2005 年度数学通論 II　　担当：田丸

0　数学通論 II について

数学通論 II および同演習では, 位相空間を扱います. 位相空間を扱う幾何学を位相幾何学（トポロジー）と呼びますが, これは直感的に言って, 「空間を曲げたり延ばしたりしても良いですよ」というルールの下で空間を扱う学問です. このルールの下では空間の自由度が, 例えば距離空間の場合と比較して, 格段に増します（例えば, 閉区間 $[0,1]$ と $[0,2]$ は, 自然な距離に関して違う距離空間ですが, 位相空間としては同じ空間です）. 本講義の目的は, このような位相空間の定義, 基本的な性質や概念を学ぶことです. 特に, 位相空間の性質とは, 「空間を曲げたり延ばしたりしても変わらない性質」のことを意味します（こういうものを不変量と呼びます）. 「オイラー数」などがその典型的な例になります.

講義のテキストおよび参考書として以下のものを指定します:

　　教科書：「トポロジーと幾何学入門」（I.M. シンガー, J.A. ソープ 共著, 培風館）

　　参考書：「集合と位相」（鎌田正良 著, 近代科学社）

参考書として挙げた本は, 前期の数学通論 I の教科書として指定されていたものです. また, 位相に関する本は他にも数多くありますので, 自分に合ったものを適当に選んで構いません（本によって記号が違う場合は多々あるので, 適宜読み替える必要はありますが）. ちなみに講義は教科書に完璧に沿って行われる訳ではありません.

成績の評価基準は, 「位相空間の性質および諸概念を理解しているかどうか」です. 直感的に（幾何学的に, あるいは図形的に）理解することと, それを数学的に厳密に述べ必要ならば証明を与えることができること, その両方を要求します. 理解を確かめる為に, 中間試験, 期末試験およびレポートを課す予定です.

講義中に何か質問・コメント等がありましたら, 遠慮無く言って下さい. むしろ言ってくれると助かります. 講義時間以外でも遠慮無くどうぞ. 下記のアドレスに e-mail を送るなり研究室に来るなりして適当に捕まえて下さい. こちらからのテスト・レポート・休講等の連絡は, 基本的に授業時間中に全て伝えます. また, 各種お知らせ及びプリント等の公開を下記の web page で行う予定です.

田丸 博士（たまる ひろし）

研究室：理学部 C-613

e-mail：tamaru @ math.sci.hiroshima-u.ac.jp

url：http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~tamaru/index-j.html

1 位相空間論

本講義の前半部分では, 位相空間の定義と基本的な概念や性質を学ぶ. 概念に関する知識も無くては困るが, 最も大事なことは「証明の方法を身に付けること」であろう. 特に位相空間論は, 証明の訓練に適した題材であるし, 逆に言うと証明が身に付いていないと何も分からなくなる可能性が高い・・・.

1.1 位相空間の定義

標語的に述べると, 「位相空間 = 集合 + 開集合系」である. より詳しく言うと, 位相空間とは, 「その部分集合が開集合かどうかが決められている集合」.

復習. 集合 S の部分集合の全体を **巾集合** (**power set**) と呼び, 2^S または $\mathfrak{P}(S)$ で表す:

$$2^S = \mathfrak{P}(S) = \{U \mid U \subset S\}.$$

定義 1.1.1 S を集合とする. $\mathfrak{U} \subset 2^S$ が次の (1)-(3) を満たすとき, $(S, \mathfrak{U})$ は **位相空間** (**topological space**) であるといい, $\mathfrak{U}$ を S の **位相** (**topology**) という:

(1) $\phi \in \mathfrak{U}$, $S \in \mathfrak{U}$,

(2) $U_1, U_2 \in \mathfrak{U} \ \Rightarrow \ U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{U}$,

(3) $\forall \lambda \in \Lambda, U_\lambda \in \mathfrak{U} \ \Rightarrow \ \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathfrak{U}$.

定義 1.1.2 $A \subset S$ が位相空間 $(S, \mathfrak{U})$ の **開集合** (**open set**) とは, $A \in \mathfrak{U}$ となること.

距離空間の復習. 写像 $\rho : S \times S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が次の (1)-(3) を満たすとき, (S, ρ) は **距離空間** (**metric space**) であるといい, ρ を S の **距離** (**metric**) という:

(1) $\rho(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$,

(2) $\forall a, b \in S,\ \rho(a, b) = \rho(b, a)$,

(3) $\forall a, b, c \in S,\ \rho(a, c) \leq \rho(a, b) + \rho(b, c)$.

さらに, $A \subset S$ が (S, ρ) の **開集合** とは, 次が成り立つこと: $\forall a \in A, \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(a) \subset A$, ただし $B_\varepsilon(a)$ は a における **ε-近傍** である (i.e., $B_\varepsilon(a) := \{s \in S \mid \rho(a, s) < \varepsilon\}$).

命題 1.1.3 距離空間 (S, ρ) に対し, $\mathfrak{U} := \{A \subset S \mid A$ は (S, ρ) の開集合 $\}$ は S の位相.

