平成１７年度　卒業論文

# 正規直交標構を用いたガウスの驚異の定理の証明

広島大学理学部数学科
1471027C　　下村和義
指導教官　田丸博士助教授
2006年2月10日

## 1　はじめに

我々にとってもっとも想像しやすい空間は 3 次元 Euclid 空間である。この論文ではその 3 次元 Euclid 空間内の曲面について考えていきたい。一言で曲面と言っても様々な情報を含んでいる。例えば「大きさ」「形」「曲がり具合」などである。ここでは曲面の「曲がり具合」に注目する。曲面の「曲がり具合」を表わすガウス曲率について、ガウスの驚異の定理というそれはそれはすばらしい定理がある。本論文では、このガウスの驚異の定理の証明を自然標構を用いた場合と正規直交標構を用いた場合の両方から考えてみる。３.１で自然標構での証明をし、３.２で正規直交標構を用いた証明をしている。
ガウスの驚異の定理とは第１基本形式と第2基本形式によって表せるガウス曲率が実は第１基本形式だけで決まるということを示している。つまり、地球が平らでないことを星を見て(法ベクトルの挙動から)認識していたが実はそのような外的な情報を用いなくても内在的な情報で認識できるのだ。ここで、第１基本形式とは、曲面 $X$ の各点における接平面に導入される内積のことをいう。また、第2基本形式とは、曲面片の各点の法線方向の"高さ"を表わす2階の微係数である。
ガウス曲率は、接ベクトルとそれらの内積によって定義される。自然標構を用いた場合、接ベクトルを求めることは容易であるが、内積の計算が複雑になる。正規直交標構を用いた場合、内積は簡単だが、接ベクトルを決めるための手順が複雑になる。

## 2　準備

では、定理を証明する前にいくつかの準備をしておく。

（定義１）[局所径数表示](パラメータ表示)
$S$ を $U$ から $V$ への $C$　写像とする。
このとき、$S$ が曲面 $X$ の局所径数表示とは $\forall p \in X$ に対して次の 1) , 2) , 3) が成り立つことである。
1) $U$ は $\mathbf{R}^2$ の開集合であり、$S$ は単射。
2) $S_u(u,v)$ , $S_v(u,v)$ は、$\forall (u,v) \in U$ に対して線形独立。
3) $V = S(U)$ は $X$ における $p$ の近傍。
これで曲面 X を定義する。
.
（定義２）[第1基本形式]
接ベクトル $\xi,\eta \in T_p(X)$ の内積を $\langle \xi,\eta \rangle_p = \langle \xi,\eta \rangle$ により定義する。
各点 $p$ に対して、このように定めた内積を、計量あるいは第１基本形式という。また、その係数を $E$ , $F$ , $G$ で表わす。

(定義３)[第2基本形式]
$n = S_u \times S_v / \| S_u \times S_v \|$ を単位法ベクトルとする。

$$b_{11} = \partial^2 S / \partial u^2 \cdot n \quad , \quad b_{12} = b_{21} = \partial^2 S / \partial u \partial v \cdot n \quad , \quad b_{22} = \partial^2 S / \partial v^2 \cdot n$$

とおいて、この2次形式

$$\mathrm{II} = \begin{pmatrix} S_u & S_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_u \\ S_v \end{pmatrix}$$

を第2基本形式という。また、その係数を $L$ , $M$ , $N$ で表わす。

(定義４)
ガウス曲率 $K$ は第１基本形式、第2基本形式の係数を用いて

$$K = \left( EG - F^2 \right) / \left( LN - M^2 \right)$$

と表わすことができる。

(定理１)
ガウス曲率 $K$ は主曲率 $k_1,k_2$ を用いて

$$K = k_1 k_2$$

と表わすことができる。ここで主曲率 $k_1,k_2$ とは、

$$\begin{vmatrix} L - kE & M - kF \\ M - kF & N - kG \end{vmatrix} = 0$$

の２つの解のことである。

(定義５)[等距離同型写像](等長対応)
$\varphi: X_1 \to X_2$ :微分同型写像とする。各点 $p \in X_1$ における微分同型写像 $d\varphi_p$ が接平面の間のユニタリ同型写像であるとき、$\varphi$ を等距離同型写像(isometory)という。ここで、ユニタリ同型写像とは、内積を保つ写像のことである。これは等長対応ともいい、２つの曲面(またはその一部)の間の第１基本形式を保つ対応である。

