2005年度幾何学 D / 多様幾何基礎講義 B　担当：田丸

0　幾何学 D / 多様幾何基礎講義 B について

この講義では, 微分幾何学およびリーマン幾何学の入門的な解説を行います. 具体的には, 以下の内容を扱う予定です.

- 曲面, 超曲面,
- 多様体（ベクトル束, ベクトル場, 微分形式）,
- リーマン多様体,
- リー群,
- 定曲率空間,
- 部分多様体, . . .

もちろん全てを網羅することは到底不可能ですので, リーマン多様体あたりまでは丁寧に解説し, その後のことは様子を見ながら, トピックを選ぶか全体を概説するか, 決めていきたいと思います.

講義の参考書として, 以下のものを挙げておきます.

「微分幾何入門（上）（下）」, 落合卓四郎著, 東大出版会
「多様体の基礎」, 松本幸夫著, 東大出版会
「リーマン幾何学」, 酒井隆著, 裳華房

成績の評価基準は,「リーマン幾何学の基本的な定義や性質を理解しているか」によって判断します. それを確かめる為に, 試験またはレポートを課す予定です.

講義中に何か質問・コメント等がありましたら, 遠慮無く言って下さい. むしろ言ってくれると助かります. 講義時間以外でも遠慮無くどうぞ. 下記のアドレスに e-mail を送るなり研究室に来るなりして適当に捕まえて下さい. こちらからのテスト・レポート・休講等の連絡は, 基本的に授業時間中に全て伝えます. また, 各種お知らせ及びプリント等の公開を下記の web page で行う予定です.

田丸 博士（たまる ひろし）
研究室：理学部 C-613
e-mail：tamaru @ math.sci.hiroshima-u.ac.jp
url：http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~tamaru/index-j.html

1　超曲面と多様体

この章では, 多様体に関する諸概念を紹介することを目標とする．その為の方針として, 参考書「微分幾何入門 (上)」のものを採用する．すなわち, 多様体に関する諸概念を, 多様体の一般論として展開すると抽象的に成り過ぎる場合があるので, 曲面や超曲面の場合にはどうなっているかを紹介しながら, 解説していく．

1.1　微分

まずは多変数関数の微分の復習をする．微分とは線型近似であり, 微分はその写像の局所的な性質を反映している．本節では, 逆関数定理と陰関数定理を紹介するが, それらは「微分を調べれば写像の性質が分かる」というタイプの定理である．

定義 1.1.1 D を $\mathbb{R}^m$ の開集合, $f : D \to \mathbb{R}^n$ を C^∞-関数とする．f の $p \in D$ での **微分** $(df)_p$ を次で定義する:

$$(df)_p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n : v \mapsto \lim_{t \to 0} \frac{f(p+vt) - f(p)}{t}.$$

このとき, 微分 $(df)_p$ は線形写像である．また, $\mathbb{R}^m$ の標準的な基底を $\{x_1, \ldots, x_m\}$ とすると, 定義から明らかに $(df)_p(x_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$.

定義 1.1.2 $(df)_p$ の標準的な基底に関する行列表示を **Jacobi 行列** と呼び, $(Jf)_p$ で表す:

$$(Jf)_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p) \end{bmatrix}.$$

定理 1.1.3 (逆関数定理) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を C^∞-写像とし, $p \in \mathbb{R}^n$ とする．このとき, $(df)_p$ が線形同型ならば, f は点 p の周りで C^∞-同相写像.

$(df)_p$ が線形同型ということは, その行列表示 $(Jf)_p$ が逆行列を持つ (あるいは階数が n である) ことと同値. 教科書などではそのように書かれている場合が多い.

定理 1.1.4 (陰関数定理) $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を C^∞-写像とし, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ とする．このとき, $(dF\mid_{\{x_0\} \times \mathbb{R}^n})_{(x_0,y_0)}$ が線形同型ならば, 次が成立する:
$\exists W : \mathbb{R}^m \times \{y_0\}$ での (x_0, y_0) の開近傍, $\exists f : W \to \mathbb{R}^n : C^\infty$ s.t. $\forall x \in W,\ F(x, f(x)) = 0$.

ある集合が $F(x,y) = 0$ で表されている場合, その表示を **陰関数表示** と呼び, $y = f(x)$ で表されている場合, その表示を **陽関数表示** と呼ぶ．陰関数定理は, 与えられた陰関数表示に対して, それを陽関数表示することが出来る為の条件を与えている.

1.2　超曲面の定義

ここでは平面曲線や曲面の定義を復習し, 超曲面の定義を紹介する．大雑把に言って, 平面曲線とは $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ という写像であり, 曲面とは $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ という写像であった．超曲面はそれらの高次元版であり, $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ という写像で与えられる．注意すべきことを挙げておくと, ここで紹介する超曲面の定義には, 平面曲線や曲面の定義には登場しない条件が加わっている．それは, 超曲面が多様体となる為に必要な条件である．例えば, 曲線論や曲面論に於いては自己交叉を許容している（そうした方が理論がすっきりするから）が, 多様体論では許されないので, その可能性を排除する必要がある．

定義 1.2.1 開集合 $I \subset \mathbb{R}$ に対し, $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ が **平面曲線** であるとは, 次が成立すること:

(1) γ は C^∞-級,

(2) $\forall t \in I,\ \gamma'(t) \neq (0,0)$.