命題 1.1.4 $\mathfrak{U} := 2^S$ は S の位相である (これを **離散位相** と呼ぶ). $\mathfrak{U} := \{\phi, S\}$ も S の位相である (これを **密着位相** と呼ぶ).

命題 1.1.5 $(S, \mathfrak{U})$ を位相空間とし, $A \subset S$ とすると, $\mathfrak{U}_A := \{A \cap U \mid U \in \mathfrak{U}\}$ は S の位相である (これを **相対位相** と呼ぶ).

以下, $\mathbb{R}^n$ の通常の距離から決まる位相を, $\mathbb{R}^n$ の **<u>標準的な位相</u>** と呼ぶことにする. 特に断らない限り, $\mathbb{R}^n$ に標準的な位相 $\mathfrak{U}$ を入れた位相空間 $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{U})$ を, 単に $\mathbb{R}^n$ で表す.

例 1.1.6 $\mathbb{R} \supset \mathbb{Z}$ による $\mathbb{Z}$ の相対位相は離散位相である.

例 1.1.7 $(S, \mathfrak{U})$ を密着位相の入った位相空間とするとき, $\forall A \subset S$, $\mathfrak{U}_A$ は A の密着位相.

定義 1.1.8 位相空間 $(S, \mathfrak{U})$ に対し, $S \supset A$ が **<u>閉集合</u>** (**<u>closed set</u>**) $:\Leftrightarrow A^c \in \mathfrak{U}$.

ここで $A^c := S - A$ は A の **<u>補集合</u>** (**<u>complementary set</u>**).

例 1.1.9 標準的な位相に関して, $\mathbb{R} \supset [a, b]$ は閉集合.

イメージ的には, 閉集合とは「端」がある集合. この「端」をきちんと定義しよう.

定義 1.1.10 位相空間 $(S, \mathfrak{U})$ に対し, $s \in S$ が $A \subset S$ の **<u>集積点</u>** (**<u>accumulationg point</u>**) $:\Leftrightarrow \ s \in \forall U \in \mathfrak{U}, \ (U - \{s\}) \cap A \neq \phi$. また, 集積点の全体を A^a で表す.

イメージ的には, s が集積点であるとは「s のめちゃめちゃ近くに A の点がある」こと. より正確に言うと, 「s のめちゃめちゃ近くに, 自分以外の A の点がある」こと.

例 1.1.11 $\mathbb{R}$ の標準的な位相に関し, $A = [0, 1) \cup \{3\}$ の集積点の全体は $A^a = [0, 1]$.

定義 1.1.12 位相空間 $(S, \mathfrak{U})$ に対し, $\overline{A} := A \cup A^a$ を $S \supset A$ の **<u>閉包</u>** (**<u>closure</u>**) と呼ぶ.

A の閉包とは, A に「端」を付け加えたものである. 直感的に考えて, A が閉集合なら, 端は元々付いているので $\overline{A} = A$ となる. また, $\overline{A}$ には端が付いているのだから, それは閉集合である. ・・・これらは実際に成立するが, 証明は (直感的な説明ほどは) 簡単ではない.

定理 1.1.13 位相空間 $(S, \mathfrak{U})$ に対し, $S \supset A$ が閉集合 $\Leftrightarrow A = \overline{A}$.

$(\Rightarrow)$ の証明は比較的容易. $(\Leftarrow)$ の証明には, $\overline{A}$ が閉集合であることを示せば良い. 次のような step に分けて証明出来る:

(1) $U \in \mathfrak{U}, \ U \cap A = \phi \ \Rightarrow \ U \cap \overline{A} = \phi$,
(2) $\forall s \in \overline{A}^c, \ \exists U \in \mathfrak{U} \ : \ s \in U \subset \overline{A}^c$,
(3) $\overline{A}^c \in \mathfrak{U}$.

定理 1.1.14 位相空間 $(S, \mathfrak{U})$ に対し, $S \supset A$ が開集合ならば, A の任意の開集合は S の開集合. $S \supset A$ が閉集合ならば, A の任意の閉集合は S の閉集合.

余談. 証明をする時に, まず最初にしなくてはならないことは, 「証明すべきこと（目標）を明確にすること」です. このプリントの例や命題, 演習で配布される問題, あるいは教科書の練習問題に対し, 自分で（答えや証明を見ないで）証明すべきことを書く, またそれに従って証明を付ける, という訓練は有効であると思います.

1.2 連結とコンパクト

本節では, 位相空間の連結性とコンパクト性を定義する. 距離空間の連結性とコンパクト性を数学通論 I で学んだと思うが, その概念の拡張になっている.

定義 1.2.1 位相空間 $(S, \mathfrak{U})$ が **連結** (**connected**) であるとは, 次が成り立つこと:
$\forall A \subset S$, A が開かつ閉 $\Rightarrow$ $A = \phi$ or S.