(補題)微分同型写像 $\varphi: X_1 \to X_2$ が等距離同型写像であることと次が成り立つことは同値である。
$\forall c_1: I \to X_1$ は $X_1$ 上の滑らかな曲線である。これに対し、

$$L(\varphi c_1) = L(c_1)$$

である。

(定理２)[Gram-Schmidt の直交化法]
$V$ の基底 $\{a_1,a_2,a_3\}$ に対して、正規直交基底 $\langle e_1,e_2,e_3 \rangle$ をつくることができる。

$\because$) [claim]　帰納的な方法で、求める正規直交基底のベクトルを順次構成していく。
まず、$e_1 = a_1 / \| a_1 \|$ とおく。このとき $\| e_1 \| = 1$ である。
このとき $e_2' = a_2 - \langle a_2,e_1 \rangle e_1$ とおくと、これは $e_1$ と直交する。すなわち $\langle e_2', e_1 \rangle = 0$ である。
そこで $e_2 = e_2' / \| e_2' \|$ とおくと、$\| e_2 \| = 1$ で明らかに $\langle a_1,a_2 \rangle = \langle e_1,e_2 \rangle$ である。
次に、$e_1,e_2$ によって張られる平面への $a_3$ の正射影を $a_3'$ とすると
$a_3' = \langle a_3,e_1 \rangle e_1 + \langle a_3,e_2 \rangle e_2$　である。
$e_3' = a_3 - a_3'$ は $e_1,e_2$ と直交するから
$e_3 = e_3' / \| e_3' \|$ とおけば、正規直交基底 $\{e_1,e_2,e_3\}$ が得られる。

Q.E.D

## 3　証明

それではガウスの驚異の定理の証明にはいろう。

(命題)ガウス曲率 $K$ が曲面 $X$ によらない有理関数 $k$ により

$$K = k(E,F,G,E_u,F_u,\cdots,E_{uv},\cdots,G_{vv})$$

と表せる。すなわち、ガウス曲率は、第１基本形式の係数の2階までの変微分係数を使って書き表わすことができる。

この(命題)を認めたとき、ガウスの驚異の定理は次のように示される。

（定理）[ガウスの驚異の定理]

$X_1, X_2$は曲面であり、$K_1, K_2$ は$X_1, X_2$のそれぞれのガウス曲率とする。

$\varphi: X_1 \to X_2$が等距離同型写像であるとき、$\forall p \in X_1$ に対して、 $K_2(\varphi(p)) = K_1(p)$.

