb{R})$ とする．次に写像 $k^p_i : \Delta^p \longrightarrow \Delta^{p+1}$ $(p \geq 0,\ 0 \leq i \leq p+1)$ を次で定義する；
$p = 0$ に対しては,

$$k^0_0(0) = 1,\ \ k^0_1(0) = 0$$

$p \geq 1$ に対しては,

$$k^p_0(a_1,\ldots,a_p) = (1 - \sum_{1\leq i\leq p} a_i, a_1,\ldots,a_p)$$
$$k^p_i(a_1,\ldots,a_p) = (a_1,\ldots,a_{i-1},0,a_i,\ldots,a_p),\ 1 \leq i \leq p.$$

$p \geq 1$ において，第一式は $\sigma(0)$ を頂点に持たない面単体を表す.
p-simplex $(p \geq 1)$ σ に対して，その第 i 面 $(1 \leq i \leq p)$ σ^i と境界 (boundary) $\partial\sigma$ を次で定

義する；

$$\sigma^i \ = \ d_i\sigma \ := \ \sigma \circ k_i^{p-1}$$

$$\partial\sigma \ := \ \sum_{0\le i\le p} (-1)^i \sigma^i \ = \ \sum_{0\le i\le p} (-1)^I d_i \sigma$$

$$i.e) \quad \partial \ = \ \partial_p \ = \ \sum_{0\le i\le p} (-1)^i d_i.$$

d_i を面作用素という. これらは共に (p-1)-simplex であり，∂ を boudary 作用素という. これを，p-chain $c = \sum_{1\le j\le k} a_i\sigma_j$ へ線形に拡張する；

$$\partial c \ = \ \sum_{0\le i\le p} \sum_{1\le j\le k} (-1)^i a_j \sigma_j^i.$$

容易に分かるように,

$$\begin{aligned} k_i^{p+1} \circ k_j^p \ &= \ k_{j+1}^{p+1} \circ k_i^p \\ d_j \circ d_i \ &= \ d_i \circ d_{j+1} \quad (p \ge 1, \ i \le j). \end{aligned}$$

これを用いれば,

$$\begin{aligned} \partial_p \circ \partial_{p+1} &= \sum_{ij} (-1)^{i+j} d_j \circ d_i \\ &= \sum_{i\le j} (-1)^{i+j} d_j \circ d_i + \sum_{i>j} (-1)^{i+j} d_j \circ d_i \\ &= \sum_{i\le j} (-1)^{i+j} d_i \circ d_{j+1} + \sum_{j>i} (-1)^{i+j} d_i \circ d_j \\ &= \sum_{i<j} (-1)^{i+j-1} d_i \circ d_j + \sum_{j>i} (-1)^{i+j} d_i \circ d_j \\ &= 0. \end{aligned}$$

従って，$\partial \circ \partial = 0$ を得る. さて，$S_p(M;\mathbb{R})$ により Singuler p-simplex で生成される実ベクトル空間を表せば，今定義した boundary 作用素 ∂ は次数 -1 の準同型

$$\partial \ : \ S_*(M;\mathbb{R}) \longrightarrow S_*(M;\mathbb{R}), \quad \partial \circ \partial = 0$$

を定義する. 従って，複体

$$\cdots \xrightarrow{\partial} S_{p+1}(M;\mathbb{R}) \xrightarrow{\partial} S_p(M;\mathbb{R}) \xrightarrow{\partial} S_{p-1}(M;\mathbb{R}) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

を得る. これを M の ($\mathbb{R}$ 係数) Singuler Complex という.
この複体の双対をとる. つまり $p \geq 0$ に対して $S^p(M;\mathbb{R}) := S_p(M;\mathbb{R})^*$, $\delta := \partial^*$ として, 複体

$$\cdots \xrightarrow{\delta} S^{p-1}(M;\mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} S^p(M;\mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} S^{p+1}(M;\mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} \cdots$$

を誘導する. これを M の Singuler Cochain Complex(Dual Complex) という. $S^p(M;\mathbb{R})$ の元を Singuler p-Cochain という. $\partial \circ \partial = 0$ から $\delta \circ \delta = 0$ であるから, $\mathrm{Im}\delta := \delta\left(S^{p-1}(M;\mathbb{R})\right)$ は $\ker\delta := \left\{\eta \in S^p(M;\mathbb{R}) \;\middle|\; \delta\eta = 0\right\}$ の部分ベクトル空間である.