位相空間が連結であることを言葉で述べると, 「開かつ閉である集合は自明なものしか無い」. 任意の位相空間 $(S, \mathfrak{U})$ に対して, ϕ および S は明らかに開かつ閉であることに注意.

例 1.2.2 $\mathbb{R} \supset A = \{1, 2\}$ は連結でない (ただし, A には相対位相を入れて考える).

定理 1.2.3 位相空間 $(S, \mathfrak{U})$ が連結でないための必要十分条件は, 次が成り立つこと:
$\exists V_1, V_2 \in \mathfrak{U}\ :\ S = V_1 \cup V_2,\ V_1 \cap V_2 = \phi,\ V_1 \neq \phi \neq V_2$.

位相空間が連結でないための必要十分条件は, 「2つの開集合に分けられる」.

例 1.2.4 $\mathbb{R} \supset A = (0, 1) \cup (3, 4]$ は連結でない.

例 1.2.5 $\mathbb{R}$ に離散位相を入れた空間は連結でない. 一般に, 離散位相を入れた空間は, 元の個数が 2 以上なら連結でない.

定義 1.2.6 位相空間 $(S, \mathfrak{U})$ に対し, $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}$ が **開被覆** (**open cover**) とは, 次が成立すること: $S = \displaystyle\bigcup_{V \in \mathfrak{V}} V$.

定義 1.2.7 位相空間 $(S, \mathfrak{U})$ が **コンパクト** (**compact**) であるとは, 次が成立すること:
$\forall \mathfrak{V}$: 開被覆, $\exists V_1, \ldots, V_n \in \mathfrak{V}$: $S = V_1 \cup \cdots \cup V_n$.

コンパクトの定義を言葉で述べると, 「任意の開被覆に対して, 有限な部分被覆が存在する」. コンパクトの定義に限らず数学で登場する定義は一般に, 上のような言葉で覚えるのが良い (例えば記号を丸暗記するのは非効率である). 言葉を覚えていれば, 必要に応じて記号を復元できる (訓練が必要だが). 言葉から記号を復元する訓練, 記号を言葉で表す訓練, その両方をすることを推奨する.

注意 1.2.8 $\mathbb{R}^n \supset S$ に対して, 「S がコンパクト $\Leftrightarrow$ S が有界閉集合」が成立する. この事実を用いると, コンパクト位相空間の例を挙げることは容易である.

例 1.2.9 $\mathbb{R}$ はコンパクトでない. $\mathbb{R} \supset (0, 1)$ もコンパクトでない.

定理 1.2.10 位相空間 $(S, \mathfrak{U})$ がコンパクト, $S \supset A$ が閉集合 $\Rightarrow$ $(A, \mathfrak{U}_A)$ はコンパクト.

1.3 連続写像

ここでは位相空間から位相空間への写像が連続であることの定義を述べ, その性質を論じる. 特に, 連続写像によって, 位相空間の諸性質（開集合, 閉集合, 連結, コンパクト, $\cdots$）がどのように移り合うか, を問題とする. 一般に「集合 + 構造」があるとき, その「構造を保つ写像」を考えることは, 数学全体に於いて基本的な定石である. 例えば, 位相空間に対する連続写像, ベクトル空間に対する線形写像, 群に対する準同型写像, などなど.

定義 1.3.1 位相空間 S, T に対し, 写像 $f : S \to T$ が **連続** とは, 次が成り立つこと: $T \supset \forall U$: 開集合, $S \supset f^{-1}(U)$ が開集合.

ここで $f^{-1}(U) := \{x \in S \mid f(x) \in U\}$ は f による U の **逆像** である. 逆写像とは関係無い（逆写像が存在するしないと無関係に定義される）ことに注意.

命題 1.3.2 距離空間 X, Y に対し, $f : X \to Y$ が距離空間として連続 $\Leftrightarrow$ $f : X \to Y$ が位相空間として連続.

例 1.3.3 $\mathbb{R}$ の標準的な位相を $\mathfrak{U}$, 離散位相を $\mathfrak{U}^d$, 密着位相を $\mathfrak{U}^t$ とすると,

(1) $\mathrm{id} : (\mathbb{R}, \mathfrak{U}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{U}) : x \mapsto x$ は連続,
(2) $\mathrm{id} : (\mathbb{R}, \mathfrak{U}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{U}^d) : x \mapsto x$ は連続でない,
(3) $\mathrm{id} : (\mathbb{R}, \mathfrak{U}^t) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{U}) : x \mapsto x$ は連続でない,
(4) $\forall f : (\mathbb{R}, \mathfrak{U}^d) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ は連続.

すなわち, 連続写像が全単射としても, その逆写像が連続とは限らない.

命題 1.3.4 連続写像と連続写像の合成は連続である.

定理 1.3.5 $f : S \to T$ が連続かつ全射のとき, S が連結 $\Rightarrow$ T も連結.

ちなみに上の状況で,「T が連結 $\Rightarrow$ S も連結」は成立しないことに注意. この定理を用いて, いくつかの具体的な位相空間の連結性を調べることが出来る.