条件 (1) は曲線のなめらかさを要請している．また条件 (2) は, γ の像が「潰れない」ことを要請している（例えば $\gamma(t) = (0,0)$ などは平面曲線とは呼ばない）．自己交叉は許容する．

定義 1.2.2 開集合 $D \subset \mathbb{R}^2$ に対し, $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ が **曲面片** であるとは, 次が成立すること:

(1) φ は C^∞-級,

(2) $\forall (u,v) \in D,\ \mathrm{rank}(J\varphi)_(u,v) = 2$.

また, 曲面片の和集合を **曲面** と呼ぶ.

平面曲線の場合と同様に, 条件 (1) は曲面のなめらかさを要請し, 条件 (2) は φ の像が「潰れない」ことを要請している（例えば $\varphi(u,v) = (u,0,0)$ などは曲面片でない）．曲面の自己交叉は許容する．また曲面が曲面片の和集合として表されたとき, その共通部分に特異点が表れる可能性がある．

定義 1.2.3 $\mathbb{R}^{m+1} \supset M$ が **超曲面** (**hypersurface**) であるとは, 次が成立すること:
$\forall p \in M,\ \exists (U, \phi, V)$ s.t.

(1) $\mathbb{R}^m \supset U$: 開集合, $\phi : U \to \mathbb{R}^{m+1} : C^\infty$,

(2) $\forall q \in U,\ \mathrm{rank}(J\phi)_q = m$,

(3) $V = \phi(U)$, V は p における M の開近傍, $\phi : U \to V$: 位相同型.

平面曲線や曲面の場合と同様に, 条件 (1) は超曲面のなめらかさを, 条件 (2) は ϕ の像が潰れていないことを要請している．条件 (3) は, 超曲面が多様体となる為に必要となる．すなわち, 自己交叉を許さず, 共通部分に得意点が現れない為に必要な条件（例えば, もし自己交叉していたら ϕ は単射でない）．

例 1.2.4 $\mathbb{R}^2 \supset S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ は超曲面.

S^1 が平面曲線であることを示す為には, $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ を考えれば良かった. しかし γ は単射ではないので, これだけでは超曲面とは言えない. 超曲面であることを示す為には, 例えば次のような助変数表示を取る必要がある:

$$\phi : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$$
$$\psi : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$$

超曲面の定義は, 局所的には $\phi(x_1, \ldots, x_m)$ と表されることであった. このような表示を **助変数表示** と呼ぶ (U の座標を $(x_1, \ldots, x_m)$ とすると, この m 個の助変数で M を表示することが出来るから). 以下では, それ以外の表示方法を与える.

定義 1.2.5 $\mathbb{R}^m$ の開集合 U および C^∞-関数 $f : U \to \mathbb{R}$ に対し, 次を **f のグラフ** と呼ぶ:

$$\mathrm{graph}(f) := \{(x_1, \ldots, x_k, f(x), x_{k+1}, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x = (x_1, \ldots, x_m) \in U\}.$$

補題 1.2.6 $\mathbb{R}^{m+1} \supset M$ が超曲面であるための必要十分条件は, 次が成立すること:
$\forall p \in M,\ \exists (W^*, f, U)$ s.t.

(1) W^* は p の $\mathbb{R}^{m+1}$ における開近傍,
(2) $\mathbb{R}^m \supset U$: 開集合,
(3) $f : U \to \mathbb{R} : C^\infty$,
(4) $W^* \cap M = \mathrm{graph}(f)$.

すなわち, 超曲面である為の必要十分条件は, 「局所的には graph で表示される」こと. このような表示を **陽関数表示** と呼ぶ. 「陽関数表示 $\Rightarrow$ 助変数表示」の証明は容易. 「助変数表示 $\Rightarrow$ 陽関数表示」の証明には, 逆関数定理を用いる.

補題 1.2.7 $\mathbb{R}^{m+1} \supset M$ が超曲面であるための必要十分条件は, 次が成立すること:
$\forall p \in M,\ \exists (W, F)$ s.t.

(1) W は p の $\mathbb{R}^{m+1}$ における開近傍,
(2) $F : W \to \mathbb{R} : C^\infty$,
(3) $\forall q \in W,\ (JF)_q \neq (0, \ldots, 0)$,
(4) $M \cap W = \{x \in W \mid F(x) = 0\}$.

すなわち, 超曲面とは,「局所的に $F(x) = 0$ と表される」こと. このような表示を **陰関数表示** と呼ぶ. 「陽関数表示 $\Rightarrow$ 陰関数表示」の証明は容易. 「陰関数表示 $\Rightarrow$ 陽関数表示」の証明には, 陰関数定理を用いる.

例 1.2.8 $S^m := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid |x| = 1\}$ は $\mathbb{R}^{m+1}$ の超曲面.

これを定義に従って証明するのは面倒だが, 陰関数表示を用いると非常に証明が短くて済む. 様々な表示方法は用途に応じて使い分けると便利.

1.3 多様体の定義

本節では, 多様体の定義を紹介し, 超曲面は多様体となることを示す. なお, この講義では C^∞-級多様体のみを考えるものとする.

定義 1.3.1 ハウスドルフ空間 M が m **次元多様体** であるとは, 次が成立すること:
$\exists\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ s.t.
(1) $\{U_\alpha\}$ は M の開被覆,
(2) $\phi_\alpha : U_\alpha \to \phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^m$ は位相同型,
(3) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ のとき, $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ は C^∞-写像.

多様体に対して, 上の (U_α, ϕ_α) を **局所座標**, $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ を **局所座標系** と呼ぶ. 条件 (3) に現れる写像 $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ を **座標変換** と言う. 多様体とは, 座標変換が C^∞-級となるような局所座標系を持つ位相空間である.

定理 1.3.2 超曲面 $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ は, m 次元多様体である.