$\because)$ $\varphi: X_1 \to X_2$が等距離同型写像であるとする。

$S_1: U \to X_1$ を $X_1$ の局所径数表示とすると、

$S_2 := \varphi \circ S_1: U \to X_2$ は $X_2$ の局所径数表示である。

ここで $S_1$，$S_2$ に対する第１基本形式の係数をそれぞれ$\{E_1, F_1, G_1\}$，$\{E_2, F_2, G_2\}$ とする。

$\varphi$ が等長変換、すなわち第１基本形式を保つので、$U$ 上の関数として

$$E_1 = E_2\,,\ F_1 = F_2\,,\ G_1 = G_2$$

となる。これより、任意の係数の偏微分係数が等しくなる。

さらに $p = S_1(u,v)$ のとき$\varphi(p) = \varphi \circ S_1(u,v) = S_2(u,v)$である。

これにより

$$K_1(p) = K_1(u,v) = K_2(u,v) = K_2(\varphi(p))$$

である。

Q.E.D

すなわち、ガウスの驚異の定理を示すためには、(命題)を証明すればよい。

## ３．1　 自然標構を用いた証明

では、今から自然標構を用いて (命題) を証明する。

$X$ を曲面とし、$S$ をその局所径数表示とする。$n$を単位法ベクトル場とすると、

$$n = S_u \times S_v / \| S_u \times S_v \|.$$

この $S_u$，$S_v$，$n$ が線形独立であることは明らかである。

$S_u$，$S_v$，$n$ を偏微分したものを、基底である $S_u$，$S_v$，$n$ の線形結合で表したときの係数を求める。

(1) $n$ について

$$\langle n, n \rangle \equiv 1$$

この両辺を微分すれば

$$0 = \langle n, n \rangle_u + \langle n, n \rangle_v = 2\langle n_u, n \rangle + 2\langle n_v, n \rangle$$

$$\langle n_u, n \rangle = 0 \quad , \quad \langle n_v, n \rangle = 0$$

これより $n_u$，$n_v$ は $n$ と直交している。すなわち、これらは $S_u$，$S_v$ の線形結合で表せる。

$$\left.\begin{aligned} n_u &= aS_u + bS_v \\ n_v &= cS_u + dS_v \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

ここで、$\langle n_u, n \rangle = 0 \quad , \quad \langle n_v, n \rangle = 0$　の両辺を微分する。

$$0 = \langle S_u, n \rangle_u = \langle S_{uu}, n \rangle + \langle S_u, n_u \rangle = L + \langle S_u, n_u \rangle$$

$$\langle S_u, n_u \rangle = -L$$

同様にして

$$\langle S_u, n_v \rangle = \langle S_v, n_u \rangle = -M \quad , \quad \langle S_v, n_v \rangle = -N$$

が求まる。これに(＊)を代入すると

$$-L = \langle S_u, n_u \rangle = \langle S_u, aS_u + bS_v \rangle = a\langle S_u, S_u \rangle + b\langle S_u, S_v \rangle = aE + bF\,.$$

同様に

$$-M=\langle S_u,n_v\rangle=cE+dF \quad , \quad -M=\langle S_v,n_n\rangle=aF+bG \quad , \quad -N=\langle S_v,n_v\rangle=cF+dG$$

が得られる。この４式を $a\,,b\,,c\,,d$ について解けば

$$a=\frac{FM-GL}{EG-F^2} \quad , \quad b=\frac{FL-EM}{EG-F^2} \quad , \quad c=\frac{FN-GM}{EG-F^2} \quad , \quad d=\frac{FM-EN}{EG-F^2}.$$

これより(＊)は

$$n_u=(1/g)\big((FM-GL)S_u+(FL-EM)S_v\big) \quad , \quad n_v=(1/g)\big((FN-GM)S_u+(FM-EN)S_v\big)$$

$$\left(g=EG-F^2\right)$$

とできる。

(2) $S_u$ , $S_v$ について

$$S_{uu}=\Gamma_{11}^1S_u+\Gamma_{11}^2S_v+\square n \quad , \quad S_{uv}=\Gamma_{12}^1S_u+\Gamma_{12}^2S_v+\square n=S_{vu} \quad , \quad S_{vv}=\Gamma_{22}^1S_u+\Gamma_{22}^2S_v+\square n$$

$$\left(\Gamma_{12}^1=\Gamma_{21}^1 \quad \Gamma_{12}^2=\Gamma_{21}^2\right)$$

とおく。 $S_u$ , $S_v$ が $n$ と直交することより

$$L=\langle S_{uu},n\rangle=\square\langle n,n\rangle=\square$$

同様に

$$\square=M \quad , \quad \square=N.$$

また、

$$\langle S_{uu},S_u\rangle=\Gamma_{11}^1\langle S_u,S_u\rangle+\Gamma_{11}^2\langle S_v,S_u\rangle=\Gamma_{11}^1E+\Gamma_{11}^2F$$