Definition 2.5.1 (Singuler Cohomology Group)

上の双対複体に対して, 商ベクトル空間

$$H^p_{\mathrm{Sing}}(M;\mathbb{R}) \;:=\; \ker\delta/\mathrm{Im}\delta$$

を M の p 次元 Singuler Cohomology 群という.
さて, σ を M 上の p-simplex, ω を σ のある近傍上で定義された p-form とし, ω の σ 上の積分を定義しよう (以下ほとんどの場合, ω は C^∞ なものを考えるが, 次の $p = 0$ の場合の定義においては連続として十分).
$p = 0$ の場合, σ は M 上の点, ω は関数であるから,

$$\int_\sigma \omega \;=\; \omega(\sigma(0))$$

と定義する. $p \geq 1$ の場合, p-simplex $\sigma : \Delta^p \longrightarrow M$ は C^∞ に拡張されるから, σ 上の p-form ω は Δ^p 上に pull-back される. つまり

$$\int_\sigma \omega \;:=\; \int_{\Delta^p} \sigma^*\omega$$

と定義する. これは p-chain $c = \sum a_i\sigma_i$ へ線形に拡張される ;

$$\int_c \omega \;:=\; \sum a_i \int_{\sigma_i} \omega.$$

証明はしないが次は基本的な結果である.

Thoerem 2.5.1 (Stokes (The Singuler case))

c を多様体 M 上の p-chain ($p \geq 1$) とし, ω を c のある近傍上で定義された p-form とすれば,

$$\int_{\partial c} \omega \;=\; \int_c d\omega.$$

§3　de Rham's Theorem

3.1　Main Theorem

$p \geq 0$ に対して，$S_p(M;\mathbb{R}) \times \Omega^p(M)$ 上の関数を

$$\begin{array}{rcl} S_p(M;\mathbb{R}) \times \Omega^p(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (c, \omega) & \longmapsto & \displaystyle\int_c \omega \end{array}$$

により定義し，この値を $< c, \omega >$ と書くことにする. 前述の Stokes の定理は,

$$< \partial c, \omega > = < c, d\omega >, \quad c \in S^p(M;\mathbb{R}) \ \ \omega \in \Omega^p(M)$$

を意味する. これより,

$$\begin{array}{rcl} c - c' \ \in \ \mathrm{Im}\,\partial, \ \omega \ \in \ \ker d & \Longrightarrow & < c, \omega > = < c', \omega > \\ c \ \in \ \ker \partial, \ \omega - \omega' \ \in \ \mathrm{Im}\, d & \Longrightarrow & < c, \omega > = < c, \omega' > \end{array}$$

であるから，代表元のとり方に依らずに

$$\begin{array}{rcl} H_{\mathrm{Sing},p}(M;\mathbb{R}) \times H^p_{\mathrm{DR}}(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ([c], [\omega]) & \longmapsto & \displaystyle\int_c \omega \end{array}$$

が定義されるのである. さて，$[\omega] \in H^p_{\mathrm{DR}}(M)$ を固定しよう. このとき，$[\omega]$ に対して $H_{\mathrm{Sing},p}(M;\mathbb{R})$ 上の線形関数

$$\begin{array}{rcl} H_{\mathrm{Sing},p}(M;\mathbb{R}) & \xrightarrow{k_p^*([\omega])} & \mathbb{R} \\ c & \longmapsto & \displaystyle\int_c \omega \end{array}$$

を定義する. ここに，$k_p^*([\omega]) := < \ , \omega >$ である. つまり，$k_p^*([\omega]) \in H^p_{\mathrm{Sing}}(M;\mathbb{R})$ であるから，以上により線形写像

$$k_p^* \ : \ H^p_{\mathrm{DR}}(M) \quad \longrightarrow \quad H^p_{\mathrm{Sing}}(M;\mathbb{R})$$