例 1.3.6 $O(2) := \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid {}^tX \cdot X = I\}$ は連結でない.

何故ならば, $\det : O(2) \to \{\pm 1\} : X \mapsto \det(X)$ が連続だから. ただしここで, $O(2)$ の位相は, $M_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^4$ からの相対位相とする.

定理 1.3.7 $f : S \to T$ が連続かつ全射のとき, S がコンパクト $\Rightarrow$ T もコンパクト.

この場合も「T がコンパクト $\Rightarrow$ S もコンパクト」は成立しないことに注意.

系 1.3.8 $f : S \to \mathbb{R}$ が連続, S がコンパクト $\Rightarrow$ $f(S)$ は最大値と最小値を持つ.

1.4 積位相

今節では, 2つの位相空間 $(S, \mathfrak{U}_S)$, $(T, \mathfrak{U}_T)$ の直積という概念を定義する. 要するに, 直積集合 $S \times T := \{(s,t) \mid s \in S, t \in T\}$ に, 位相 $\mathfrak{U}_{S \times T}$ を定義する. その定義は, 「自然な射影が連続となるような最も弱い位相」で与えられ, またそれは「$\mathfrak{U}_S \times \mathfrak{U}_T$ で生成される位相」と同じである. ここでは2つの位相空間の直積のみを扱うが, 任意の個数 (無限個でも良い) の直積に対しても同様に積位相を考えることが出来る.

定義 1.4.1 集合 S の位相 $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ に対し, $\mathfrak{U}$ が $\mathfrak{V}$ より **弱い位相** とは, $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{V}$ となること.

$\mathfrak{U}$ が $\mathfrak{V}$ より弱い位相である為の必要十分条件は, $\mathrm{id} : (S, \mathfrak{V}) \to (S, \mathfrak{U})$ が連続となることである. また, 全ての位相の中で, 密着位相は最も弱く, 離散位相は最も強い.

定理 1.4.2 部分集合 $\mathfrak{W} \subset 2^S$ に対し, $\exists \mathfrak{U}$: 位相 s.t. $\mathfrak{W} \subset \mathfrak{U}$ となる位相の中で最も弱い.

$\mathcal{A} := \{\mathfrak{V} \subset 2^S \mid \mathfrak{W} \subset \mathfrak{V}$ かつ $\mathfrak{V}$ は位相 $\}$ としたとき, $\mathfrak{W} \subset \mathfrak{U}$ となる位相の中で最も弱いとは, 次が成り立つこと: $\forall \mathfrak{V} \in \mathcal{A},\ \mathfrak{U} \subset \mathfrak{V}$.

系 1.4.3 2つの写像 $f_i : S \to (T, \mathfrak{U}_i)$ (ただし $i = 1, 2$) に対し, $\exists \mathfrak{U}$: S の位相 s.t. $\mathfrak{U}$ は f_1, f_2 を連続にする最も弱い位相.

定義 1.4.4 位相空間 $(S, \mathfrak{U}_S)$, $(T, \mathfrak{U}_T)$ に対し, $S \times T$ の位相で, 次の2つの射影 π_1, π_2 が連続にする最も弱い位相を, **積位相** と呼ぶ: $\pi_1 : S \times T \to S$, $\pi_2 : S \times T \to T$.

例 1.4.5 標準的な $(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ に対し, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の積位相と $\mathbb{R}^2$ の標準的な位相は一致する.

ここまでが「自然な射影が連続となるような最も弱い位相」による積位相の定義である. 次に, 積位相は「$\mathfrak{U}_S \times \mathfrak{U}_T$ で生成される位相」と同じであることを示す.

定義 1.4.6 $2^S \supset \mathfrak{W}$ が **位相の基** (**base**) とは, 次が成り立つこと:
(1) $\phi \in \mathfrak{W}$, (2) $\cup \mathfrak{W} = S$, (3) $\forall W_1, W_2 \in \mathfrak{W}$, $\exists \overline{\mathfrak{W}} \subset \mathfrak{W} : W_1 \cap W_2 = \cup \overline{\mathfrak{W}}$.

ここで, 集合族の和集合は次の意味で使っていることに注意: $\cup \mathfrak{W} = \cup_{W \in \mathfrak{W}} W$.

定理 1.4.7 位相の基 $\mathfrak{W} \subset 2^S$ に対し, $\langle \mathfrak{W} \rangle := \{U \in 2^S \mid U$ は $\mathfrak{W}$ の元の和集合 $\}$ は S の位相である (この位相を **$\mathfrak{W}$ で生成された位相** と呼ぶ).

例 1.4.8 $\mathfrak{W} := \{(a,b) \subset \mathbb{R} \mid a < b\} \cup \{\phi\}$ は $\mathbb{R}$ の位相の基である.

注意. $\mathfrak{W}$ で生成される位相は, $\mathfrak{W}$ を含む最も弱い位相と一致する.