$$\langle S_{uu},S_v\rangle=\Gamma_{11}^1F+\Gamma_{11}^2G$$

となるので、この連立方程式を $\Gamma_{11}^1$ , $\Gamma_{11}^2$ について解けば

$$\Gamma_{11}^1=(1/g)\big(G\langle S_{uu},S_u\rangle-F\langle S_{uu},S_v\rangle\big) \quad , \quad \Gamma_{11}^2=(1/g)\big(E\langle S_{uu},S_v\rangle-F\langle S_{uu},S_u\rangle\big).$$

同様に

$$\Gamma_{12}^1=(1/g)\big(G\langle S_{uv},S_u\rangle-F\langle S_{uv},S_v\rangle\big) \quad , \quad \Gamma_{12}^2=(1/g)\big(E\langle S_{uv},S_v\rangle-F\langle S_{uv},S_u\rangle\big)$$

$$\Gamma_{22}^1=(1/g)\big(G\langle S_{vv},S_u\rangle-F\langle S_{vv},S_v\rangle\big) \quad , \quad \Gamma_{22}^2=(1/g)\big(E\langle S_{vv},S_v\rangle-F\langle S_{vv},S_u\rangle\big)$$

が求まる。ここで、

$$\langle S_u,S_u\rangle_u=\langle S_{uu},S_u\rangle+\langle S_u,S_{uu}\rangle=2\langle S_{uu},S_u\rangle$$

$$\therefore \ \langle S_{uu},S_u\rangle=\frac{1}{2}E_u$$

$$\langle S_u,S_v\rangle_u=\langle S_{uu},S_v\rangle+\langle S_u,S_{uv}\rangle=\langle S_{uu},S_v\rangle+\frac{1}{2}E_v$$

$$\therefore \ \langle S_{uu},S_v\rangle=F_u+\frac{1}{2}E_v$$

とでき、他も同様の方法で

$$\langle S_{uv},S_u\rangle=\frac{1}{2}E_v \quad , \quad \langle S_{uv},S_v\rangle=\frac{1}{2}G_u \quad , \quad \langle S_{vv},S_u\rangle=F_v-\frac{1}{2}G_u \quad , \quad \langle S_{vv},S_v\rangle=\frac{1}{2}G_v$$

が求まる。この結果を用いれば

$$\Gamma_{11}^1=(1/2g)\big(GE_u-2FF_u+FE_v\big) \quad , \quad \Gamma_{11}^2=(1/2g)\big(2EF_u-EE_v-FE_u\big)$$

$$\Gamma_{12}^1=(1/2g)\big(GE_v-FG_u\big) \quad , \quad \Gamma_{12}^2=(1/2g)\big(EG_u-FE_v\big)$$

$$\Gamma_{22}^1=(1/2g)\big(2GF_v-GG_u-FG_v\big) \quad , \quad \Gamma_{22}^2=(1/2g)\big(EG_v-2FF_v+FG_u\big)$$