証明には, 局所座標系を定義する必要があるが, その為に超曲面の陽関数表示を用いる. すなわち, $p \in M$ の近傍に於いて $M = \mathrm{graph}(f_p)$ と表されるので,

$$U_p := \mathrm{graph}(f_p) = \{(u_1, \ldots, u_k, f_p(u), u_{k+1}, \ldots, u_m)\},$$
$$\phi_p := U_p \to \mathbb{R}^m : (u_1, \ldots, u_k, f_p(u), u_{k+1}, \ldots, u_m) \mapsto u,$$

とすれば, $\{(U_p, \phi_p) \mid p \in M\}$ は M の局所座標系となる.

注意. 超曲面の助変数表示を用いても, 局所座標系を定義することは出来るように思える. 実際, M は局所的には $\mathbb{R}^m \supset U \to V \subset M$ という写像で表されるのだから, この写像の逆写像によって局所座標系を定義する, ということは自然である. 後で述べるように, それも局所座標系となることは正しいのだが, 現時点では, 座標変換が C^∞-級であることを確かめることは困難である（超曲面 M からの写像の C^∞-性をどう扱えば良いだろうか？）.

超曲面論および多様体論での全体的な流れについて. 一般の多様体に関する概念を, 超曲面の場合にまず述べて, その後に一般化する, という手順をこの講義ではとる. すなわち,

超曲面に対してある概念を（ユークリッド空間に入っていることを使って）定義する
$\Rightarrow$ その概念を局所座標系を用いて表す
$\Rightarrow$ 多様体に対してその概念を拡張する.

同様の手順は, 距離空間を一般化して位相空間を考えた際にも現れていたことを思い出そう（距離空間に対してある概念を（距離を使って）定義する $\Rightarrow$ その概念を開集合を用いて表す $\Rightarrow$ 位相空間に対してその概念を拡張する）.

1.4　C^∞-写像

ここでは超曲面および多様体の上で定義された関数や写像に対して, その写像が C^∞-級であることを定義する. 勿論, 超曲面の場合には, 「超曲面として C^∞」という概念と「多様体として C^∞」という概念は一致する.

定義 1.4.1 超曲面 $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ に対し, 連続関数 $f : M \to \mathbb{R}$ が <u>C^∞**-級**</u> を次で定義する:
$\forall p \in M,\ \ \exists (W, \widetilde{f})$ s.t.

(1) W は p における $\mathbb{R}^{m+1}$ の開近傍,
(2) $\widetilde{f} : W \to \mathbb{R}$ は C^∞-級,
(3) $\widetilde{f}\,|_{M \cap W} = f\,|_{M \cap W}$.

すなわち $f : M \to \mathbb{R}$ が C^∞-級であるとは, 「局所的には C^∞-関数 $\widetilde{f} : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$ に拡張できる」ことである. f が C^∞-級であるとき, $(W, \widetilde{f})$ を f の <u>**局所 C^∞-拡張**</u> と呼ぶ. ちなみに $f : M \to \mathbb{R}$ が連続とは, $M \subset R^{m+1}$ による相対位相に関して連続, という意味.

定義 1.4.2 多様体 M に対し, 連続関数 $f : M \to \mathbb{R}$ が <u>C^∞**-級**</u> を次で定義する:
$\forall (U, \phi)$: 局所座標, $f \circ \phi^{-1}$ が C^∞-級.

すなわち $f : M \to \mathbb{R}$ が C^∞-級であるとは, 「f が局所座標に関して C^∞-関数」と言うことが出来る. 超曲面は多様体であり, その場合には, これらの C^∞-関数の概念は一致する.

例 1.4.3 関数 $f : S^1 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x$ は, S^1 を超曲面としてみたときの関数として C^∞ であり, S^1 を多様体としてみたときの関数としても C^∞.

命題 1.4.4 超曲面 $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ および連続関数 $f : M \to \mathbb{R}$ を考える. このとき, f が超曲面の写像として C^∞-級 $\Leftrightarrow$ f が多様体の写像として C^∞-級.

定義 1.4.5 超曲面 $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$, $N \subset \mathbb{R}^{n+1}$ に対し, 連続写像 $F : M \to N$ が <u>C^∞**-級**</u> であるとは, $F = (F_1, \ldots, F_{n+1})$ と表した時に各 F_i が C^∞-級関数となること.

定義 1.4.6 多様体 M, N に対し, 連続写像 $F : M \to N$ が <u>C^∞**-級**</u> とは, 次が成り立つこと:
$\forall p \in M, \forall (V, \phi)$: $F(p)$ の周りの局所座標系, $\phi \circ F$: C^∞-写像.

念のために注意. $\phi \circ F : M \to \mathbb{R}^n$ が C^∞-写像とは, それを n 個の関数で表したときに各々の関数が C^∞ という意味である（厳密には $\phi \circ F$ は局所的にしか定義されないが）.

命題 1.4.7 超曲面 $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ および $N \subset \mathbb{R}^{n+1}$ に対し, 連続写像 $F : M \to N$ を考える. このとき, F が超曲面の写像として C^∞-級 $\Leftrightarrow$ F が多様体の写像として C^∞-級.

1.5　接空間

前節で超曲面上の写像の微分可能性を述べたが, 実際の「微分」とは何かを述べる為には, 接空間の概念が必要になる. 多様体論に於ける「接空間」の概念は抽象的であり,「曲線の接線」や「曲面の接平面」との関連が見えにくいが, 超曲面に於ける接空間を学習することによって多少は関係が見えやすくなる, と思われる.