定理 1.4.9 位相空間 $(S, \mathfrak{U}_S)$, $(T, \mathfrak{U}_T)$ に対し, $\mathfrak{U}_S \times \mathfrak{U}_T$ は $S \times T$ の位相の基であり, 生成される位相 $\langle \mathfrak{U}_S \times \mathfrak{U}_T \rangle$ は積位相と一致する.

次に, 位相空間の直積に対して, 元の位相空間の性質が直積空間の性質にどのように反映されるか, を調べる. 主定理は2つ, 「コンパクトとコンパクトの直積はコンパクト」および「連結と連結の直積は連結」である.

定義 1.4.10 位相空間 S, T に対し, 写像 $f : S \to T$ が **開写像** とは, 次が成り立つこと: $S \supset \forall U$: 開集合, $T \supset f(U)$: 開集合.

連続写像とは逆に, S の位相が「弱い」状態を表している. 積位相は所定の条件を満たすものの中で最も弱い位相であったことから, 次が成立する.

補題 1.4.11 積位相に関して $\pi : S \times T \to S$ は開写像.

定理 1.4.12 $(S, \mathfrak{U}_S)$, $(T, \mathfrak{U}_T)$ がコンパクトならば, 直積 $(S \times T, \mathfrak{U}_{S\times T})$ もコンパクト.

注意. この定理は, 2つの直積の場合だけでなく, 任意の (無限個の) 直積に関しても成立する (チコノフの定理と呼ばれる). チコノフの定理の証明には, 選択公理を用いる.

補題 1.4.13 位相空間 $(S, \mathfrak{U})$ に対し, $S \supset T_0, T_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ が連結部分空間であり, 次を満たしていると仮定する: $\forall \lambda \in \Lambda,\ T_0 \cap T_\lambda \neq \phi$. このとき, $T := T_0 \cup (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda)$ は連結.

定理 1.4.14 $(S, \mathfrak{U}_S)$, $(T, \mathfrak{U}_T)$ が連結ならば, 直積 $(S \times T, \mathfrak{U}_{S\times T})$ も連結.

1.5 商位相

これまで, 知っている位相空間から未知の位相空間を作る, という話をしてきた (相対位相, 積位相など). ここでは, 集合を同値関係で割った「商集合」に位相を定義することが出来る, ということを紹介する.

定義 1.5.1 位相空間 $(S, \mathfrak{U}_S)$, 集合 T を考え, 写像 $f : S \to T$ が全射とする. このとき, 次を f から決まる T の **商位相** と呼ぶ: $\mathfrak{U}_f := \{V \subset T \mid f^{-1}(V) \in \mathfrak{U}_S\}$.

この定義が商集合とどのように関係するかを説明する. 集合 S に同値関係 $\sim$ が与えられたとき, その商集合 $S/\sim$ は, 同値類の全体として定義された. すなわち,

$$S/\sim := \{[s] \mid s \in S\}, \quad \text{ただし } [s] := \{x \in S \mid x \sim s\} \text{ は } s \text{ を含む同値類.}$$

このとき $\pi : S \to S/\sim : s \mapsto [s]$ を自然な射影と呼ぶ. 明らかに π は全射なので, S が位相空間ならば, π によって $S/\sim$ に位相を定義することが出来る.

例 1.5.2 $\mathbb{R}$ 上の同値関係 $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$ を考えると, $\mathbb{R}/\sim$ は S^1 と同相.

商集合によって, 円周の他にもトーラス, メビウスの帯, クラインの壺など, 興味深い例が多く構成されたことを思い出そう. これらは全て商位相によって位相空間となる.

1.6 分離公理

この節では「良い位相」を特徴付けるいくつかの性質を紹介する．「良い位相」とは「位相が弱すぎない」という意味である．特に「２点が開集合で分離できる」空間をハウスドルフ空間と呼ぶが, これは来年度以降の幾何学で頻繁に登場する．

定義 1.6.1 位相空間 $(S, \mathfrak{U})$ に対し,

- S が $\underline{T_0\ \textbf{空間}}$:⇔ $\forall s_1, s_2 \in S\ (s_1 \neq s_2)$, $\exists U \in \mathfrak{U}:$ U は一方を含み他方を含まない．
- S が $\underline{T_1\ \textbf{空間}}$:⇔ $\forall s_1, s_2 \in S\ (s_1 \neq s_2)$, $\exists U \in \mathfrak{U}:$ $s_1 \in U$, $s_2 \notin U$.
- S が $\underline{T_2\ \textbf{空間}}$ または **ハウスドルフ空間**
  :⇔ $\forall s_1, s_2 \in S\ (s_1 \neq s_2)$, $\exists U_1, U_2 \in \mathfrak{U}:$ $s_1 \in U_1$, $s_2 \in U_2$, $U_1 \cap U_2 = \phi$.
- S が $\underline{T_3\ \textbf{空間}}$ または **正則空間**
  :⇔ (1) T_1 空間,
  (2) $S \supset \forall F:$ 閉集合, $\forall s \notin F$, $\exists U_1, U_2 \in \mathfrak{U}:$ $s \in U_1$, $F \subset U_2$, $U_1 \cap U_2 = \phi$.
- S が $\underline{T_4\ \textbf{空間}}$ または **正規空間**
  :⇔ (1) T_1 空間,
  (2) $S \supset \forall F_1, F_2$:閉 $(F_1 \cap F_2 = \phi)$, $\exists U_1, U_2 \in \mathfrak{U}:$ $F_1 \subset U_1$, $F_2 \subset U_2$, $U_1 \cap U_2 = \phi$.