と表せる。この $\Gamma_{jk}^i$ $\ (i,j,k=1,2)$ はクリストッフェル(Christoffel) の記号と呼ばれる。

次に $S_{uu},S_{uv}$ をさらに $u,v$ で偏微分してみる。

$$\begin{aligned}
(S_{uu})_v &= (\Gamma^1_{11})_v S_u + \Gamma^1_{11}S_{uv} + (\Gamma^2_{11})_v S_v + \Gamma^2_{11}S_{vv} + L_v n + L n_v \\
&= (\Gamma^1_{11})_v S_u + \Gamma^1_{11}(\Gamma^1_{12}S_u + \Gamma^2_{12}S_v + Mn) + (\Gamma^2_{11})_v S_v + \Gamma^2_{11}(\Gamma^1_{22}S_u + \Gamma^2_{22}S_v + Nn) + L_v n + L(cS_u + dS_v) \\
&= \left\{(\Gamma^1_{11})_v + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} + cL\right\}S_u \\
&\quad + \left\{(\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} + dL\right\}S_v \\
&\quad + \left(\Gamma^1_{11}M + \Gamma^2_{11}N + L_v\right)n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(S_{uv})_u &= (\Gamma^1_{12})_u S_u + \Gamma^1_{12}S_{uu} + (\Gamma^2_{12})_u S_v + \Gamma^2_{12}S_{vu} + M_u n + M n_u \\
&= (\Gamma^1_{12})_u S_u + \Gamma^1_{12}(\Gamma^1_{11}S_u + \Gamma^2_{11}S_v + Ln) + (\Gamma^2_{12})_u S_v + \Gamma^2_{12}(\Gamma^1_{12}S_u + \Gamma^2_{12}S_v + Mn) + M_u n + M(aS_u + bS_v) \\
&= \left\{(\Gamma^1_{12})_u + \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12} + aM\right\}S_u \\
&\quad + \left\{(\Gamma^2_{12})_u + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} + bM\right\}S_v \\
&\quad + \left(\Gamma^1_{12}L + \Gamma^2_{12}M + M_u\right)n
\end{aligned}$$

ここで $(S_{uu})_v = (S_{uv})_u$ であり、 $S_u,S_v,n$ の線形独立性より各係数は等しくなる。

$$(\Gamma^1_{11})_v + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} + cL = (\Gamma^1_{12})_u + \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12} + aM$$

$$(\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} + dL = (\Gamma^2_{12})_u + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} + bM \qquad \cdots(□□)$$

$$\Gamma^1_{11}M + \Gamma^2_{11}N + L_v = \Gamma^1_{12}L + \Gamma^2_{12}M + M_u$$

また、以前求めた $b = (1/g)(FL - EM) \quad d = (1/g)(FM - EN)$ を用いると、

$$\begin{aligned}
dL - bM &= (1/g)\left\{(FM - EN)L - (FL - EM)M\right\} \\
&= (1/g)E(M^2 - LN) = -E\,(EG - F^2)\big/(LN - M^2) = -EK
\end{aligned}$$

とできる。この結果と (□□) の式より

$$EK = (\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - (\Gamma^2_{12})_u - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}$$

$$K = \frac{1}{E}\left\{(\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - (\Gamma^2_{12})_u - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}\right\}$$

となる。 $\Gamma^i_{jk}$ は第１基本形式の係数の2階までの偏微分係数で表わされているので証明できた。

Q.E.D

## ３．２　正規直交基底を用いた証明

では、自然標構 $S_u$ , $S_v$ , $n$ をGram-Schmidt の直交化法を用いて正規直交基底に書き換えてみる。

$e_1 = S_u/\| S_u\|$ とする。次に $S_v$ の $e_1$ への正射影を $se_1$ とおくと、 $S_v - se_1$ は$e_1$ と直交するから $\langle S_v - se_1, e_1\rangle = 0$ となる。

これより $s = \langle S_v, e_1\rangle$となる。よって $S_v - se_1 = S_v - \langle S_v, e_1\rangle e_1$ となり、これを $e_2'$ とおけば

$$e_2' = S_v - \langle S_v, e_1\rangle e_1$$

となる。ここで $e_2 = e_2'/\| e_2'\| = (S_v - \langle S_v,e_1\rangle e_1)/\|S_v - \langle S_v,e_1\rangle e_1\| \qquad \| e_2\| = 1$

である。そして、 $e_3 = e_1 \times e_2/\| e_1 \times e_2\|$ ととれば、正規直交基底 $\{e_1,e_2,e_3\}$ が得られる。

$$\begin{pmatrix} S_u & S_v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\langle S_u,S_u\rangle}} \begin{pmatrix} \sqrt{\langle S_u,S_u\rangle} e_1 & \langle S_u,S_v\rangle e_1 + \sqrt{\langle S_u,S_u\rangle\langle S_v,S_v\rangle - \langle S_u,S_v\rangle^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^1 & p_2^1 \\ p_1^2 & p_2^2 \end{pmatrix}$$