定義 1.5.1 $p \in \mathbb{R}^{m+1}$ に対し, $T_p\mathbb{R}^{m+1} := \{p\} \times \mathbb{R}^{m+1}$ を **$\mathbb{R}^{m+1}$ の p での接空間** と呼ぶ. 接空間の元を **接ベクトル** と呼び, $\vec{u}_p := (p, u) \in T_p\mathbb{R}^{m+1}$ で表す.

要するに $\vec{u}_p$ は p を始点とするベクトルを表している. これは, $\mathbb{R}^{m+1}$ に次の同一視によるベクトル空間の構造を入れたものである (もう少し丁寧に言うと, 次の写像が線形同型となるように $\mathbb{R}^{m+1}$ にベクトル空間の構造を入れたもの):

$$\mathbb{R}^{m+1} \to T_p\mathbb{R}^{m+1} : u \mapsto (p, u - p).$$

通常の微積分では, $T_p\mathbb{R}^{m+1}$ と $\mathbb{R}^{m+1}$ を (特に断らずに) 同一視していることが多い.

定義 1.5.2 超曲面 $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ および $p \in M$ を考える. p の周りの局所陰関数表示 (W, F) を用いて, **M の p での接空間** を次で定義する:

$$T_pM \ := \ \{p\} \times \ker(dF)_p \ = \ \{\vec{u}_p = (p, u) \in T_p\mathbb{R}^{m+1} \mid (dF)_p(u) = 0\}.$$

この定義は, 自然な意味での接空間を陰関数表示を用いて表したものである.

例 1.5.3 平面曲線 $y = f(x)$ を M とするとき, 点 $p = (a, b)$ での接空間は次を満たす: $T_pM = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - b = f'(a)(x - a)\}$.

例 1.5.4 球面 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ の点 $p = (0, 1, 0)$ での接空間は, $T_pS^2 = \{(x, y, z) \mid y = 1\}$.

定義 1.5.5 $\mathbb{R} \supset I$ を開区間, $\mathbb{R}^{m+1} \supset M$ を超曲面とする. C^∞-写像 $c : I \to M$ を M 上の **C^∞-曲線** と呼ぶ. また, $t_0 \in I$ に対し, **曲線 c の $c(t_0)$ での接ベクトル** を次で定義する:

$$\dot{c}(t_0) := (c(t_0), \frac{dc}{dt}(t_0)) \in T_p\mathbb{R}^{m+1}.$$

定理 1.5.6 超曲面 $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ およびその p での接空間 T_pM に対し, 次が成立する:

(1) T_pM は m 次元ベクトル空間,
(2) $T_pM = \{\dot{c}(0) \mid c : I \to M : C^\infty,\ c(0) = p\}$,
(3) (U, ϕ, V) を p の周りの局所座標系とすると, $T_pM = \{p\} \times \mathrm{Im}(d\phi)_{\phi^{-1}(p)}$,
(4) T_pM は局所陰関数表示および局所座標系の取り方に依存しない.

(4) は (2) から直ちに導かれる ((2) の表示方法は局所陰関数表示および局所座標系の取り方に依存しないから).

次に, 超曲面の接ベクトル $\vec{u}_p$ が方向微分を与えることを見る. ここで, 方向微分とは「p における u 方向の微分」であるが, それは

$$\vec{u}_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$$

という写像である. ここで $C^\infty(M)$ は M 上の C^∞-関数全体の集合. 多様体の接ベクトルは, 方向微分によって定義されることになる.

定義 1.5.7 超曲面 $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ に対し, $f \in C^\infty(M)$ の $\vec{u}_p \in T_pM$ による **方向微分** を, f の局所 C^∞-拡張 $(W, \widetilde{f})$ を用いて次で定義する:

$$\vec{u}_p f := \frac{d}{dt}\widetilde{f}(p+tu)\mid_{t=0} .$$

方向微分は「f を u 方向にちょっと動かした時の変化率」だが, $\vec{u}_p f = \frac{d}{dt}f(p+tu)\mid_{t=0}$ とは出来ないことに注意 ($p+tu$ は超曲面 M の点とは限らないから). この定義では, f の定義域を広げることで, その問題を解消している. また一方で, 動かす方向を M の中に入るように調整する, という方法でも問題は解消できる.

命題 1.5.8 超曲面 $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ および $\vec{u}_p \in T_pM$ に対し, M の C^∞-曲線 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ が $\dot{c}(0) = \vec{u}_p$ をみたすとする. このとき, 全ての $f \in C^\infty(M)$ に対して次が成立する:

$$\vec{u}_p f = \frac{d}{dt} f(c(t))\mid_{t=0} .$$

この命題から, 方向微分は, 局所 C^∞-拡張 $(W, \widetilde{f})$ の選び方に依らないことが分かる.

命題 1.5.9 超曲面の接ベクトル $\vec{u}_p \in T_pM$ による方向微分は, 次を満たす:
$\forall f, g \in C^\infty(M),\ \vec{u}_p(fg) = \vec{u}_p f \cdot g(p) + f(p) \cdot \vec{u}_p g.$

要するに積の微分の公式が成り立つ. 証明は, ユークリッド空間の場合に帰着させれば良い.

命題 1.5.10 超曲面の接空間 T_pM は, 次のベクトル空間と自然に同型:
$\{v : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : 線型 \mid\ \forall f, g \in C^\infty(M),\ v(fg) = v(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot v(g)\}.$

定義 1.5.11 多様体 M の $p \in M$ に於ける **接空間** と次で定義する:
$T_pM := \{v : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : 線型 \mid\ \forall f, g \in C^\infty(M),\ v(fg) = v(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot v(g)\}.$

命題 1.5.12 M を多様体, (U, ϕ) を p の周りの局所座標とする. $\phi = (x_1, \ldots, x_m)$ とすると,

$$(\frac{\partial}{\partial x_i})_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : f \mapsto \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(p)).$$

は p における接ベクトル. さらに, $\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_m})_p\}$ は T_pM の基底である.

