2005 年度幾何学 A　担当：田丸

0　幾何学 A について

幾何学 A および同演習では, 曲線や曲面を扱います. 曲線や曲面は目で見ることが出来ますし, 身の回りにいくらでもあります. 最近ではコンピュータを使って簡単に曲面の絵を描くことができます. しかし, この講義では, 単に絵を描ければ良しではなく,

曲線や曲面を「数学的に」扱うことを目標とします.

数学的に扱うことによって, 曲線や曲面に関する様々な問題や疑問の解決が可能になります. 例えば, 道路をどこに設置するかというのは平面曲線の問題です（高低差も考慮すれば空間曲線ですが）. 地球の表面は大雑把に言って球面ですし, 地図を作成することは球面から平面への写像を構成することです. シャボン玉が丸くなるのにも, マンホールの蓋が円形であることにも数学的な理由があります. また, まだ未解決の問題もいくつもあります.

講義のテキストおよび参考書として以下のものを指定します:

教科書：「曲線と曲面」（梅原雅顕・山田光太郎 共著, 裳華房）

参考書：「多様体」（荻上紘一 著, 共立出版）

もちろん購入を強制するものではありませんが, どちらも非常に良い本ですので, この講義の履修が終わった後でも参考になるかも知れません. ちなみに講義は教科書に完璧に沿って行われる訳ではありません.

成績の評価基準は唯一つ, 「曲線と曲面を数学的に扱うことが出来るかどうか」. それを確かめる為に試験およびレポートを課す予定です. 数学的に扱うとはどういうことか, は一言では説明できません. むしろそれが, これから半年間の講義に出席して（あるいは自力で本を読んで）理解して欲しいところです.

講義中に何か質問・コメント等がありましたら, 遠慮無く言って下さい. むしろ言ってくれると助かります. 講義時間以外でも遠慮無くどうぞ. 下記のアドレスに e-mail を送るなり研究室に来るなりして適当に捕まえて下さい. こちらからのテスト・レポート・休講等の連絡は, 基本的に授業時間中に全て伝えます. また, 各種お知らせ及びプリント等の公開を下記の web page で行う予定です. 昨年度に配布したプリントも置いてありますので, 興味のある方はダウンロードして下さい（今年度配布するプリントと大筋は同じですが, 若干の修正や並び替えや補足が入る予定です）.

田丸 博士（たまる ひろし）
研究室：理学部 C-613
e-mail：tamaru @ math.sci.hiroshima-u.ac.jp
url：http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~tamaru/index-j.html

1 曲線

この章では, 曲線について, より正確に言うと平面曲線と空間曲線を扱う. 微分幾何学とは, 空間や図形を微分という手法を用いて調べる学問である. このような考え方は, 関数 $y = f(x)$ のグラフを描く時に微分して増減表を書く, という形で高校の数学でも登場した. では, もっと一般の曲線を描く為には, どうすれば良いだろうか. また, もっと詳しく曲線の様子を調べるにはどうすれば良いだろうか. この章では, 以下のトピックを扱う.

(1) 曲線とは何か（定義）

(2) 曲線の表示方法（陰関数表示・陽関数表示・助変数表示）

(3) 曲線の曲がり具合（曲率）

(4) 曲線の分類

1.1 平面曲線の定義

まずは平面曲線の定義を紹介する. 関数 $y = f(x)$ のグラフは平面曲線の重要な例であるし, 円周 $x^2 + y^2 = 1$ なども平面曲線である. しかし, このような簡単な形では表せない平面曲線も, もちろん存在する. 以下, I を $\mathbb{R}$ の区間とする. I は開区間や閉区間の場合もあれば $\mathbb{R}$ そのものの場合もある（空集合や一点だけの集合は考えないことにする）.

定義 1.1.1

$\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ を連続写像とする. γ またはその像 $\gamma(I)$ が **なめらかな平面曲線** であるとは, 次を満たすこと :

(1) γ は C^∞-級, (2) $\forall t \in I$, t が I の内点ならば $\dfrac{d\gamma}{dt}(t) \neq (0,0)$.

γ またはその像 $\gamma(I)$ が **区分的になめらかな平面曲線** であるとは, 次を満たすこと :

(1) γ は 区分的に C^∞-級, (2) $\forall t \in I, \gamma$ が t で微分可能ならば $\dfrac{d\gamma}{dt}(t) \neq (0,0)$.

例えば円周 $x^2 + y^2 = 1$ はなめらかな平面曲線である. このことを証明する為には, 定義の条件を満たす γ が存在することを確かめれば良い. 一般に平面曲線 $\gamma(I)$ に対して, 関数 γ を **助変数表示** または **パラメータ表示** と呼ぶ. 助変数表示は一意ではないことに注意.