以後簡略化のためこのように書く。このとき、$\left(p_j^i\right)$ は正定値行列である。

$$\begin{aligned} dS &= S_u du + S_v dv \\ &= \left(p_1^1 e_1 + p_1^2 e_2\right)du + \left(p_2^1 e_1 + p_2^2 e_2\right)dv \\ &= \left(p_1^1 du + p_2^1 dv\right)e_1 + \left(p_1^2 du + p_2^2 dv\right)e_2 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{cases} \theta^1 = p_1^1 du + p_2^1 dv \\ \theta^2 = p_1^2 du + p_2^2 dv \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^1 & p_2^1 \\ p_1^2 & p_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

とおけば、$\theta^1, \theta^2$ は曲面上の1-form で

$$dS = \theta^1 e_1 + \theta^2 e_2 \quad \cdots(1)$$

を満たす。

ここで自然標構での証明と同様に $e_1, e_2, e_3$ を偏微分したものを、基底である $e_1, e_2, e_3$ の線形結合で表したときの係数を求める。

$$de_j = \sum_{i=1}^{2} \omega_j^i e_i \quad \cdots(2) \qquad \text{すなわち} \quad d\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 & \omega_2^3 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & \omega_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

とおけば、$\omega_j^i$ は1-form だから $\theta^1, \theta^2$ の線形結合でかける。

さらに、$\left\langle e_i, e_j \right\rangle = \delta_{ij}$ （$\delta$ はクロネッカーの $\delta$）であるからそれを微分すれば $\left\langle de_i, e_j \right\rangle + \left\langle e_i, de_j \right\rangle = 0$ が得られる。

これより、$\omega_i^j + \omega_j^i = 0$ が求まる。

特に、$i = j$ のとき $2\omega_i^i = 0$ となり $\omega_i^i = 0$ が得られる。よって

$$d\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\ -\omega_1^2 & 0 & \omega_2^3 \\ -\omega_1^3 & -\omega_2^3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

となる。この第１式と第2式をGaussの公式という。

この式よりガウス曲率が $\omega_1^2$ で求まることがわかれば驚異の定理が証明できる。

(1)を微分すると $d \circ d = 0$ より

$$\begin{aligned} 0 = ddS &= d\theta^1 e_1 - \theta^1 \wedge de_1 + d\theta^2 e_2 - \theta^2 \wedge de_2 \\ &= d\theta^1 e_1 - \theta^1 \wedge \left(\omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3\right) + d\theta^2 e_2 - \theta^2 \wedge \left(\omega_2^1 e_1 + \omega_2^3 e_3\right) \\ &= \left(d\theta^1 - \theta^2 \wedge \omega_2^1\right)e_1 + \left(d\theta^2 - \theta^1 \wedge \omega_1^2\right)e_2 - \left(\theta^1 \wedge \omega_1^3 + \theta^2 \wedge \omega_2^3\right)e_3 \end{aligned}$$

が得られる。従って

$$\begin{cases} d\theta^1 + \omega_2^1 \wedge \theta^2 = 0 \\ d\theta^2 + \omega_1^2 \wedge \theta^1 = 0 \end{cases} \quad \cdots(3)$$