直感的に述べると, ハウスドルフ空間とは「２点が開集合で分離できる」空間であり, 正則空間とは「点と閉集合が開集合で分離できる」空間であり, 正規空間とは「２つの閉集合が開集合で分離できる」空間である．

注意 1.6.2 密着位相の入った空間は, $T_0, \ldots, T_4$ のいずれでもない．離散位相の入った空間は, $T_0, \ldots, T_4$ の全てを満たす．

定理 1.6.3 $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

この定理の証明は, 次を使うと容易である．

定理 1.6.4 $(S, \mathfrak{U})$ が T_1 空間 $\Leftrightarrow \forall s \in S$, $S \supset \{s\}:$ 閉集合.

系 1.6.5 $(S, \mathfrak{U})$ が有限集合かつ T_1 空間のとき, $\mathfrak{U}$ は離散位相.

上記の $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$ という定理の逆はいずれも成立しないが, $T_1 \Rightarrow T_0$ の逆を除いては, その反例を作る為には無限集合を考えなくてはならない．

定理 1.6.6 $(S, \mathfrak{U})$ がハウスドルフ空間, $S \supset A$ がコンパクトのとき, $S \supset A$ は閉集合.

定理 1.6.7 距離空間 (S, ρ) は, 距離から決まる位相に関して正規 (T_4) 空間.

1.7 可算公理

前節では「位相が弱すぎない」ための条件をいくつか紹介したが, 本節で紹介する内容は（非常に大雑把に言うと）, 「位相が強すぎない」ための条件である. ここに登場する条件（第１可算公理, 第２可算公理）も, 来年度以降の幾何学で扱う対象には, 仮定されていることが多い.

定義 1.7.1 位相空間 $(S,\mathfrak{U})$ および $x \in S$ に対し, $\mathfrak{N}(x) := \{N \in \mathfrak{U} \mid x \in N\}$ を x における **近傍系** と呼ぶ. また, $\mathfrak{N}(x) \supset \mathfrak{B}(x)$ が x における **基本近傍系** とは, 次が成り立つこと: $\forall N \in \mathfrak{N}(x)$, $\exists U \in \mathfrak{B}(x)$ s.t. $U \subset N$.

例 1.7.2 距離空間 (S,ρ) および $x \in S$ に対し, 次は x における基本近傍系:

$\mathfrak{B}_1(x) := \{B_\varepsilon(x) \mid \varepsilon > 0\}$,
$\mathfrak{B}_2(x) := \{B_\varepsilon(x) \mid \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}\}$,
$\mathfrak{B}_3(x) := \{B_{1/n}(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

定義 1.7.3 位相空間 $(S,\mathfrak{U})$ に対し, 次の条件を **第１可算公理** と呼ぶ: $\forall x \in S$, $\exists \mathfrak{B}(x)$: 基本近傍系 s.t. $\mathfrak{B}(x)$ は高々可算.

第１可算公理を非常に大雑把に述べると, 「各点における近傍の数が多すぎない」ということを意味している. 勿論, 基本近傍系の数を論じているので, 不正確な言い方だが.

命題 1.7.4 距離空間は第１可算公理を満たす.

定義 1.7.5 位相空間 $(S,\mathfrak{U})$ に対し, $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{B}$ が **開基** であるとは, 次の条件をみたすこと: $\forall U \in \mathfrak{U}$, $\exists \mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{B}$ s.t. $U = \bigcup \mathfrak{B}_0$.

定義 1.7.6 位相空間 $(S,\mathfrak{U})$ に対し, 次の条件を **第２可算公理** と呼ぶ: $\exists \mathfrak{B}$: 開基 s.t. $\mathfrak{B}$ は高々可算.

第２可算公理を非常に大雑把に述べると, 「開集合の数が多すぎない」ということを意味している. 先と同様に論じているのは開集合の数ではなく開基の数であるが, 「位相が強すぎない」ことを「位相の基が多すぎない」ことで特徴付けようとしている.

補題 1.7.7 $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{B}$: 開基 $\Leftrightarrow \forall x \in S$, $\forall N \in \mathfrak{N}(x)$, $\exists U \in \mathfrak{B}$ s.t. $x \in U \subset N$.

例 1.7.8 標準的な位相を入れた空間 $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{U})$ は第２可算公理を満たす.

命題 1.7.9 第２可算公理を満たすならば, 第１可算公理を満たす.

