曲線の微分幾何

── 高速道路のジャンクションは何であんな形なのか ──

田丸 博士（たまる ひろし）（広島大学・大学院理学研究科）

- **目的**

  - **平面曲線の微分幾何の話を紹介する**

    （平面曲線： xy-平面に描かれた曲線）

    （$y = f(x)$ のグラフ，円，楕円，放物線などは平面曲線）

    （微分幾何： 微分を使って曲線の性質を調べる）

  - **前半は数学の話**

    （道路の形や車（自転車でも可）の運転に例えて説明したい）

  - **後半はジャンクションとか実生活に登場する例についての話**

- **平面曲線：** xy-**平面に描かれた曲線**

  - **写像** $c(t) = (x(t), y(t))$ **のことを平面曲線と呼ぶ**

    （定義域は $I = (a, b) = \{t \in \mathbb{R} \mid a < t < b\}$ で十分）

    （この写像の像が，xy-平面上に描かれた曲線になる）

  - $c(t)$ **が次を満たすとき，なめらかな平面曲線と呼ぶ：**

    (1) c **が（すなわち** x **と** y **が）**t **で何回でも微分できる**

    (2) **全ての** t **に対して，**$(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$

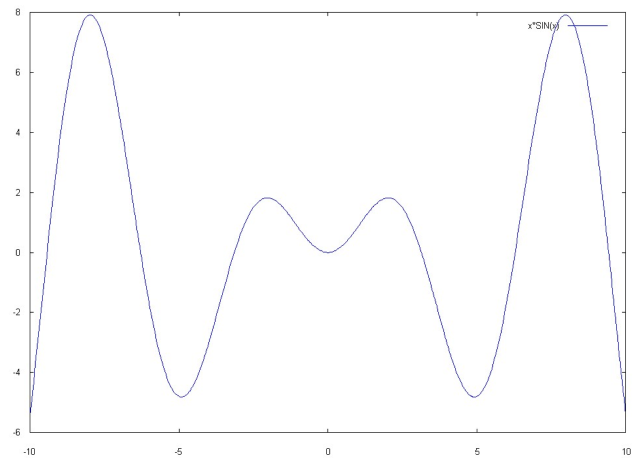
- $c(t) = (x(t), y(t))$： なめらかな平面曲線
  $\Leftrightarrow$ (1) $c(t)$ が t で何回でも微分できる，(2) $(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$

- **例： $f(x)$ が何回でも微分できる**

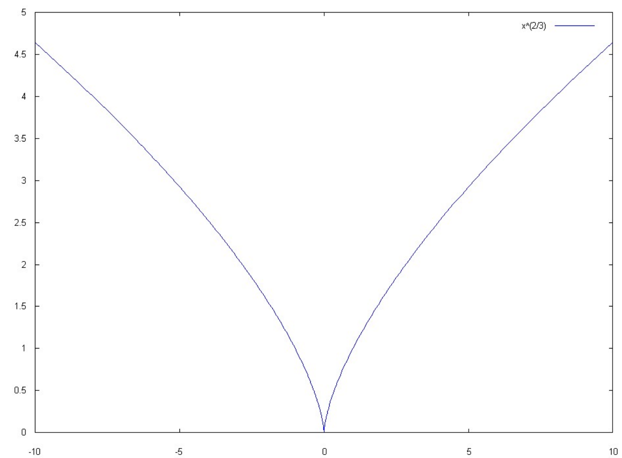
  $\Rightarrow$ $y = f(x)$ のグラフはなめらかな平面曲線

  （$\because$ $c(t) = (t, f(t))$ とすれば良い）

$y = x\,\mathsf{sin}(x)$（なめらかな平面曲線）



$y = x^{2/3}$（$x = 0$ で微分不可能）



- $c(t) = (x(t), y(t))$：なめらかな平面曲線
  $\Leftrightarrow$ (1) $c(t)$ が t で何回でも微分できる，(2) $(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$

- **例：$x^2 + y^2 = r^2$（半径が r の円）はなめらかな平面曲線**

  （$\because$ $c(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$ とすれば良い）

- **例：$x^2 - y^3 = 0$ はなめらかな平面曲線？**

  （$c(t) = (t^3, t^2)$ とすると (1) は満たすが (2) を満たさない！）

  （ちなみに $y = x^{2/3}$ と同じ曲線）

- **定義：$c'(t) = (x'(t), y'(t))$ を<u>速度ベクトル</u>，**
  $c''(t) = (x''(t), y''(t))$ を<u>加速度ベクトル</u>という