が定義できた. これを de Rham 準同型という. ここに, $k_p : \Omega^p(M) \to S^p(M;\mathbb{R})$ から誘導されたという意味で k_p^* なる記号を用いた. Stokes の定理によりこの準同型は Well-defined

である．また Stokes の定理から容易に，$k_{p+1}(d\omega) = \delta k_p(\omega)$ ($p \geq 1$) つまり $k \circ d = \delta \circ k$ が分かるから，$k : \Omega^*(M) \to S^*(M;\mathbb{R})$ は cochain map である．よって可換図式

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{d} & \Omega^{p-1}(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^{p}(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^{p+1}(M) & \xrightarrow{d} & \cdots \\
 & & \downarrow k_{p-1} & & \downarrow k_p & & \downarrow k_{p+1} & & \\
\cdots & \underset{\delta}{\to} & S^{p-1}(M;\mathbb{R}) & \underset{\delta}{\to} & S^{p}(M;\mathbb{R}) & \underset{\delta}{\to} & S^{p+1}(M;\mathbb{R}) & \underset{\delta}{\to} & \cdots
\end{array}
$$

従って，cochain map

$$k^* \ : \ H^*_{\mathrm{DR}}(M) \ \to \ H^*_{\mathrm{Sing}}(M;\mathbb{R})$$

誘導する．

Remark)

定理の証明の前に，単体分割可能な多様体について思い出そう．多様体 M の C^∞ 単体分割を $\pi : |K| \to M$ とする．このとき，cochain map $k : H^*_{\mathrm{DR}}(M) \to H^*(K;\mathbb{R})$ は同型

$$k^* \ : \ H^*_{\mathrm{DR}}(M) \ \cong \ H^*(K;\mathbb{R})$$

を誘導する．これから定理の主張が成り立つことは，次のようにして分かる．
K の任意 p-simplex $\sigma = \langle \alpha_0 \ldots \alpha_p \rangle$ (順序は，$\alpha_0 < \cdots < \alpha_p$ とする) に対して chain map $S_*(M;\mathbb{R}) \to C_*(K;\mathbb{R})$ が定まり、これは cochain map $C^*(K;\mathbb{R}) \to S^*(M;\mathbb{R})$ を誘導し，更にこれから Cohomology の同型,

$$H^*(K;\mathbb{R}) \ \cong \ H^*_{\mathrm{Sing}}(M;\mathbb{R})$$

が誘導される．よって次の可換図式を得る．

$$
\begin{array}{ccc}
 & & H^*_{\mathrm{Sing}}(M;\mathbb{R}) \\
 & \nearrow & \\
H^*_{\mathrm{DR}}(M) & & \wr\| \\
 & \searrow & \\
 & & H^*(K;\mathbb{R})
\end{array}
$$

つまり,

$$H^*_{\mathrm{DR}}(M) \ \cong \ H^*(K;\mathbb{R}) \ \cong \ H^*_{\mathrm{Sing}}(M;\mathbb{R}).$$

ところで，前節で述べてた可縮な被覆 $\mathfrak{U} = \{U_{\alpha_0,\ldots,\alpha_p}\}_{\alpha\in A}$ に対する M のČech Cohomology 群 $\check{H}^*(\mathfrak{U};\mathbb{R})$ は実 Cohomology 群 $H^*(K;\mathbb{R})$ と, 従って，$H^*_{\mathrm{Sing}}(M;\mathbb{R})$ と同型である．この同一視により,

$$U_{\alpha_0,\ldots,\alpha_p} \ \longleftrightarrow \ \langle \alpha_0 \ldots \alpha_p \rangle$$

なる対応を，今後断らずにつける．これにより，我々の主張は $H^*_{\mathrm{DR}}(M) \cong \check{H}^*(\mathfrak{U};\mathbb{R})$ に帰着されるのである．ところで，前節では同型

$$\varphi^* : H^p_{\mathrm{DR}}(M) \cong \check{H}^p(\mathfrak{U};\mathbb{R}) \ (p \geq 0)$$

の存在を証明したが，これだけでは証明として不十分である．これを簡単に説明しよう．簡単のため，前節で定義した double complex において，

$$\mathit{\Omega}^{q,p}(\mathfrak{U}) := C^q(\mathfrak{U};\Omega^p) \ (p,q \geq 0)$$