1.6　写像の微分

C^∞-写像 $F:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ の微分 $(dF)_p$ とは, 元の写像の「線形近似」であった. ここでは, 超曲面の間の写像および多様体の間の写像の「微分」を定義し, ユークリッド空間の場合と同様の性質, 特に逆関数定理が成り立つことを紹介する.

定義 1.6.1 超曲面 $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$, $N \subset \mathbb{R}^{n+1}$ に対し, $F:M \to N$ を C^∞-写像とする. $p \in M$ の周りの F の局所 C^∞-拡張 $(W,\widetilde{F})$ を用いて, F の $\underline{p \in M}$ **における微分** を次で定義する:

$$(dF)_p : T_pM \to T_{F(p)}N : (p,u) \mapsto (F(p),(d\widetilde{F})_p(u)).$$

写像の微分を $(F_*)_p$ と表す場合 (流儀？) もある. この定義を正当化する為には, 微分が局所 C^∞-拡張の取り方によらないことを示す必要がある. また, $(F(p),(d\widetilde{F})_p(u)) \in T_{F(p)}N$ も示す必要がある. それらは次から導かれる.

命題 1.6.2 超曲面 $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$, $N \subset \mathbb{R}^{n+1}$ に対し, $F:M \to N$ を C^∞-写像, $p \in M$, $\vec{u}_p \in T_pM$ とする. このとき, C^∞-曲線 $c:I \to M$ が $\dot{c}(0)=\vec{u}_p$ を満たすならば,

$$(dF)_p(\vec{u}_p) = (F(p), \frac{d(F\circ c)}{dt}(0)).$$

$F\circ c$ は N 上の曲線なので, その接ベクトルは接空間の元である. さらに, この曲線を用いた表示は, F の局所拡張の取り方に無関係なので, 上の定義が局所拡張の取り方に依存しない.

定義 1.6.3 多様体 M の上の曲線 $c:(-\varepsilon,\varepsilon) \to M : C^\infty$ に対し, c の $c(0)$ における **接ベクトル** を次で定義: $\dot{c}(0): C^\infty(M) \to \mathbb{R} : f \mapsto \frac{d(f\circ c)}{dt}|_{t=0}$.

ここで定義した $\dot{c}(0)$ が接ベクトル (すなわち方向微分) であることは容易に分かる.

定義 1.6.4 多様体 M,N および C^∞-写像 $F:M\to N$ に対し, $p\in M$ における **F の微分** を $(dF)_p(u) = \frac{d}{dt}(F\circ c)|_{t=0}$ で定義する. ここで c は $u = \frac{dc}{dt}|_{t=0}$ をみたす M の曲線.

定義 1.6.5 C^∞-写像 $F:M\to N$ が **C^∞-同相写像**(または **微分同相写像**) であるとは, 次が成立すること: F : 全単射かつ F^{-1} : C^∞.

定理 1.6.6 (逆関数定理) C^∞-写像 $F:M\to N$ および $p\in M$ に対し, $(dF)_p : T_pM \to T_{F(p)}$ が線形同型ならば, F は p の周りで局所的に C^∞-同相.

系 1.6.7 超曲面 $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ の局所助変数表示 (U,ϕ,V) に対し, $\phi:U\to V$ は $\mathbb{R}^{m+1}$ の超曲面として C^∞-同相.

このことから, 超曲面に助変数表示によって局所座標を定義しても, 多様体となる (座標変換が C^∞-写像となる) ことが分かる.

2　多様体とベクトル束

この章では, 多様体上のベクトル束に関する諸概念 (ベクトル束, ベクトル場, 微分形式など) を紹介する．これらの概念は, リーマン計量を定式化する際に必要不可欠なだけでなく, 他分野に於いても基本的かつ重要である.

2.1　多重線型代数

ここでは後に必要となる線型代数の知識をまとめておく．ベクトル空間の直和, 双対, テンソル積などを取ることにより, 既知のものから新しいベクトル空間を構成することが出来る．なおここでは, ベクトル空間は有限次元とし, 係数体は $\mathbb{R}$ のものを考える.

定義 2.1.1 ベクトル空間 V, W に対し, $V \times W$ にベクトル空間の構造を次で定義したものを **直和** と呼び, $V \oplus W$ で表す: $a(v_1, w_1) + b(v_2, w_2) := (av_1 + bv_2, aw_2 + bw_2)$.

定義 2.1.2 ベクトル空間 V, W に対し, $\{f : V \to W : \text{線型写像}\}$ にベクトル空間の構造を次で定義したものを $\mathrm{Hom}(V, W)$ で表す: $(af + bg)(v) := af(v) + bg(v)$.

定義 2.1.3 ベクトル空間 V に対し, $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$ を V の **双対空間** と呼び, V^* で表す.

命題 2.1.4 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ を V の基底としたとき, $f_i \in V^*$ を $f_i(e_j) := \delta_{ij}$ によって定めると, $\{f_1, \ldots, f_n\}$ は V^* の基底となる (これを **双対基底** と呼ぶ).