- $c(t) = (x(t), y(t))$： なめらかな平面曲線
- $c'(t)$： 速度ベクトル， $c''(t)$： 加速度ベクトル

- **平面曲線の曲がり具合を調べる**

  ○ **カーブがキツイ** $+$ **速度が大きい** $\Rightarrow$ **加速度が大きい**

  （横G，遠心力，$F = ma$，$\ldots$）

  ○ **速度が一定ならば，カーブのキツさ** $\Leftrightarrow$ **加速度の大きさ**

  ○ **曲率** $:=$ **「一定のスピードで走った時の加速度の大きさ」**

- $c(t) = (x(t), y(t))$： なめらかな平面曲線
- $c'(t)$： 速度ベクトル，　$c''(t)$： 加速度ベクトル
- 曲率 := 一定のスピードで走った時の加速度の大きさ

- **曲率の定義**

  ○ $c(t)$ **が<u>弧長パラメータ表示</u>** $\Leftrightarrow |c'(t)| \equiv 1$

  （一定のスピード（速さ 1）で走らせている）

  ○ **弧長パラメータ表示された曲線は** $c(s)$ **と書くことが多い**

  ○ $c(s)$ **の曲率** $\kappa(s)$ **を次で定義する:**

$$\kappa(s) = |c''(s)| = \sqrt{(x''(s))^2 + (y''(s))^2}$$

- $c(t) = (x(t), y(t))$： なめらかな平面曲線
- $c'(t)$： 速度ベクトル， $c''(t)$： 加速度ベクトル
- $c(s)$： 弧長パラメータ表示
- 曲率 $\kappa(s) := |c''(s)|$

- **曲率の計算例： 直線** $c(t) = (t, 0)$

  $\Rightarrow$ **弧長パラメータ表示** $c(s) = (s, 0)$

  （$\because$ $|c'(s)| = |(1, 0)| = 1$）

  $\Rightarrow \kappa(s) = |(0, 0)| = 0$

- **曲率の計算例： 半径** r **の円周** $x^2 + y^2 = r^2$

  $\Rightarrow$ **弧長パラメータ表示** $c(s) = (r\cos(t/r), r\sin(t/r))$

  （$\because$ $|c'(s)| = |(-\sin(t/r), \cos(t/r)| = 1$）

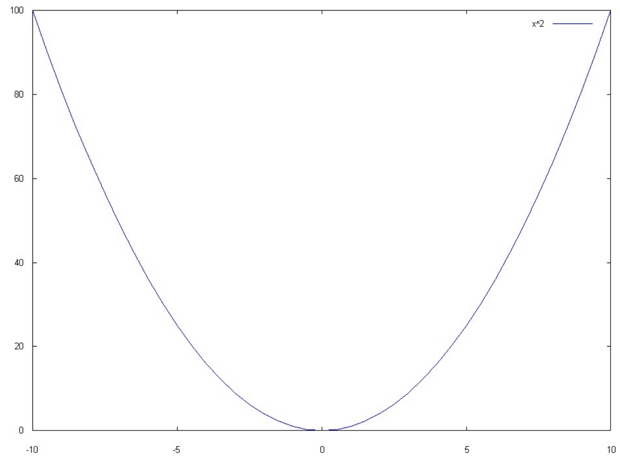
  $\Rightarrow \kappa(s) = |(-(1/r)\cos(t/r), -(1/r)\sin(t/r))| = 1/r$

- $c(t) = (x(t), y(t))$ ： なめらかな平面曲線
- $c'(t)$ ： 速度ベクトル， $c''(t)$ ： 加速度ベクトル
- $c(s)$ ： 弧長パラメータ表示
- 曲率 $\kappa(s) := |c''(s)|$