定義 1.1.2

C^∞-級関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に対し, 集合 $\{(x, f(x)) \mid x \in I\}$ を $y = f(x)$ **のグラフ** と呼ぶ. また, 集合 $\{(f(y), y) \mid y \in I\}$ を $x = f(y)$ **のグラフ** と呼ぶ.

C^∞-級関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に対し, $y = f(x)$ のグラフおよび $x = f(y)$ のグラフはなめらかな平面曲線である. このことも, 適当な助変数表示を見付けることで証明される.

1.2　平面曲線の陽関数表示・陰関数表示

平面曲線は, 定義から助変数表示されているが, ここではその他の表示方法を解説する. 平面曲線を調べる際には, 目的に応じて便利な表示方法に適宜変形することが重要. そのような変形が（局所的には）可能であることを, この節では証明する.

定義 1.2.1

なめらかな関数 f のグラフ（$y = f(x)$ または $x = f(y)$）に対し, $y = f(x)$ （または $x = f(y)$）をその平面曲線の **陽関数表示** という. また, なめらかな 2 変数関数 F に対し, $F(x, y) = 0$ を満たす点の全体が平面曲線であるとき, $F(x, y) = 0$ をその平面曲線の **陰関数表示** という.

「助変数表示 $\Leftrightarrow$ 陽関数表示 $\Leftrightarrow$ 陰関数表示」という対応関係を証明していく（正確にはこの対応は局所的なものである）. 「助変数表示 $\Leftarrow$ 陽関数表示」は容易. 「助変数表示 $\Rightarrow$ 陽関数表示」は, 次の定理から得られる.

定理 1.2.2

なめらかな平面曲線 $\gamma : I \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (x(t), y(t))$ に対し,

(1) $x'(t_0) \neq 0$ なら $\gamma(t)$ は t_0 の近傍で $y = f(x)$ のグラフとなる, i.e., $\exists I' : t_0$の近傍, $\exists x^{-1} : x(I') \to I' : x$ の逆関数 s.t. $f := y \circ x^{-1}$, $\gamma(I') = \{(s, f(s)) \mid s \in x(I')\}$.

(2) $y'(t_0) \neq 0$ なら $\gamma(t)$ は t_0 の近傍で $x = f(y)$ のグラフとなる.

証明には逆関数定理を使う. なめらかな平面曲線は $(x'(t_0), y'(t_0)) \neq 0$ を満たしているので, 上の定理の (1) または (2) の少なくともどちらかは成立. よって, 任意の点の近傍はグラフとして表すことが出来る. 例えば円 $x^2 + y^2 = 1$ は, 一つの関数のグラフで表すことは出来ないが, 4 つの関数のグラフを合わせたもので表すことが可能である.

次に陽関数表示と陰関数表示の関係を調べる. 「陽関数表示 $\Leftarrow$ 陰関数表示」は容易. 「陽関数表示 $\Rightarrow$ 陰関数表示」は, 次の陰関数定理から得られる.

定理 1.2.3 (陰関数定理)

C^∞-級関数 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対し, 集合 $F(x, y) = 0$ およびその上の点 (x_0, y_0) を考える.

(1) $\frac{\partial}{\partial x} F(x_0, y_0) \neq 0$ なら $F(x, y) = 0$ は (x_0, y_0) の近傍で $x = f(y)$ のグラフ, i.e., $\exists U : (x_0, y_0)$ の近傍, $\exists f : I \to \mathbb{R} : C^\infty$ s.t. $\forall (x, y) \in U$, $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = f(y)$.

(2) $\frac{\partial}{\partial y} F(x_0, y_0) \neq 0$ なら $F(x, y) = 0$ は (x_0, y_0) の近傍で $y = f(x)$ のグラフとなる.

一般に $F(x, y) = 0$ で表された図形は平面曲線であるとは限らない（例えば, $F(x, y) = x^2 + y^2 = 0$ は原点のみである）. 陰関数定理より, $(\frac{\partial}{\partial x} F(x_0, y_0), \frac{\partial}{\partial y} F(x_0, y_0)) \neq (0, 0)$ を満たす点の近傍では $F(x, y) = 0$ は関数のグラフで表せる, すなわちなめらかな平面曲線である.

1.3 平面曲線の曲率

定義 1.3.1

平面曲線 $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ の $\gamma(t)$ での曲率 $\kappa(t)$ を次で定義する: $\kappa(t) := \det(\gamma', \gamma'')/|\gamma'|^3$.

この節では, 平面曲線の曲率を調べる. 曲率の重要な性質の一つは, (符号を除いて) 助変数表示の方法に依存しないことである.

定義 1.3.2

$\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ を平面曲線, $t : I' \to I$ を単調増加な C^∞-同相とする. このとき, $\widetilde{\gamma} := \gamma \circ t : I' \to \mathbb{R}^2$ を <u>γ **の** t **によるパラメータ変換**</u> と呼ぶ.