定義 2.1.5 集合 X で生成される加法群を $\langle X \rangle$ で表す, すなわち,

$$\langle X \rangle := \{\sum_{k=1}^{N} a_k x_k \mid a_k \in \mathbb{Z}, x_k \in X, N \in \mathbb{N}\}.$$

定義 2.1.6 ベクトル空間 V, W に対し, 商空間 $\langle V \times W \rangle / I$ にベクトル空間の構造を次で定義したものを V と W の **テンソル積** と呼び, $V \otimes W$ で表す:

$$I := \left\langle \left\{ \begin{array}{l} (v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w) \\ (v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2) \\ (av, w) - (v, aw) \end{array} \;\middle|\; a \in \mathbb{R}, v, v_1, v_2 \in V, w, w_1, w_2 \in W \right\} \right\rangle,$$

$$a[(v_1, w_1)] + b[(v_2, w_2)] := [(av_1, w_1) + (bv_2, w_2)].$$

注意 2.1.7 (1)　商空間 $\langle V \times W \rangle / I$ とは, 次の同値関係による商集合: $\alpha \sim \beta :\Leftrightarrow \alpha - \beta \in I$.
(2)　上で定義したベクトル空間の構造が well-defined であることは, 証明すべきことである.
(3)　テンソル積を「普遍性」によって定義する本が多いが, ここで述べた定義はそれと同値.

$(v, w) \in \langle V \times W \rangle$ の同値類を $v \otimes w := [(v, w)]$ で表す．定義から次が成り立つ:

(1) $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$,

(2) $v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$,

(3) $(av) \otimes w = v \otimes (aw)$.

命題 2.1.8 $\{e_i\}$ を V の基底, $\{h_j\}$ を W の基底とすると, $\{e_i \otimes h_j\}$ は $V \otimes W$ の基底.

ベクトル空間 V の n 個のテンソル積を $\otimes^n V$ で表す（注: $V \otimes (V \otimes V) \cong (V \otimes V) \otimes V$）.

定義 2.1.9 S_n を n 次対称群とする．$x \in \otimes^n V$ に対し, $\forall \sigma \in S_n$, $\sigma(x) = x$ が成り立つときに **対称テンソル**, $\forall \sigma \in S_n$, $\sigma(x) = \mathrm{sgn}(\sigma) x$ が成り立つときに **交代テンソル** と呼ぶ．ただしここで, S_n の $\otimes^n V$ への作用は次で定める:

$$\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) := v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}.$$

n 次対称テンソルの全体を $S^n V$, n 次交代テンソルの全体を $\bigwedge^n V$ で表すことにする．交代テンソルを外積と呼んだり, その元を $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$ と書くことが多い (正確に述べると, $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ の交代化作用素 $\mathcal{A} : \otimes^n V \to \bigwedge^n V$ による像が $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$).

2.2 ベクトル束

前節ではベクトル空間に対して, その双対空間, 直和, テンソル積, 対称積, 交代積, などを定義した．それらをそのまま適用することにより, 接空間 T_pM に対して, その双対空間 T_p^*M などが得られる．本節の目標は, それらを「束ねたもの」を考察することである．束ねたものとは, 例えば接空間の場合には, 集合としては $TM := \bigcup_{p \in M} T_pM$ (disjoint union) である．重要な点は, これらが多様体の構造を持つこと．このようなものを一般化した概念がベクトル束である．

定義 2.2.1 多様体 M に対し, $TM := \bigcup_{p \in M} T_pM$ に次の $\{(\pi^{-1}(U_\alpha), \Phi_\alpha)\}$ で多様体構造を入れたものを **接束** (**tangent bundle**) と呼ぶ:

- $\pi : TM \to M$: 自然な射影,
- $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$: M の局所座標系,
- $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to \phi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^m : \sum a_i (\frac{\partial}{\partial x_i})_p \mapsto (\phi_\alpha(p), (a_1, \ldots, a_m))$,
- ただし TM には Φ_α が位相同型となる最も弱い位相を入れる.

命題 2.2.2 m 次元多様体 M の接束 TM は, $2m$ 次元多様体.

T_pM の双対空間 T_p^*M やそれらのテンソル積 $T_pM \otimes T_pM$, $T_pM \otimes T_p^*M$ などに対しても, 同様に多様体を構成することが出来る（$T^*M := \bigcup T_p^*M$, $TM \otimes TM := \bigcup T_pM \otimes T_pM$, $\ldots$）．特に T^*M を **余接束** と呼ぶ.

定義 2.2.3 多様体 E, M に対し, $\pi : E \to M$ が **ベクトル束** (**vector bundle**) であるとは, 次をみたすこと:

(1) π は 全射かつ連続,

(2) $\forall p \in M$, $E_p := \pi^{-1}(p)$ は n 次元ベクトル空間,

(3) $\forall x \in M$, $\exists U : x$ の近傍 : $\forall y \in U$, $\exists \{e_1(y), \ldots, e_n(y)\} : E_y$ の基底
s.t. $\pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n : \sum a_i e_i(y) \mapsto (y; a_1, \ldots a_n) : C^\infty$-同相.

用語. ベクトル束 (E, M, π) に対して, E を **全空間** (**total space**), M を **底空間** (**base space**), $E_p := \pi^{-1}(p)$ を p 上の **ファイバー** (**fiber**) と呼ぶ. 場合によっては省略して E そのものをベクトル束と呼ぶこともある.

2.3 ベクトル束の切断

ここでは, ベクトル束の切断の定義と, その局所座標を用いた表示を扱う. ベクトル場や微分形式やリーマン計量は, あるベクトル束の切断になっている.

定義 2.3.1 ベクトル束 $\pi : E \to M$ に対し, C^∞-写像 $s : M \to E$ が **切断** (**section**) であるとは, $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$ が成立すること. E の切断の全体を $\Gamma(E)$ で表す.