つまり，

$$\begin{aligned} d &: \mathit{\Omega}^{q,p}(\mathfrak{U}) \longrightarrow \mathit{\Omega}^{q,p+1}(\mathfrak{U}) \\ \delta &: \mathit{\Omega}^{q,p}(\mathfrak{U}) \longrightarrow \mathit{\Omega}^{q+1,p}(\mathfrak{U}). \end{aligned}$$

とし，前述の定理同様に次の図式を考える．

$$\begin{array}{ccccccc}
\uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow \\
C^{p+1}(\mathfrak{U};\mathbb{R}) & \overset{\iota}{\hookrightarrow} & \mathit{\Omega}^{p+1,0}(\mathfrak{U}) & \overset{d}{\longrightarrow} & \cdots & \overset{d}{\longrightarrow} & \mathit{\Omega}^{p+1,p}(\mathfrak{U}) \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow \\
C^{p}(\mathfrak{U};\mathbb{R}) & \overset{\iota}{\hookrightarrow} & \mathit{\Omega}^{p,0}(\mathfrak{U}) & \overset{d}{\longrightarrow} & \cdots & \overset{d}{\longrightarrow} & \mathit{\Omega}^{p,p}(\mathfrak{U}) \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow \\
C^{p-1}(\mathfrak{U};\mathbb{R}) & \overset{\iota}{\hookrightarrow} & \mathit{\Omega}^{p-1,0}(\mathfrak{U}) & \overset{d}{\longrightarrow} & \cdots & \overset{d}{\longrightarrow} & \mathit{\Omega}^{p-1,p}(\mathfrak{U}) \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow \\
C^{0}(\mathfrak{U};\mathbb{R}) & \overset{\iota}{\hookrightarrow} & \mathit{\Omega}^{0,0}(\mathfrak{U}) & \overset{d}{\longrightarrow} & \cdots & \overset{d}{\longrightarrow} & \mathit{\Omega}^{0,p}(\mathfrak{U}) \\
& & & & & & \| \\
& & & & & & \Omega^p(M)
\end{array}$$

同型 $\varphi^*_p : H^p_{\mathrm{DR}}(M) \to \check{H}^p(\mathfrak{U};\mathbb{R})$ は次のようにして構成された．
$[\omega] = [\omega^{(0,p)}] \in H^p_{\mathrm{DR}}(M) = \mathit{\Omega}^{0,p}(\mathfrak{U})$ を代表する閉形式 $\omega^{(0,p)} \in \Omega^p(M)$ をとる．次に，$d\vartheta^{(0,p-1)} - \omega^{(0,p)}$ なる $\vartheta^{(0,p-1)} \in \mathit{\Omega}^{0,p-1}(\mathfrak{U})$ をとり，以下帰納的に $\delta\vartheta^{(i-1,p-i-1)} = d\vartheta^{(i,p-i-1)} =: \omega^{(i,p-i-1)}$ なる $\vartheta^{(i,p-i-1)} \in \mathit{\Omega}^{i,p-i-1}(\mathfrak{U})$ をとる．そして，$\delta\vartheta^{(p-1,0)} = \iota(c)$ なる $c \in C^p(\mathfrak{U};\Omega^0) \cong C^p(K;\mathbb{R})$ をとれば，$c \in \ker\delta$ であり Cohomology class $\varphi^*_p([\omega]) = [c] \in H^p(K;\mathbb{R}) \cong H^p_{\mathrm{Sing}}(M;\mathbb{R})$ が定まる．
そして，写像 $k^*_p : H^p_{\mathrm{DR}}(M) \to H^p(K;\mathbb{R})$ は次のような構成になっている．
$[\omega] \in H^p_{\mathrm{DR}}(M)$ を代表する閉形式 ω をとる．K の向き付けられた任意 p-simplex $\sigma =$