$$\omega_1^3 \wedge \theta^1 + \omega_2^3 \wedge \theta^2 = 0 \quad \cdots(4)$$

が成り立つ。$\omega_i^3 \quad (i=1,2)$ は$\theta^1, \theta^2$ の線形結合であるから

$$\omega_i^3 = \sum_{j=1}^{2} h_{ij}\theta^j \quad \cdots(5)$$

とかけ、(4)に代入すると、 $h_{ij}=h_{ji}$ が得られる。同様に(2)を微分してみる

$$
\begin{aligned}
0 = dde_j &= \sum_{i=1}^{3} d\omega_j^i e_i - \sum_{i=1}^{3}\omega_j^i \wedge de_i \\
&= \sum_{i=1}^{3} d\omega_j^i e_i - \sum_{i=1}^{3}\omega_j^i \wedge \left(\sum_{k=1}^{3}\omega_i^k e_k\right) \\
&= \sum_{i=1}^{3}\left(d\omega_j^i - \sum_{k=1}^{3}\omega_j^k \wedge \omega_k^i\right) e_i
\end{aligned}
$$

これより　$d\omega_j^i - \sum_{k=1}^{3}\omega_j^k \wedge \omega_k^i = 0$ が得られ、$i=1,\ j=2$ とすれば $d\omega_2^1 - \omega_2^3 \wedge \omega_3^1 = 0$ となるから

$$d\omega_2^1 = \left(h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}\right)\theta^1 \wedge \theta^2$$

が得られる。この式をGaussの方程式という。
また、第2基本形式については

$$II = -dS \cdot de_3 = -\left(\theta^1 e_1 + \theta^2 e_2\right)\cdot\left(\omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2\right) = \theta^1\omega_1^3 + \theta^2\omega_2^3$$

であるから(5)より

$$II = \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij}\theta^i\theta^j .$$

ここで$\theta^1, \theta^2$ は正規直交標構$e_1, e_2$の双対であり、 $e_1, e_2$の正規直交性は第１基本形式だけに依存する性質である。このことより $\theta^1, \theta^2$は第2基本形式に依存しない。
さらに、$\omega_2^1$ は(3)によって決まるから第１基本形式だけで決まる。
よって、次を示せばよい。

[claim]　ガウス曲率$K = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = \det\left(h_{ij}\right)$ .
第１基本形式は、$\{S_u, S_v\}$に関しては、

$$g = \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}.$$

正規直交標構$\{e_1, e_2\}$　に関しては、

$$g = \left(\theta^1\right)^2 + \left(\theta^2\right)^2 = \begin{pmatrix} \theta^1 & \theta^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix}.$$

基底の変換行列が $\left(p_j^i\right)$ だったので

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^1 & p_1^2 \\ p_2^1 & p_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1^1 & p_2^1 \\ p_1^2 & p_2^2 \end{pmatrix}.$$

同様に、第2基本形式に関しては

$$II = \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

$$II = \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij}\theta^i\theta^j = \begin{pmatrix} \theta^1 & \theta^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^1 & p_1^2 \\ p_2^1 & p_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^1 & p_2^1 \\ p_1^2 & p_2^2 \end{pmatrix}$$

とかける。この求まった2式より

$$\begin{pmatrix} L - \lambda E & M - \lambda F \\ M - \lambda F & N - \lambda G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^1 & p_1^2 \\ p_2^1 & p_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} - \lambda & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^1 & p_2^1 \\ p_1^2 & p_2^2 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{vmatrix} L - \lambda E & M - \lambda F \\ M - \lambda F & N - \lambda G \end{vmatrix} = 0 \quad と \quad \begin{vmatrix} h_{11} - \lambda & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$ が同値となる。

従って主曲率 $k_{1,}\, k_2$ は行列 $\left(h_{ij}\right)$ の固有値と一致する。

ガウス曲率 $K = k_1 k_2$ より $K = \det\left(h_{ij}\right)$ となる。

これよりガウス曲率は第１基本形式によって決まることが証明できた。

Q.E.D

## 参考文献


[1]　砂田　利一　[曲面の幾何]　　岩波書店

[2]　荻上　紘一　[多様体]　　共立出版株式会社

[3]　佐久間　元敬　　富永　晃　　江口　正晃　　岩上　辰男　　吉田　敏男
　[線形代数　教科書]　　共立出版株式会社