定理 1.7.10 (ウリゾーンの距離化定理) 位相空間 $(S,\mathfrak{U})$ が T_4-空間かつ第２可算公理を満たすとき, 距離化可能である（すなわち, $\exists \rho$: S 上の距離 s.t. $(S,\mathfrak{U}) \cong (S,\mathfrak{U}_\rho)$）.

1.8　弧状連結

定義 1.8.1 位相空間 $(S, \mathfrak{U})$ 上の 2 点 x_0, x_1 に対し, 次を **x_0 から x_1 への道** と呼ぶ:
$\alpha : [0,1] \to S$: 連続 s.t. $\alpha(0) = x_0,\ \alpha(1) = x_1$.

勿論, 閉区間 $[0,1]$ には $\mathbb{R}$ の標準的な位相からの相対位相が入っているとする. イメージ的には, 像 $\alpha([0,1])$ を道（あるいは曲線）と呼ぶほうが良いかも知れない.

定義 1.8.2 位相空間 $(S, \mathfrak{U})$ が **弧状連結** であるとは, 次が成り立つこと: $\forall x_0, x_1 \in S$, $\exists \alpha : [0,1] \to S$: x_0 から x_1 への道.

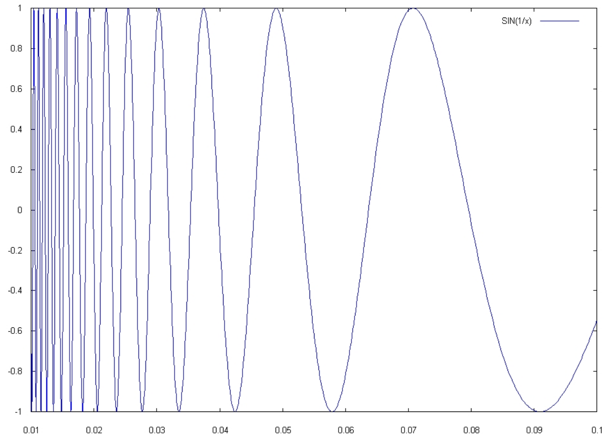
例 1.8.3 ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に標準的な計量を入れた空間は, 弧状連結. しかし $\mathbb{R}^n$ に離散位相を入れた空間は弧状連結でない.

定理 1.8.4 位相空間が, 弧状連結ならば連結.

位相空間が連結でないと仮定すると, その空間は 2 つの開集合に分けられる. これを用いて, 定理は背理法で示すことができる. また, この定理の「逆」は成立しない. そのことは, 以下の例から示される.

例 1.8.5 $A := \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1\},\ B := \{(x, \sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1\}$ とする. このとき, $\mathbb{R}^2 \supset X := A \cup B$ は連結だが弧状連結でない.

参考： 集合 B の概形



弧状連結の概念の一つの応用として, 次を証明することが出来る. ある集合が連結であることを示す為には, 弧状連結であることを示せば十分であった.

例 1.8.6 メビウスの帯を真ん中で切っても, 繋がっている（連結である）.

2　単体的複体

本講義の後半部分では, 単体的複体と呼ばれる特別な（扱いやすい）位相空間を学ぶ. 目標は, 単体的複体に対してホモロジーやオイラー数といった概念を定義すること, および, 簡単な場合に実際にそれらを計算して求めること, である. これらは「不変量」と呼ばれる概念であり, この不変量という概念は数学のあらゆる場面で登場する重要なものである.

2.1　単体

単体とは, 直感的には, 多角形で囲まれた面や多面体で囲まれた領域, あるいはその高次元のもの, である. 単体を定義する為に必要な予備知識は, 線型代数・高校の平面ベクトル・空間ベクトルくらいで十分.

定義 2.1.1 V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする. 部分集合 $C \subset V$ が **凸** (**convex**) とは, 次が成り立つこと: $\forall t \in [0,1], \forall c_1, c_2 \in C, tc_1 + (1-t)c_2 \in C$.

定義 2.1.2 $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V に対し, $V \supset \{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ が **凸独立** とは, 次が成り立つこと: $\{v_1 - v_0, v_2 - v_0 \ldots, v_k - v_0\}$ が一次独立であること.

定義 2.1.3 $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V に対し, $C \subset V$ が **k-単体** (**k-simplex**) とは, 次が成立すること: $\exists\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$: 凸独立 s.t. C は $\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ を含む最小の凸集合.

C が $\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ を含む最小の凸集合であることを正確に述べると, 次のようになる: 「$\forall C'$: $\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ を含む凸集合, $C \subset C'$」.

命題 2.1.4 $V \supset \{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ が凸独立ならば, $\exists C \subset V$ s.t. C は $\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ を含む最小の凸集合. このとき, $C = [v_0, v_1, \ldots, v_k]$ と表す.

証明には, C として「$\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ を含む全ての凸集合の共通部分」を取れば良い.