特に, 接束 TM の切断 $s : M \to TM$ を **ベクトル場** (**vector field**), 余接束 T^*M の切断を **1 次微分形式** (**1-form**), $\bigwedge^k T^*M$ の切断を k **次微分形式** (**k-form**) と呼ぶ.

命題 2.3.2 ベクトル束 E の切断の全体 $\Gamma(E)$ には, 次によって $C^\infty(M)$-加群の構造が入る: $f, g \in C^\infty(M)$, $X, Y \in \Gamma(E)$ に対して, $fX + gY : M \to E : p \mapsto f(p)X_p + g(p)Y_p$.

復習. 多様体 M の点 p の周りの局所座標を (U, ϕ) とし, $\phi = (x_1, \ldots, x_m)$ と表す. このとき, $\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_m})_p\}$ は T_pM の基底であった.

命題 2.3.3 多様体 M の局所座標 $(U, \phi = (x_1, \ldots, x_m))$ に対して,

(1) 各 $i = 1, \ldots, m$ に対して, $\frac{\partial}{\partial x_i} : U \to TU : p \mapsto (\frac{\partial}{\partial x_i})_p$ は U 上のベクトル場,

(2) $\forall X \in \Gamma(TU)$, $\exists f_1, \ldots, f_m \in C^\infty(U)$ s.t. $\alpha = f_1(\frac{\partial}{\partial x_1})_p + \cdots + f_m(\frac{\partial}{\partial x_m})_p$.

復習. 多様体 M 上の C^∞-関数 $f : M \to \mathbb{R}$ に対し, その微分は次で定義されていた: $(df)_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R} : \dot{c}(0) \mapsto \frac{d}{dt}(f \circ c) |_{t=0}$. すなわち $(df)_p \in T_p^*M$.

命題 2.3.4 多様体 M の局所座標 $(U, \phi = (x_1, \ldots, x_m))$ に対して,

(1) 各 $i = 1, \ldots, m$ に対して, $dx_i : U \to TU : p \mapsto (dx_i)_p$ は U 上の 1 次微分形式,

(2) $\forall \alpha \in \Gamma(T^*U)$, $\exists f_1, \ldots, f_m \in C^\infty(U)$ s.t. $\alpha = f_1 dx_1 + \cdots + f_m dx_m$.

(3) $\{dx_1, \ldots, dx_m\}$ は $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}\}$ の双対基底.

この基底を用いて, 一般のテンソル場の基底を作ることが出来る.

2.4 リーマン計量

リーマン計量とは, 直感的には「多様体の各点の接空間に内積を定めるもの」である. これをきちんと述べると, あるベクトル束の切断として定義されることになる. 本節では, リーマン計量の定義を述べ, リーマン計量を用いて多様体上の曲線の長さを測ることが出来ることを紹介する.

定義 2.4.1 ベクトル束 $S^2(T^*M)$ の切断 $g : M \to S^2(T^*M)$ が **リーマン計量** であるとは, 次をみたすこと: $\forall p \in M,\ \ g_p$: 正定値内積.

ここで, $S^2(T_p^*M) \cong \{f : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$: 対称, 双線形 $\}$ という同一視をしている. また, g_p が正定値であるとは, 次が成り立つこと: $\forall X \in T_pM$, $X \neq 0 \Rightarrow g_p(X,X) > 0$.

定義 2.4.2 多様体 M とその上のリーマン計量 g の組 (M,g) を **リーマン多様体** と呼ぶ.

前節で見たように, ベクトル場や微分形式に対して「基底」($\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ や $\{dx_i\}$) が存在した. 同様に $S^2(T{*}M)$ の切断にも局所的には「基底」が存在し, リーマン計量はその一次結合で表すことが出来る.

命題 2.4.3 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ を多様体 M の局所座標系とし, $\phi_\alpha = (x_1, \ldots, x_m)$ とする. このとき $\{dx_i dx_j \mid 1 \leq i \leq j \leq m\}$ は $\Gamma(S^2(T^*U))$ の基底 ($C^\infty(U)$-加群として). ただしここで,

$$dx_i dx_j : U \to S^2(T^*U) : p \mapsto (1/2)\{(dx_i)_p \otimes (dx_j)_p + (dx_j)_p \otimes (dx_i)_p\}.$$

リーマン計量は局所的には (局所座標 (U,ϕ) の中では) この基底の 1 次結合で書ける. $\mathbb{R}^m$ に対して (自明な局所座標を取って考えると), $g := dx_1dx_1 + dx_2dx_2 + \cdots + dx_mdx_m$ はリーマン計量である. これを $\mathbb{R}^m$ の **標準的な計量** と呼ぶ.

命題 2.4.4 曲面 $M \subset \mathbb{R}^3$ の第 1 基本形式はリーマン計量である.

定義 2.4.5 (M,g) をリーマン多様体, $\gamma : [a,b] \to M$ を C^∞-曲線とする. このとき曲線 γ の **長さ** を次で定義する:

$$L(\gamma) := \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))}\,dt.$$

$\mathbb{R}^m$ 内の曲線を標準的な計量で測った長さは, 通常の意味での曲線の長さに一致する. もちろん, 計量が変われば曲線の長さも変わる.

定義 2.4.6 上半平面 $H^m := \{(x_1, \ldots, x_m) \mid x_m > 0\}$ に計量 $g := (1/x_m^2)(dx_1dx_1 + \ldots + dx_mdx_m)$ を入れたリーマン多様体を **実双曲空間 (real hyperbolic space)** と呼ぶ.