もちろん $\widetilde{\gamma}$ は平面曲線であり, γ と同じ曲線 (の異なる助変数表示) を与える. t が単調増加であるという条件は, 平面曲線の「向き」を保つことを意味している.

命題 1.3.3

平面曲線 $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ の曲率 $\kappa_\gamma(t)$ は, パラメータ変換に依らない, i.e., $\forall \widetilde{\gamma} = \gamma \circ t : I' \to \mathbb{R}^2$: パラメータ変換, $\forall u \in I'$, $\kappa_{\widetilde{\gamma}}(u) = \kappa_\gamma(t(u))$.

次に, 何故これで曲がり具合が分かるか, について考える. 「κ は決まった速度で走った時の加速度 (横G) の大きさを表す」というのが, 一つの説明.

定義 1.3.4

平面曲線 $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ が <u>**弧長パラメータ表示**</u> とは, $|\gamma'| = 1$ が成立すること.

命題 1.3.5

全ての平面曲線 $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ は, パラメータ変換によって弧長パラメータ表示できる, i.e., $\exists t : I' \to I$: パラメータ変換 s.t. $\widetilde{\gamma} := \gamma \circ t$: 弧長パラメータ表示.

弧長パラメータ表示とは「曲線の上を速度 1 で走る」ことに対応し, 命題は「曲線の上を速度 1 で走ることが出来る」ことを主張する. $\mathbf{e}(s) := (x'(s), y'(s))$ を <u>**単位接ベクトル**</u>, $\mathbf{n}(s) := (-y'(s), x'(s))$ を (左向きの) <u>**単位法ベクトル**</u> と呼ぶ.

命題 1.3.6

弧長パラメータ表示された平面曲線 γ に対し, $\gamma''(s) = \kappa(s) \cdot \mathbf{n}(s)$.

何故上で定義した曲率で曲がり具合が分かるか, に対するもう一つの説明は, 「接している円の半径を表すから」である.

定義 1.3.7

弧長パラメータ表示された平面曲線 γ に対し, <u>$\gamma(s)$ **での曲率円**</u> を次で定義する:

(i) $\kappa(s) \neq 0$ のとき, 中心が $\gamma(s) + \mathbf{n}(s)/\kappa(s)$, 半径が $1/|\kappa(s)|$ の円,

(ii) $\kappa(s) = 0$ のとき, $\gamma(s)$ での接線.

命題 1.3.8

平面曲線 γ と $\forall s$ に対し, $\gamma(s)$ での曲率円は $\gamma(s)$ で 2 次の接触をする, i.e., 適当なパラメータ変換の元で 2 階までの微分が等しい.

ちなみに, 道路等で見掛ける「$R = 400m$」などの数字は, 曲率円の半径 $1/|\kappa|$ を表している. カーブの曲がり具合が半径 $1/|\kappa|$ の円と同じ, という意味で直感的に分かりやすい.

1.4 平面曲線の基本定理

前節では曲線に対して曲率を定義したが, ここでは「与えられた曲率を持つ曲線」を考察する. 平面曲線の基本定理は, 次のことを主張している: 任意の関数が与えられたとき, その関数を曲率とする曲線が存在し, しかもそれは本質的に唯一つである.

定理 1.4.1 (平面曲線の基本定理)

(1) $\forall \kappa : I \to \mathbb{R} : C^\infty$, $\exists \gamma : I \to \mathbb{R}^2$: 曲線の弧長パラメータ表示 s.t. $\kappa = \kappa_\gamma$.
(2) γ_1, γ_2 を曲線の弧長パラメータ表示とする. 両者の曲率が一致するための必要十分条件は γ_1 と γ_2 は回転と平行移動で互いに写りあうこと.

(1) の証明は, γ を以下のように定めれば良い:

$$\gamma(s) := \int_0^s \left(\cos(\int_0^t \kappa(u)du),\ \sin(\int_0^t \kappa(u)du) \right) dt.$$

例えば $\kappa(s) = 0$ を代入すると直線, $\kappa(s) = a \neq 0$ を代入すると円になる. また, 曲率 $\kappa(s) = s$ を持つ曲線を **クロソイド曲線** と言う.

(2) の必要性を証明する為, 「回転と平行移動」を定式化する. 後の空間曲線や曲面でも登場するので, 一般の次元で定義しておく.