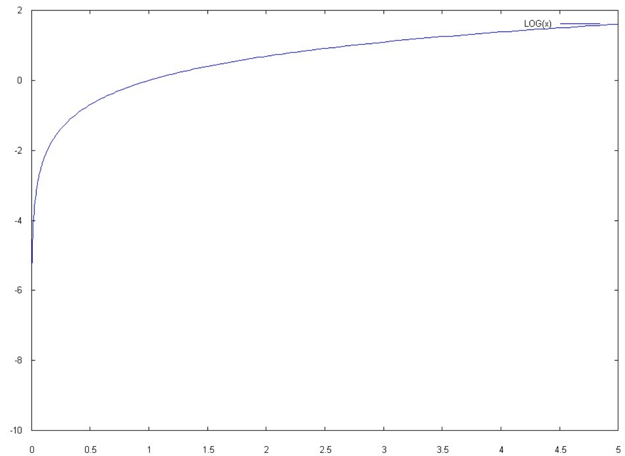
- **問題 ： 次の曲線で一番曲がっている点はどこか？**

（弧長パラメータ表示を見付けるのは大変であることを主張する問題）

$y = x^2$



$y = \log x$



- $c(t) = (x(t), y(t))$： なめらかな平面曲線
- $c'(t)$： 速度ベクトル， $c''(t)$： 加速度ベクトル
- $c(s)$： 弧長パラメータ表示
- 曲率 $\kappa(s) := |c''(s)|$

- **微分幾何**

  ○ **曲線の曲がり具合を，微分を使って調べた（<u>微分幾何</u>）**

  ○ **高校の教科書にも，微分幾何は登場する：**

  $y = f(x) \Rightarrow$ **微分** $\Rightarrow$ **増減表** $\Rightarrow$ **グラフの形，極値が分かる**

  ○ **曲面とは（大雑把に）** $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ **という写像のこと**

  $\Rightarrow$ 2 **変数の写像** $\varphi = \varphi(u, v)$ **を微分して調べる**

  $\Rightarrow$ **偏微分（大学で習います）**

- おまけ： 曲線 $c(s)$ に対し，$1/\kappa(s)$ を曲率半径と呼ぶ

  （半径が $1/\kappa(s)$ の円と同じだけ曲がってるから）

  （曲率半径は，道路標識に使われている）

ここまでのあらすじ：

- 曲線とは，$c(t) = (x(t), y(t))$ という写像
- 微分を使って，曲率 $\kappa(s) = |c''(s)|$ を定義した

- **ジャンクションに使われる曲線に関する考察**

  ○ **曲率が大きい** $\Leftrightarrow$ **カーブがキツイ** $\Leftrightarrow$ **ハンドルを大きく切る**

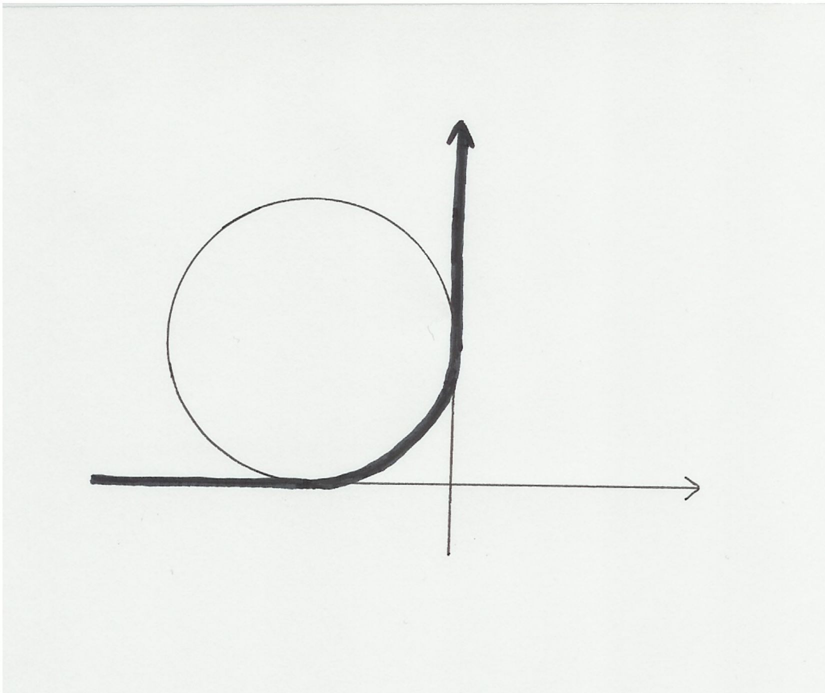
  曲率が小さい $\Leftrightarrow$ **カーブが緩やか** $\Leftrightarrow$ **ハンドルを小さく切る**