$\langle \alpha_0, \ldots, \alpha_p \rangle$ に対して,

$$k_p^*(\omega)(\sigma) \;=\; \int_\sigma \omega$$

とすれば，cocycle $k_p^*(\omega) \in C^p(K; \mathbb{R})$ を定義する.
さて，同一視 $\check{H}^p(\mathfrak{U}; \mathbb{R}) \cong H^p(K; \mathbb{R})$ のもと，二つの写像

$$\begin{aligned} \varphi_p^* &: H^p_{\mathrm{DR}}(M) \longrightarrow \check{H}^p(\mathfrak{U}; \mathbb{R}) \\ k_p^* &: H^p_{\mathrm{DR}}(M) \longrightarrow H^p(K; \mathbb{R}) \end{aligned}$$

が本質的に等しいことが示されれば，同型 $H^p_{\mathrm{DR}}(M) \cong H^p_{\mathrm{Sing}}(M; \mathbb{R})$ の存在を証明できる。つまり,

Thoerem 3.1.1 (de Rham)

de Rham 準同型 k_p^* $(p \geq 0)$ は同型である；

$$H^p_{\mathrm{DR}}(M) \;\cong\; H^p_{\mathrm{Sing}}(M; \mathbb{R}), \;\; p \geq 0.$$

Proof)

次を示せばよい；

$$k_p^* \;=\; (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \, \varphi_p^* \quad (p \geq 0).$$

すなわち，図式

$$\begin{array}{ccc} & & \check{H}^p(\mathfrak{U}; M) \\ & \nearrow & \\ H^*_{\mathrm{DR}}(M) & & \wr\| \\ & \searrow & \\ & & H^*(K; \mathbb{R}) \end{array}$$

は符号を除いて可換である.
$\varepsilon_p = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}}$ とおき,

$$k_p^*([\omega]) \;=\; [c_0], \;\; \varphi_p^*([\omega]) \;=\; [c]$$

なる c_0, $c \in C^p(K; \mathbb{R})$ $(\partial c_0 = 0, \; \partial c = 0)$ を固定する．これまでの議論から主張は c_0 と $\varepsilon_p c$ が cohomologous であることと同値である.
さて、K の向き付けられた任意 p-simplex を $\langle \alpha_0 \ldots \alpha_p \rangle$ とおく．$\eta_i \in C^{p-1}(K; \mathbb{R})$ を

$$\lambda_i(\langle \alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1} \rangle) \;=\; \int_{\langle \alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1} \rangle} d\eta_i(\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_i)$$

で定義するとき，

$$c_0 \ + \sum_{0\le i\le p-1} \varepsilon_{i+1}\delta\lambda_i \ = \ \varepsilon_i c$$

であることを示せば十分である．

Stokes の定理から，

$$\begin{aligned} c_0(\langle\alpha_0 \dots \alpha_p\rangle) &= \int_{\langle\alpha_0\dots\alpha_p\rangle} \omega \ = \ \int_{\langle\alpha_0\dots\alpha_p\rangle} d\eta_0(\alpha_0) \\ &= \sum_{0\le i\le p} (-1)^i \int_{\langle\alpha_0\dots\hat{\alpha}_i\dots\alpha_p\rangle} \eta_0(\alpha_0) \end{aligned}$$

が分かる．さて，cochain $\lambda_0 \in C^{p-1}(K;\mathbb{R})$ を次で定義する．

$$\lambda_0(\langle\alpha_0 \dots \alpha_{p-1}\rangle) \ = \ \int_{\langle\alpha_0\dots\alpha_{p-1}\rangle} \eta_0(\alpha_0).$$

このとき，

$$\begin{aligned} \delta\lambda_0(\langle\alpha_0 \dots \alpha_p\rangle) &= \sum_{0\le i\le p} (-1)^i \lambda_0(\langle\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_p\rangle) \\ &= \int_{\langle\alpha_1\dots\alpha_p\rangle} \eta_0(\alpha_1) \ + \sum_{1\le i\le p} (-1)^i \int_{\langle\alpha_0\dots\hat{\alpha}_i\dots\alpha_p\rangle} \eta_0(\alpha_0) \end{aligned}$$