定義 1.4.2

次で定義される群を $\mathbb{R}^n$ の **等長変換群** または **合同変換群** と呼ぶ:

$$E(\mathbb{R}^n) := \{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : w \mapsto Aw + v \mid A \in O(n), v \in \mathbb{R}^n \}.$$

また, 次で定義される $E(\mathbb{R}^n)$ の部分群を, **向きを保つ合同変換群** または **運動群** と呼ぶ:

$$E^+(\mathbb{R}^n) := \{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : w \mapsto Aw + v \mid A \in SO(n), v \in \mathbb{R}^n \}.$$

ただしここで, $O(n) := \{ A \in M_n(\mathbb{R}^n) \mid {}^tAA = I_n \}$ は直交群, $SO(n) := \{ A \in O(n) \mid \det A = 1 \}$ は特殊直交群を表す. 特に $n = 2$ の場合を考えると, $E^+(\mathbb{R}^2)$ の各元 $g = (A, v)$ は, $(g \cdot \gamma)(s) := g \cdot \gamma(s)$ によって曲線を曲線に写す. 曲線論の基本定理にある「回転と平行移動で写りあう」とは, 運動群 $E^+(\mathbb{R}^2)$ の作用によって写りあう, という意味. (2) の証明は, 以下の補題を用いて示される.

補題 1.4.3

M_2 の作用は曲率を不変にする, i.e., $\forall g \in E^+(\mathbb{R}^2)$, $\forall \gamma$: 曲線, $\kappa_\gamma = \kappa_{g \cdot \gamma}$.

補題 1.4.4 (フルネの公式)

弧長パラメータ表示された曲線 γ と単位接ベクトル $\mathbf{e}(s)$, 単位法ベクトル $\mathbf{n}(s)$ に対し,

$$(\mathbf{e}(s), \mathbf{n}(s))' = (\mathbf{e}(s), \mathbf{n}(s)) \begin{pmatrix} & -\kappa(s) \\ \kappa(s) & \end{pmatrix}.$$

1.5 空間曲線

空間曲線, すなわち $\mathbb{R}^3$ の中の曲線について考える. 空間曲線に対して「曲率」「捩率」という量を定義する. これらは回転と平行移動によって不変であり, さらに平面曲線の基本定理と同様のことが成立する.

定義 1.5.1

連続写像 $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ またはその像 $\gamma(I)$ が **なめらかな空間曲線** とは, 次を満たすこと :

(1) γ は C^∞-級, (2) $\forall t \in I$, $\gamma'(t) \neq (0,0,0)$.

「区分的になめらかな空間曲線」も, 平面曲線の場合と同様に定義できる.

定義 1.5.2

空間曲線 γ に対し, $\gamma(t)$ における曲率 $\kappa(t)$ と捩率 $\tau(t)$ を次で定義する:

$$\kappa(t) := \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3}, \quad \tau(t) := \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t))}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^2}$$

「捩率」は「れいりつ」と読む(「捩」は「ねじれ」を意味する).

定義 1.5.3

$\mathbb{R}^3 \ni \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3), \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ に対し, 次を $\mathbf{v}$ と $\mathbf{w}$ の **ベクトル積** と呼ぶ:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} := \left(\begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_3 & w_3 \\ v_1 & w_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \right).$$

空間曲線に対しても平面曲線と同様にして「パラメータ変換」が定義出来る. 曲率と捩率はパラメータ変換をしても変わらず, また任意の空間曲線はパラメータ変換によって弧長パラメータ表示(すなわち $|\gamma'| = 1$ となる助変数表示)出来る.

定義 1.5.4

弧長パラメータ表示された空間曲線 γ が $\gamma'' \neq 0$ をみたすとき, $\mathbf{e}(s) := \gamma'(s)$ を **単位接ベクトル**, $\mathbf{n}(s) := \mathbf{e}'(s)/|\mathbf{e}'(s)|$ を **主法線ベクトル**, $\mathbf{b}(s) := \mathbf{e}(s) \times \mathbf{n}(s)$ を **従法線ベクトル** と呼ぶ.

補題 1.5.5 (フルネ-セレの公式)

弧長パラメータ表示された空間曲線 γ に対し,

$$(\mathbf{e}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))' = (\mathbf{e}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)) \begin{pmatrix} & -\kappa(s) & \\ \kappa(s) & & -\tau(s) \\ & \tau(s) & \end{pmatrix}.$$

定理 1.5.6 (空間曲線の基本定理)

(1) $\forall \kappa, \tau : I \to \mathbb{R} : C^\infty$, $\exists \gamma : I \to \mathbb{R}^3$: 空間曲線の弧長パラメータ表示 s.t. $\kappa = \kappa_\gamma$, $\tau = \tau_\gamma$. (2) γ_1, γ_2 を曲線の弧長パラメータ表示とする. 両者の曲率と捩率が共に一致するための必要十分条件は γ_1 と γ_2 は $E^+(\mathbb{R}^3)$ の作用で互いに写りあうこと.

ここで $E^+(\mathbb{R}^3)$ の作用とは, 回転と平行移動の合成であることに注意.