  ○ **道路の曲率が急激に変化する**

  $\Rightarrow$ **急ハンドルを切らなくてはならない**

  $\Rightarrow$ **危険であり，運転しにくい**

○　走りにくい道路の例（直線と円だけで作った道路）



○　曲率が $\kappa(s) = as$（a は適当な定数）

$\Rightarrow$ ハンドルを徐々に切れば良い

$\Rightarrow$ 運転しやすい

- 道路の曲率が $\kappa(s) = as \Rightarrow$ 運転しやすい

- **平面曲線の基本定理**
  - **全ての微分可能な関数 $\kappa(s)$ に対して，$\kappa(s)$ を曲率とするような（弧長パラメータ表示された）曲線が存在する**
  - **２つの曲線の曲率が等しい $\Leftrightarrow$ 回転と平行移動で移り合う**

- **よって，$\kappa(s) = as$ を満たす曲線が存在する，しかもそれは本質的に一つしかない**

平面曲線の基本定理：

(1)　$\kappa(s)$ が微分可能な関数 $\Rightarrow$ $\kappa(s)$ を曲率とするような曲線が存在

(2)　２つの曲線の曲率が等しい $\Leftrightarrow$ 回転と平行移動で移り合う

- **平面曲線の基本定理の証明**

(1)　**微分可能な** $\kappa(s)$ **に対して，** $c(s)$ **を次のようにすれば良い：**

$$c(s) = \left(\int_0^s \cos\left(\int_0^t \kappa(u)du\right)dt, \int_0^s \sin\left(\int_0^t \kappa(u)du\right)dt\right)$$

（これは弧長パラメータ表示）

（曲率 $= \kappa(s)$ は，２回微分すれば確かめられる）

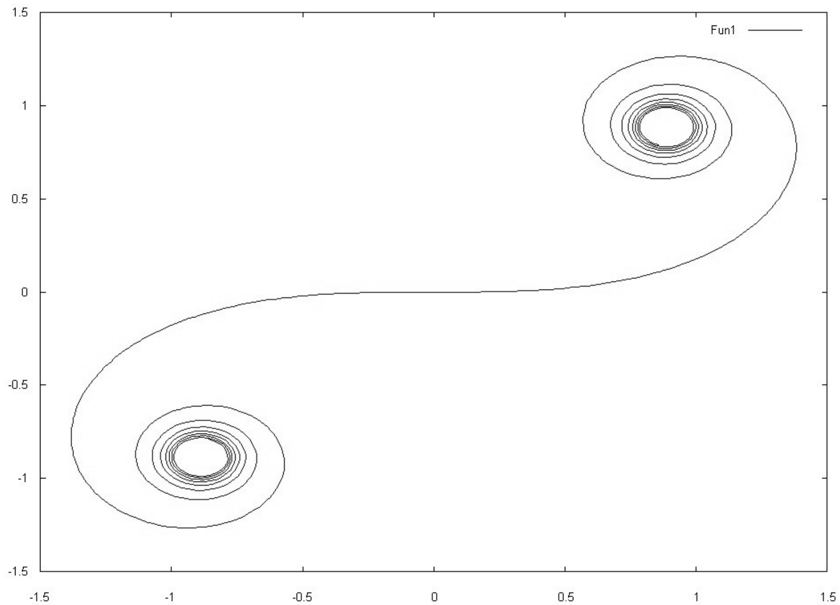
(2)　**長くなるので省略**

- 道路の曲率が $\kappa(s) = as \Rightarrow$ 運転しやすい

- **次の曲線は，$\kappa(s) = as$ を満たす（クロソイド曲線と呼ぶ）：**

$$c(s) = \left(\int_0^s \cos(\frac{at^2}{2})dt, \int_0^s \sin(\frac{at^2}{2})dt \right)$$