よって次を得る．

$$\begin{aligned} c_0(\langle\alpha_0 \dots \alpha_p\rangle) \ - \ \delta\lambda_0(\langle\alpha_0 \dots \alpha_p\rangle) &= \int_{\langle\alpha_0\dots\alpha_p\rangle} \eta_0(\alpha_0) \ - \int_{\langle\alpha_0\dots\alpha_p\rangle} \eta_0(\alpha_1) \\ &= -\int_{\langle\alpha_0\dots\alpha_p\rangle} d\eta_1(\alpha_0\alpha_1) \\ &= \sum_{1\le i\le p} (-1)^i \int_{\langle\alpha_0\dots\hat{\alpha}_i\dots\alpha_p\rangle} \eta_1(\alpha_0\alpha_1) \end{aligned}$$

また，同様に $\lambda_1 \in C^{p-1}(K;\mathbb{R})$ を定義し，次を得る．

$$\begin{aligned} \delta\lambda_1(\langle\alpha_0 \dots \alpha_1\rangle) &= \sum_{0\le i\le p} (-1)^i \lambda_1(\langle\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_p\rangle) \\ &= \int_{\langle\alpha_2\dots\alpha_p\rangle} \eta_1(\alpha_1\alpha_2) \ - \int_{\langle\alpha_2\dots\alpha_p\rangle} \eta_1(\alpha_0\alpha_2) \ + \sum_{2\le i\le p} (-1)^i \int_{\langle\alpha_1\dots\hat{\alpha}_i\dots\alpha_p\rangle} \eta_1(\alpha_0\alpha_1) \end{aligned}$$

従って，次を得る．

$$
\begin{aligned}
(c_0 - \delta\lambda_0 - \delta\lambda_1)(\langle\alpha_0\ldots\alpha_p\rangle) &= \int_{\langle\alpha_2\ldots\alpha_p\rangle} \eta_1(\alpha_0\alpha_2) - \eta_1(\alpha_0\alpha_1) - \eta_1(\alpha_1\alpha_2) \\
&= -\int_{\langle\alpha_2\ldots\alpha_p\rangle} d\eta_2(\alpha_0\alpha_1\alpha_2) \\
&= -\sum_{2\leq i\leq p}(-1)^i \int_{\langle\alpha_2\ldots\hat{\alpha}_i\ldots\alpha_p\rangle} \eta_2(\alpha_0\alpha_1\alpha_2)
\end{aligned}
$$

以上の操作を，以後帰納的に続ければ次を得ることは容易に分かるであろう．

$$
c_0 + \sum_{1\leq i\leq p-1} \varepsilon_{i+1}\delta\lambda_i = \varepsilon_i c.
$$

よって定理は証明された． □

3.2 de Rham's Theorem

以上で，本稿の目標“ de Rham の定理の証明 ”は達成されたが，最後にこの定理の一般形を述べて終わる．これは，de Rham Cohomology 環と Singuler Cohomology 環にそれぞれ積構造が入れることにより，前定理を用いて証明される．大抵このような定理の場合，各 Cohomology 群が同型ならば，その同型は Chomology 環の同型対応を誘導する。証明は Warner [4] を見よ．この本では Sheaf Cohomology の理論を用いてあるが，その方が全体としてまとまりがよい．

de Rham 準同型 $k_p^* : H^p_{\mathrm{DR}}(M) \to H^p_{\mathrm{Sing}}(M;\mathbb{R})$ は環としての同型対応を導く．つまり，

Thoerem 3.2.1 (de Rham)

de Rham 準同型 k^* は環同型である;

$$
\bigoplus_{p\geq 0} H^p_{\mathrm{DR}}(M) \cong \bigoplus_{p\geq 0} H^p_{\mathrm{Sing}}(M;\mathbb{R}).
$$

□

参考文献

[1] 小林昭七. 接続の微分幾何とゲージ理論. 裳華房,1989

[2] 村上信吾. 多様体. (共立数学講座１９) 共立出版，1989

[3] 中岡稔. 位相幾何学–ホモロジー論–. 共立出版，1999

[4] Warner,Frank.W *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Graduate Text in Mathematics,Springer-Verlag,New York,2000

[5] Weil.A *Sur les théorèmes de de Rham*. Comment.Math.Helv,26,1952,119-145