2　曲面

この講義の後半は曲面について考えます．非常に大雑把に言って，平面曲線が $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ で表されていたのと同様に，曲面は $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ で表されます．このような写像の微分を使って曲線や曲面を調べるのですが，1 変数関数の微分と 2 変数関数の微分の違いから，曲面の方が当然ながら扱いが難しくなります（偏微分を使います）．しかし，「何を調べるのか」という粗筋は同じである，ということを意識して欲しいと思います．すなわち，

(1) 曲面とは何か（定義）

(2) 曲面の陽関数表示と陰関数表示

(3) 曲面の曲がり具合を調べる（曲率）

曲面論は，それ自身現在でも活発に研究が続けられている分野ですが，これから幾何学を勉強すると現れるであろう「多様体」の基礎となる，という意味でも非常に重要です．そのような先々のテーマに，この講義で行った曲面論の話が役に立つと嬉しく思います．

2.1　曲面の定義

D を $\mathbb{R}^2$ の領域（連結開集合）とする．

定義 2.1.1

$p : D \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ を連続写像とする．p またはその像 $p(D)$ が **曲面片** であるとは，次をみたすこと:

(1) p は C^∞-級,　(2) $\forall (u, v) \in D,\ \mathrm{rank}(p_u(u, v), p_v(u, v)) = 2$.

ここで，記号 p_u は p の u による偏微分を表す，すなわち，

$$p_u = (x_u, y_u, z_u) = (\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}), \quad p_v = (x_v, y_v, z_v) = (\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}).$$

定義 2.1.2

$\mathbb{R}^3$ の連結部分集合 M が **曲面** であるとは，M が曲面片の和集合となること，i.e., $\forall m \in M$, $\exists p : D \to \mathbb{R}^3$: 曲面片 s.t. $m \in P(D) \subset M$.

曲面片 $p(D)$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合 D と「同じ」（正確には微分同相）であり，曲面はそれらを貼り合せたものである（特に曲面片は曲面だが，曲面が一つの曲面片で表せるとは限らない）．幾何学では「多様体」という概念が重要であるが，n 次元多様体は「$\mathbb{R}^n$ の開集合を貼り合せたもの」として定義される．ちなみに曲面は（上の曲面の定義では特異点が存在する可能性があるが）2 次元多様体である．

定義 2.1.3

C^∞-関数 $f : D \to \mathbb{R}$ に対し，集合 $\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$ を $z = f(x, y)$ **のグラフ** と呼ぶ．$x = f(y, z)$ のグラフや $y = f(z, x)$ のグラフも同様に定義する．

命題 2.1.4

C^∞-関数 $f : D \to \mathbb{R}$ のグラフは曲面である．

2.2 [復習] 微分とは

ここで多変数関数の微分の復習を少ししておく. 微分という概念を把握することは曲面論を学ぶ上で必修である（2 変数くらいしか登場しないが）.

定義 2.2.1

D を $\mathbb{R}^m$ の開集合, $f : D \to \mathbb{R}^n$ を C^∞-関数とする. f の $p \in D$ での **微分** $(df)_p$ を次で定義する:

$$(df)_p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n : v \mapsto \lim_{t \to 0} \frac{f(p+vt) - f(p)}{t}.$$

このとき, 微分 $(df)_p$ は線形写像である. 標語的に言うと「微分＝線形近似」.

$\mathbb{R}^m$ の標準的な基底を $\{x_1, \ldots, x_m\}$ とすると, 定義から明らかに $(df)_p(x_i) = (\frac{\partial f}{\partial x_i})_p$ である. 偏微分係数とは, 微分の特別な方向の値である. また, $(df)_p$ は線形写像であるから, 基底を選ぶと行列表示できる. 特に $(df)_p$ の標準的な基底に関する行列表示を **Jacobi 行列** と呼び, $(Jf)_p$ で表す:

$$(Jf)_p = \begin{bmatrix} (\frac{\partial f_1}{\partial x_1})_p & \cdots & (\frac{\partial f_1}{\partial x_m})_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\frac{\partial f_n}{\partial x_1})_p & \cdots & (\frac{\partial f_n}{\partial x_m})_p \end{bmatrix}.$$

写像 f の性質と $(df)_p$ の性質に関係がある, ということを解析学で学んだ. 特に, $(df)_p$ の性質から f の（局所的な）性質が分かる, という定理が逆写像定理であった.

定理 2.2.2 (逆写像定理)

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を C^∞-写像とする. $(df)_p$ が線形同型ならば, f は点 p の周りで C^∞-同相.

$(df)_p$ が線形同型ということは, その行列表示 $(Jf)_p$ が逆行列を持つ（あるいは階数が n である）ことと同値. そのような書き方をしている本が多い.

2.3 曲面の陽関数表示・陰関数表示

曲線論の場合と同様に, 「助変数表示 $\leftrightarrow$ 陽関数表示 $\leftrightarrow$ 陰関数表示」という（局所的な）同値性が成り立つ.