（この曲線が高速道路のジャンクションに使われている）



- **余談**

  - **クローソー（ギリシャ神話の女神の名前）が由来**

  - **クロソイド曲線は，殆ど全ての高速道路に利用されている**

    （ジャンクションだけでなく，カーブでも，一般道でも使われている）

  - **日本初のクロソイド曲線道路は，昭和27年（1952年）**

    （場所は三国峠）

    （三国峠の道路は，以前は直線と円の組み合わせで作られており，非常に事故の多い道だったが，クロソイドに変えてから，事故が激減した（らしい））

- **余談**

  - ○ **鉄道の線路のカーブも，クロソイド曲線**

- まとめ（全体の流れ）

  - 問題設定
    （今回は高速道路のジャンクションの設計）

  - 目的を設定する
    （走りやすい，事故が少ない，ハンドル操作が自然，...）

  - 目的を数学的に定式化する
    （曲率が $\kappa(s) = as$ を満たす）

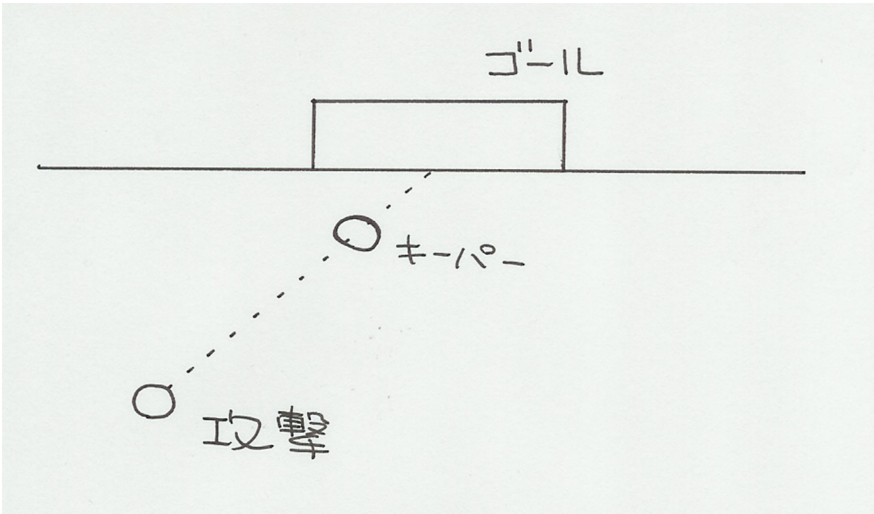
  - その数学の問題を解く
    （今回は平面曲線の基本定理を用いた）

- **問題：ジェットコースター（を横から見た形）の設計**
  - **目的：スピードを出しても乗客に負担がかからない**
  - **定式化：曲率が $\kappa(s) = as$ を満たす**

    （直線と円でジェットコースターを作ると，ムチ打ちになる）
  - **解く：クロソイド曲線**

- **問題：サッカーで，シュートコースを決定する問題**
    - **図の状況で，シュートコースを決めよ**

      （ボールのある点とゴールの中を，実現可能な曲線で繋げ）

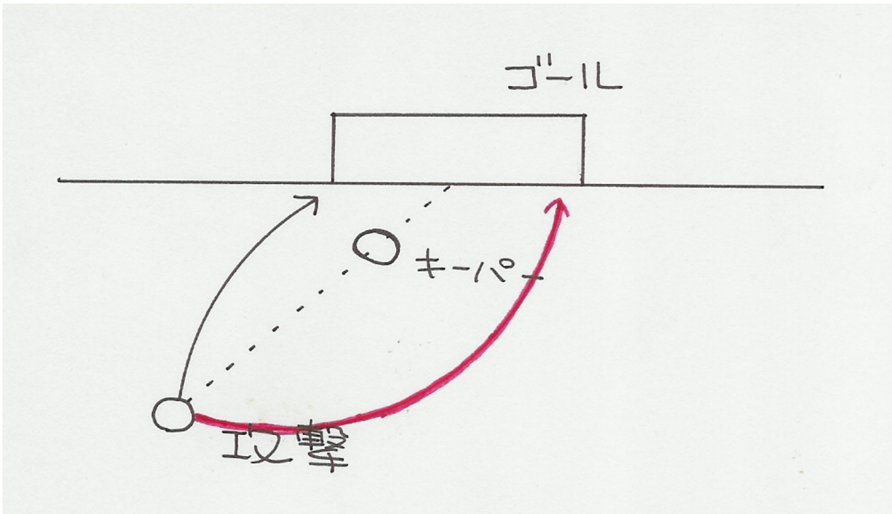


○ **目的：キーパーに触られないようなシュートコース（曲線）**

○ **定式化：キーパーから曲線までの距離が大きい**

（ただし曲線の曲率は，ある値より小さく一定であるとする）

○ **図の赤い方の曲線が解**



○　**目的：（車または自転車で）カーブを安全に曲がる**

○　**定式化：曲率の最大値が小さい**（スリップしない為に）

○　**図のような走り方が最適（out-in-out）**