実双曲空間は, 多様体としてはユークリッド空間と同じであるが, 計量が異なっている. その計量の違いが幾何に与える影響は極めて大きい.

2.5 Levi-Civita 接続

多様体とリーマン計量の組がリーマン多様体であった．今節で扱うものはアフィン多様体であるが，これは多様体とアフィン接続の組のことである．リーマン多様体上には自然なアフィン接続が定義でき，リーマン多様体はアフィン多様体になる．これは，距離空間は自然に定義される位相によって位相空間の構造を持つ，というのと話の道筋は全く同様.

定義 2.5.1 写像 $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM) :\ (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ が多様体 M 上の **アフィン接続** であるとは，次を満たすこと:

(1) ∇ は双線形写像,

(2) $\forall f \in C^\infty(M), \forall X, Y \in \Gamma(TM),\ \nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$,

(3) $\forall f \in C^\infty(M), \forall X, Y \in \Gamma(TM),\ \nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$.

復習．$\Gamma(TM)$ は M 上のベクトル場（TM の切断）の全体であった．$X \in \Gamma(TM)$ および $f \in C^\infty(M)$ に対し，$Xf \in C^\infty(M)$ は次のように定義される: $Xf : M \to \mathbb{R} : p \mapsto X_p f$（$X_p \in T_p M$ は方向微分であった，すなわち，$X_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : f \mapsto X_p f$）．

定義 2.5.2 多様体とアフィン接続の組 (M, ∇) を **アフィン多様体** と呼ぶ.

次に行うことは，「リーマン多様体上には自然なアフィン接続が存在する」こと.

定理 2.5.3 リーマン多様体 (M, g) に対し，次を満たすアフィン接続 ∇ が唯一つ存在する:

(4) $T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$,

(5) $\forall X, Y, Y \in \Gamma(TM),\ Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$.

(4) の T を **捩率** (**torsion**) と呼び，(4) の条件を **torsion free** と言う．また，この定理の性質を満たす ∇ を **共変微分** または **Levi-Civita 接続** と呼ぶ．因みにベクトル場の bracket 積 $[X, Y]$ は，次によって定義されている:

$$[X, Y] : C^\infty(M) \to C^\infty(M) :\ \varphi \mapsto [X, Y]\varphi := X(Y\varphi) - Y(X\varphi).$$

また，この定理の存在に関しては，次の式によって $\nabla_X Y$ を直接定めて証明する:

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) = (1/2)\{&Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ &+ g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) + g([Z, X], Y)\}. \end{aligned}$$

Levi-Civita 接続の計算には，この式を用いる．実用上は，ベクトル場の「基底」 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ について計算することが多い（条件 (2), (3) から任意のベクトル場についても求められる）．

定義 2.5.4 多様体 M の上の局所座標 $(U, \phi = (x_1, \ldots, x_m))$ に対し，次で定義される C^∞-写像 $\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$ を **クリストフェル記号** (**Christoffel symbol**) と呼ぶ: $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$.

2.6 曲率

リーマン多様体の曲率テンソルを定義する (実はアフィン多様体であれば曲率テンソルは定義できる). 特に, 双曲平面の場合に断面曲率を具体的に計算する.

定義 2.6.1 アフィン多様体 (M, ∇) に対し, 次の $(1,3)$-型テンソルを **曲率テンソル** と呼ぶ:

$$R(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

$(1,3)$-型テンソルであるとは, $R \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes T^*M \otimes TM)$ となること. これは $R \in \Gamma(\mathrm{Hom}(TM \otimes TM \otimes TM, TM))$ と同じ.

定義 2.6.2 リーマン多様体 (M, g) に対して, Levi-Civita 接続 ∇ から決まる曲率テンソルを **リーマン曲率テンソル** と呼ぶ. また, $R(X,Y,Z,W) := g(R(X,Y)Z, W)$ で定義される $(0,4)$-型テンソルも同様に **リーマン曲率テンソル** と呼ぶ.

リーマン曲率を求めることは, 一般に非常に大変である. そこで, リーマン曲率を「簡略化」して, 別の曲率を定義する. ここでは断面曲率を紹介するが, この他にも様々な「簡略化」がある（e.g., Weyl 共形曲率, Ricci 曲率, スカラー曲率）.

定義 2.6.3 T_pM の 2 次元部分空間 σ に対し, $K_\sigma := g_p(R_p(u,v)v, u)$ を σ の **断面曲率** (**sectional curvature**) と呼ぶ. ただしここで $\{u, v\}$ は σ の正規直交基底.

断面曲率 K_σ は, σ の正規直交基底の取り方に依らない.

例 2.6.4 実双曲平面 (H^2, g) の任意の点 p に対し, $K_{T_pH^2} = -1$.

この場合 $\{(y\frac{\partial}{\partial x})_p, (y\frac{\partial}{\partial y})_p\}$ が T_pH^2 正規直交基底であるので, これについて確かめれば良い. 実双曲平面の Levi-Civita 接続は次を満たす:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial x} = -\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}.$$

これと Levi-Civita 接続の性質を用いれば, 断面曲率が計算できる. さらに, 次を使うと便利: $\nabla_{fX}(gY) = (fXg)Y + (fg)\nabla_X Y$.

定義 2.6.5 断面曲率が一定のリーマン多様体を **定曲率空間** と呼ぶ.

すなわち我々は, 実双曲平面が定曲率空間であることを証明したことになる. 高次元の双曲空間も, 同様に定曲率空間である. この他には, ユークリッド空間や球面が定曲率空間. 定曲率空間以外にも, 例えば, 断面曲率が全て正（あるいは全て負）になるリーマン多様体などは, 興味深い研究対象である.