命題 2.3.1

曲面 M は局所的にはグラフで書ける, i.e., $\forall m \in M$, $\exists U : M$ における m の近傍, $\exists f : D \to \mathbb{R} : C^\infty$ s.t. U は f のグラフ.

上の証明には逆関数定理を本質的に用いる. また, 陰関数定理より, 次が成り立つ.

命題 2.3.2

C^∞-関数 $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ が次の条件を満たすとき, $F(x, y, z) = 0$ で表される集合は曲面である: $\forall (x_0, y_0, z_0)$, $(F_x, F_y, F_z)_{(x_0, y_0, z_0)} \neq (0, 0, 0)$.

例えば球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ が曲面であることを証明する場合, 定義に従って（曲面片を具体的に決めて）証明するのは面倒であった. しかし, この命題を使えば証明は殆ど明らかである.

2.4 微分形式

曲面に対して「曲率」を定義する為には, 微分形式と呼ばれるものが必要になる. ここでは D を $\mathbb{R}^2$ の開集合として, その上の微分形式を考えることにする. $\mathbb{R}^n$ の開集合でも定義や議論は全く同様である.

定義 2.4.1

C^∞-写像 $\alpha : D \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ を D **上の** 1 **次微分形式 (1-form)** と呼ぶ.

ここで $\mathrm{End}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) := \{\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} :$ 線形$\}$ である. これは $\mathbb{R}^2$ の双対空間と一致し, 特に $\mathbb{R}^2$ と同一視することが出来る. 次は微分形式の例である.

定義 2.4.2

C^∞-関数 $f : D \to \mathbb{R}$ の **外微分** を次で定義する: $df : D \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) : p \mapsto (df)_p$.

$\mathcal{A}^1(D)$ で D 上の 1 次微分形式の全体を表す. $\mathrm{End}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ の代数的構造から, 次のような $\mathcal{A}^1(D)$ の代数的構造（和と関数倍）が定まる.

定義 2.4.3

$\alpha, \beta \in \mathcal{A}^1(D)$ および C^∞-関数 $f : D \to \mathbb{R}$ に対し, $\alpha + \beta, f\alpha \in \mathcal{A}^1(D)$ を次で定義:

$$(\alpha + \beta)_p := (\alpha)_p + (\beta)_p, \quad (f\alpha)_p := f(p) \cdot (\alpha)_p.$$

D 上の C^∞-関数全体の集合を $C^\infty(D)$ で表す. $C^\infty(D)$ は関数の和と積によって環になる. 上で定義した和と関数倍によって, $\mathcal{A}^1(D)$ は $C^\infty(D)$-加群である. 次に $\mathcal{A}^1(D)$ の「基底」を調べる.

定義 2.4.4

D の座標を (u, v) としたとき, 1 次微分形式 du および dv を, 次の関数の外微分で定義:

$$u : D \to \mathbb{R} : (u, v) \mapsto u, \quad v : D \to \mathbb{R} : (u, v) \mapsto v.$$

任意の関数の外微分は, du と dv の「一次結合」で表すことが出来る（ベクトル空間ではなく加群なので, スカラー倍ではなく関数倍となることに注意）.

命題 2.4.5

(1) $\forall p \in D,\ (du)_p(a, b) = a,\ (dv)_p(a, b) = b,$

(2) C^∞-関数 $f : D \to \mathbb{R}$ に対し, $df = f_u du + f_v dv.$

定義 2.4.6

$\alpha, \beta \in \mathcal{A}^1(D)$ に対し, $\alpha\beta : D \to S^2(\mathrm{End}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}))$ を次で定義:

$$(\alpha\beta)_p(X, Y) := (1/2)(\alpha_p(X)\beta_p(Y) + \alpha_p(Y)\beta_p(X)).$$

ここで, $S^2(\mathrm{End}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})) := \{\omega : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} :$ 双線形 $\mid \omega(X, Y) = \omega(Y, X)\}$ である. D から $S^2(\mathrm{End}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}))$ への C^∞-写像を D 上の **対称** 2 **次形式** と呼ぶ. 次節以降では, 曲面に対して対称 2 次形式を対応させ, それを用いて曲率を定義・計算していく.

2.5 第１基本形式・第２基本形式

ここでは, 曲面に対してある特別な微分形式（第 1 基本形式と第 2 基本形式）を定義する. 曲面の「曲率」は, これらの微分形式を用いて（次節で）定義される.

定義 2.5.1

曲面片 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ に対し, 次で定義される写像 ν を **単位法ベクトル場** と呼ぶ:

$$\nu : D \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto \frac{\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)}{|\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)|}.$$

曲面片に対して, 写像 φ の微分 $d\varphi$, 単位法ベクトル場 ν の微分 $d\nu$, という 2 つの微分形式が決まる. これらは D から $\mathrm{End}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ への写像であった.

