２００５年度広島大学理学部数学科卒業論文

曲率からみる平面曲線の性質

１４７１０２１Ｅ　黒木　健吾

２００６年2月１０日

1　始めに

平面曲線 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ の曲率 $\kappa(t)$ は C^∞ な点において次のように与えられる。

$$\kappa(t) = \det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t))/|\dot{\gamma}(t)|^3$$

また、特に

$$y = f(x)$$

と表せるときには

$$\kappa(t) = \ddot{\gamma}(t)/(1 + \dot{\gamma}(t)^2)^{3/2}$$

とすることができる。ちなみに曲率の大きさはパラメータに依存することはなく、正負の符号はその曲線が左右どちらの向きに回っているかを示している。以下に示す定理は平面曲線の基本定理と呼ばれているものである。

定理 1.1 ２つの平面曲線が合同であるための必要十分条件は、長さが等しく、かつ対応する点における曲率が等しいことである。

この定理は、「平面曲線は曲率で完全に決まる」ということを示している。簡単に言うと、曲率を見ればその平面曲線の性質が全て分かる、ということである。しかし一般に、「平面曲線がある性質を満たすための必要十分条件は、曲率関数がある性質を満たすことである」というタイプの定理は、殆ど知られていない。例えば、平面曲線 $\gamma(t)$ が閉曲線となる為の曲率の条件は、曲率関数が周期関数となることが必要であることは直ちに分かる。しかしこれは十分条件ではない（例えば、三角関数のグラフなど）。

本稿では、自己交叉という平面曲線の性質を考える（閉曲線となる場合も含む。以下同じ）。幾何学的に考えて、曲線が自己交叉する為には、曲率がある意味で「大きい」ことが要請されると思われる。本稿では、曲線が自己交叉する為の曲率の条件を決定することを目指し、その最初のステップとして、いくつかの予想を考察し、具体例でそれらを検証した。

2　本題

単純に考えてみると、曲率 $|\kappa(t)|$ が極端に大きければ $\gamma(t)$ は自己交叉しそうである。すなわち次の予想が立てられる。

予想 2.1　ある点において曲率が十分大きければ曲線は自己交叉する。すなわち、ある $M \in \mathbf{R}$ が存在して $|\kappa(t)| \geq M$ ならば $\gamma(t)$ は自己交叉する。

これを検証するために $\gamma_0(t) = (t, \sin(1/t))$ （すなわち $y = \sin(1/x)$) を考える。$\gamma_0(t)$ の曲率 $\kappa_0(t)$ は

$$\kappa_0(t) = (2t^3\cos(1/t) - t^2\sin(1/t)) \ / \ (t^4 + \cos^2(1/t))^{3/2}$$

となる。$\sin(1/t) = 1$ すなわち $t = 2/(\pi(4n-3))$（$n \in \mathbf{N}$）で $n \to \infty$ としたとき $\kappa_0(t) \to \infty$ となる。しかし $\gamma_0(t)$ は $y = f(x)$ と表せるので自己交叉しない。つまり $\gamma_0(t)$ は曲率がどんなに大きくても自己交叉しない例の１つである。よってこの予想は間違っていたということである。このことから１点の曲率だけ調べても自己交叉するかどうかは判定できないことが分かる。

次に $\gamma(t)$ の曲率 $|\kappa(t)|$ をある区間で円と比較することによって自己交叉するかどうかを検証する方法を考える。その方法として先に挙げた予想を検証する。

予想 2.2 ある点で曲線の曲率を円に近似する。その点を含むある区間で曲率が円より大きければ曲線は自己交叉する。すなわち、$\gamma(t) \in [a, a + 2\pi r]$ において $|\kappa(t)| \geq 1/r$ ならば曲線は自己交叉する。（ r は $|\kappa(a)|$ を曲率とする円の半径、すなわち $r = 1/|\kappa(a)|$）

この方法を検証するための例としてアルキメデス螺旋

$$\gamma_1(t) = (at\cos t, at\sin t)$$

を考える。（$t \in \mathbf{N}$）ちなみにアルキメデス螺旋は自己交叉はしない曲線である。$\gamma_1(t)$ の曲率 $\kappa_1(t)$ とすると、

$$\kappa_1(t) = (2 + t^2)/a(1 + t^2)^{3/2}$$

となる。$\kappa_1(t)$ は単調減少関数なので、実際に自己交叉していないことを確かめられる。しかし、この螺旋と逆向きの方向に回っている曲線 $\gamma_2(t)$ を考える。$\gamma_2(t)$ の曲率 $\kappa_2(t)$ は単調増加関数なので、$|\kappa_2(t)| \geq 1/r$ となっているが、 $\gamma_2(t)$ は自己交叉していない。つまり、この予想も間違っていたということになる。

また、自己交叉しているかどうかを判定する方法として、全曲率というものを求める方法がある。全曲率とは、弧長パラメータを s ($s \in [0, l]$) とした

ときの $\int_0^l \gamma(s)ds$ である。閉曲線であればこれが 2π の整数倍になっているというものである。しかしながら、与えられた曲線の全曲率を求めることは、一般的に非常に困難である。弧長パラメータでなければ最低 2 回は積分しなければならない。

では、どうすれば自己交叉するかどうかを判定できるだろうか。最後にヒントとなりそうな曲線を挙げておく。

$$\gamma_3(t) = (1 - 2a \sin t)(\cos t, \sin t) \qquad (t \geq 0)$$

この曲線は a の値が 0 のとき半径 1 の円で、a の値が大きくなるとある点で速度ベクトルが 0 となり、更に大きくすると自己交叉するという曲線である。（必ず自己交叉はしている。）この曲率 を$\kappa_3(t)$ とすると、

$$\kappa_3(t) = (1 + 8a^2 - 6a \sin t)/(1 + 4a^2 - 4a \sin t)^{3/4}$$

となる。よって $\kappa_3(t)$ は、a や t の値によって 1 よりも小さくなる点がある。つまり先の予想のように至るところで $|\kappa(t)| \geq 1/r$ となってる必要はなさそうである。

.

参考文献

[1] 梅原雅顕, 山田光太郎, 曲線と曲面 -微分幾何的アプローチ - , 裳華房 (2002)

[2] 荻上紘一, 多様体, 共立講座

[3] 示野信一, parametric curve,
URL: http://www.xmath.ous.ac.jp/~shimeno/maple/pcurve.html