定義 2.5.2

曲面片 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ の **第１基本形式**, **第２基本形式** を次で定義する:

$$\mathrm{I} := d\varphi \cdot d\varphi, \qquad \mathrm{II} := -d\nu \cdot d\varphi.$$

ここで $d\varphi \cdot d\varphi$ は, $d\varphi$ と $d\varphi$ の $\mathbb{R}^3$ での内積を表している. I および II は, D から $S^2(\mathrm{End}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}))$ への写像, すなわち対称 2 次形式である（対称であることは証明する必要がある）. 具体的な計算例は講義で紹介する.

これらの微分形式は, 曲線の場合と同様に「助変数表示の方法に依存しない」ことを示す. その為に「パラメータ変換」に相当する概念を定義する.

定義 2.5.3

曲面片 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ および C^∞-同相写像 $\psi : D' \to D$ に対し, $\varphi \circ \psi$ を φ の ψ による **座標変換** と呼ぶ. また, ψ が $\forall (u,v) \in D', \det(d\psi)_{(u,v)} > 0$ を満たすときには **正の座標変換**, $\forall (u,v) \in D', \det(d\psi)_{(u,v)} < 0$ を満たすときには **負の座標変換** と呼ぶ.

座標変換 $p \circ \phi$ も曲面片である. このような 2 通りの曲面片の表示があった場合に, 第 1 基本形式や第 2 基本形式はどちらの表示を使って求めても良い.

命題 2.5.4

曲面の第 1 基本形式は座標変換によって不変である. 第 2 基本形式は正の座標変換によって不変である.

負の座標変換によって, ν は -1 倍されることに注意（平面曲線の場合にも向き逆にすると曲率の符号が変わったことを思い出そう）.

命題 2.5.5

曲面片 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ に対し, 第 1 基本形式と第 2 基本形式は対称である. さらに,

(1) $E := \varphi_u \cdot \varphi_u, F := \varphi_u \cdot \varphi_v, G := \varphi_v \cdot \varphi_v$ とすると, $\mathrm{I} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$.

(2) $L := -\varphi_u \cdot \nu_u, M := -\varphi_u \cdot \nu_v, N := -\varphi_v \cdot \nu_v$ とすると, $\mathrm{II} = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$.

この式を第 1 基本形式・第 2 基本形式の定義としている本が多いが, この講義では違う定式化を行った. 因みにどちらの定義も同じであることは勿論, 具体的に求める際に行う計算も本質的に同じである（よってどちらで計算しても良い）.

2.6 ガウス曲率・平均曲率

この節では曲面の曲率を定義する．曲面には, ガウス曲率・平均曲率・主曲率など, いくつかの曲率がある．これらの曲率は全て次の型作用素を用いて定義される．

定義 2.6.1

曲面片 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ に対し, 次を満たす写像 $A : D \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ を **型作用素** と呼ぶ:

$$\forall (u,v) \in D,\ \forall X, Y \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{II}_{(u,v)}(X,Y) = \mathrm{I}_{(u,v)}(A_{(u,v)}X, Y).$$

D 上の点と曲面 M 上の点を同一視して, 型作用素 A を M からの写像と思うことが出来る（そのようにしている本が多い）．

定義 2.6.2

曲面片 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ に対し, $K : D \to \mathbb{R} : (u,v) \mapsto \det(A_{(u,v)})$ を **ガウス曲率**, $H : D \to \mathbb{R} : (u,v) \mapsto (1/2)\mathrm{tr}(A_{(u,v)})$ を **平均曲率** と呼ぶ.

これも D 上の点と曲面 M 上の点を同一視して, $\det(A_{(u,v)})$ を「M の $\varphi(u,v)$ におけるガウス曲率」と呼ぶことが多い（平均曲率についても同様）．さらに, $A_{(u,v)}$ の固有値を **主曲率** と呼ぶ. 実際の計算には, 次の行列表示が有効である．

命題 2.6.3

$\mathrm{I} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$, $\mathrm{II} = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ であるとき, 型作用素 A の標準的な基底に関する行列表示は,

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

以前に登場した $E^+(\mathbb{R}^3)$ の作用（i.e., 向きを保つ合同変換）を考える．曲線の場合と同様に, 曲面の曲率も回転と平行移動で不変である．

命題 2.6.4

$\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ を曲面片とし, $f \in E^+(\mathbb{R}^3)$ とする．このとき $\varphi' := f \circ \varphi$ も曲面片であり, φ と φ' それぞれのガウス曲率および平均曲率は一致する．

ちなみに向きを反対にする合同変換では, ガウス曲率は不変であり, 平均曲率は符号が変わる．便宜上, 以下の記号を使う：

$$R_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

定義 2.6.5

曲面片が **z-軸の周りの回転面** であるとは, 次が成立すること: $\forall\theta$, $\varphi(D) = R_\theta \varphi(D)$.

回転面は, xz-平面の曲線 $\gamma(u) = (x(u), z(u))$ を z-軸の周りに回転させたものとして得られ, $\varphi(u,v) := R_v(x(u), 0, z(u)) = (\cos\theta \cdot x(u), \sin\theta \cdot x(u), z(u))$ によって助変数表示できる．特に半径 r の球面は回転面であり, 次の曲面片をしての表示を持つ：

$$\varphi : (-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (r\cos u \cos v, r\cos u \sin v, \sin v).$$

2.7　第１基本形式の意味

第１基本形式 $\mathrm{I} = d\varphi \cdot d\varphi$ とは, 曲線の「接ベクトルの長さ」を測るものであり, これを用いると曲面上の曲線の長さを測ることが出来る. 曲面片 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ が未知だとしても, 第１基本形式の情報だけから曲面上の長さを測ることが出来る, ということが重要. これは直感的に言うと, 世界地図から実際の距離が計算できる, という意味.

補題 2.7.1

D 上のなめらかな曲線 $\gamma : I \to D$ に対し, $(d\varphi)_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = (\varphi \circ \gamma)'(t)$.

すなわち, $d\varphi$ は接ベクトルを接ベクトルに移す.

命題 2.7.2

$\gamma : [a, b] \to D$ をなめらかな曲線とする. 曲線 $\varphi \circ \gamma$ の長さ $L(\varphi \circ \gamma)$ は,

$$L(\varphi \circ \gamma) = \int_a^b \sqrt{\mathrm{I}_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}dt.$$

例えば球面 $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ に対し, 次のような曲面片を考える.

$$\varphi : \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3 \ : \ (u, v) \mapsto (\cos u \sin v, \sin u \cos v, \sin v)$$

S^2 上の点を D の点に対応させたものが, 通常良く見る世界地図である（正確には $S^2 - \{(0, 0, \pm 1)\}$ なので, 北極点と南極点は無い）. 地図上の距離と実際の距離は一般には異なるが, この地図を見れば実際の距離を（第１基本形式を用いて）計算することが出来る.

[講義で配布したプリントでは, ここに世界地図のコピーを載せました]

2.8 ガウスの驚異の定理, ガウス・ボンネの定理

この節では, 曲面論に於いて重要な定理をいくつか紹介する.

定理 2.8.1 (ガウスの驚異の定理 (Theorema egregium))

曲面のガウス曲率は第１基本形式のみで決まる（第２基本形式に依存しない）.

２つの曲面片 $\varphi_1, \varphi_2 : D \to \mathbb{R}^3$ に対し, 両者の第１基本形式が一致するとき, φ_1 と φ_2 は **等長的** であると言う. ガウスの驚異の定理により, 等長的ならば両者のガウス曲率は一致する. また, 曲面上の曲線の長さも第１基本形式から決まるので, 等長的ならば曲線の長さも一致する（文字通り「長さが等しい」）.

系 2.8.2

地球の正確な地図を作ることは不可能である.

地球を球面だと思うと, 正確な地図とは, 平面と等長的な球面の助変数表示である. このような助変数表示が存在したと仮定すると, ガウスの驚異の定理より球面と平面のガウス曲率は一致することになり, 矛盾が生じる.

定義 2.8.3

曲面 M 上のなめらかな曲線 $\gamma : I \to M$ が **測地線** であるとは, $[\gamma''(t)]^T = 0$ が成立すること. ここで $[\gamma''(t)]^T = 0$ は $\gamma''(t)$ の M に接する方向.

曲面 M 上の３つの測地線で囲まれた領域が単連結かつ有界閉集合であるとき, その領域を **測地三角形** と呼ぶ. また, $dA := |\varphi_u \times \varphi_v| dudv$ を **面積要素** と呼ぶ.

定理 2.8.4 (ガウス・ボンネの定理)

曲面 M 上の測地三角形 ΔABC に対し, $\angle A + \angle B + \angle C = \pi + \displaystyle\iint_{\Delta ABC} K dA.$

ガウス・ボンネの定理の $K = 0$ の場合が, 三角形の内角の和の公式である. また逆に, 三角形の内角の和を求めることにより, ガウス曲率 K が 0 かそうでないかが分かる（正確な測量技術があれば, 地球が平面でないことが証明できる）.

定理 2.8.5 (大域的ガウス・ボンネの定理)

M を閉曲面, $\chi(M)$ を M のオイラー数とすると, $\displaystyle\iint_M K dA = 2\pi\chi(M).$

曲面に対して, オイラー数は位相幾何的な性質であり, ガウス曲率は微分幾何的な性質である. 大域的ガウス・ボンネの定理は, その両者に関係があることを表している.