例 2.1.5 0-単体 $[v_0]$ は, 一点集合（$[v_0] = \{v_0\}$）. 1-単体 $[v_0, v_1]$ は, v_0 と v_1 の間の線分（$[v_0, v_1] = \{tv_0 + (1-t)v_1 \mid 0 \leq t \leq 1\}$）. 2-単体 $[v_0, v_1, v_2]$ は, v_0, v_1, v_2 で囲まれた三角形（$[v_0, v_1, v_2] = \{a_0 v_0 + a_1 v_1 + a_2 v_2 \mid a_1 + a_2 + a_3 = 1,\ a_i \geq 0\}$）. 3-単体 $[v_0, v_1, v_2, v_3]$ は, v_0, v_1, v_2, v_3 で囲まれた三角錐（内部を含む）.

定理 2.1.6 k-単体 $C := [v_0, v_1, \ldots, v_k]$ に対し, $C = \{\sum_{i=0}^{k} a_i v_i \mid a_i \geq 0,\ \sum_{i=0}^{k} a_i = 1\}$.

このように, 単体とは「多面体とその内部」であると思って差し支えない. 単体は（V の自然な位相からの相対位相により）位相空間となる. このような特別な（扱いやすい）位相空間を, これ以降では扱っていく.

2.2 単体的複体

単体的複体とは, いくつかの単体の集まりで所定の性質を満たすもの, として定義される. まずは具体例を通して直感的なイメージを掴むことが重要（頂点や辺や面と深く関係することを感じて欲しい）. また, 数学的にきちんと扱うことも大事であるが, その時, ユークリッド空間の部分集合と部分集合族の区別に注意する必要がある.

定義 2.2.1 k-単体 $[s] := [v_0, v_1, \ldots, v_k]$ に対し, 次を **開単体** と呼ぶ:

$$(s) := (v_0, v_1, \ldots, v_k) := \{\sum_{i=0}^{k} a_i v_i \in [s] \mid a_i > 0\}$$

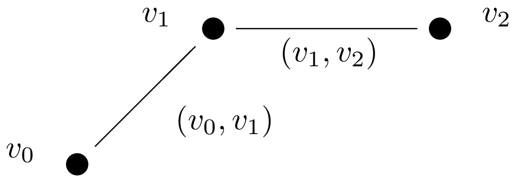
定義 2.2.2 k-単体 $[s] := [v_0, v_1, \ldots, v_k]$ を, 区別の為に $[s]$ を **閉単体** と呼ぶこともある. $v_0, v_1, \ldots, v_k$ を $[s]$ の **頂点** と呼ぶ. $\{j_0, j_1, \ldots, j_h\} \subset \{0, 1, \ldots, k\}$ に対し, $[v_{j_0}, v_{j_1}, \ldots, v_{j_h}]$ を $[s]$ の **閉辺単体**, $(v_{j_0}, v_{j_1}, \ldots, v_{j_h})$ を $[s]$ の **開辺単体** と呼ぶ. 閉辺単体や開辺単体であることを記号で $(v_{j_0}, v_{j_1}, \ldots, v_{j_h}) \prec [s]$ のように表す.

命題 2.2.3 (1) (s) は $[s]$ の開集合であり, $[s]$ は (s) の閉包である,
(2) $[s] = \bigcup_{(s') \prec [s]} (s')$,
(3) $[s]$ の開辺単体 (s_1), (s_2) に対し, $(s_1) \neq (s_2)$ ならば $(S_1) \cap (s_2) = \emptyset$.

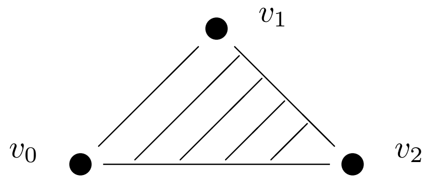
定義 2.2.4 開単体 (s_i) $(i = 1, \ldots, m)$ に対し, $K := \{(s_i) \mid i = 1, \ldots, m\}$ が **単体的複体** であるとは, 次が成立すること:

(1) $\forall (s) \in K,\ \forall (s') \prec (s),\ (s') \in K$,
(2) $(s_1), (s_2) \in K$ に対し, $(s_1) \cap (s_2) \neq \emptyset \Rightarrow (s_1) = (s_2)$.

1 次元単体的複体の例



2 次元単体的複体の例



上の図で表された単体的複体を式で書くと, 左のものは $\{(v_0), (v_1), (v_2), (v_0, v_1), (v_1, v_2)\}$ であり, 右のものは $\{(v_0), (v_1), (v_2), (v_0, v_1), (v_1, v_2), (v_1, v_2), (v_0, v_1, v_2)\}$ である. これらは集合族であることに注意（平面上の点の集合ではない）.

定義 2.2.5 単体的複体 K, L に対し, L が K の **部分複体** $:\Leftrightarrow\ \forall (s) \in L,\ (s) \in K$.

定義 2.2.6 単体的複体 K の次元を次で定義: $\dim K := \max_{(s) \in K} \dim(s)$.

定義 2.2.7 単体的複体 K の **r-骨格** K^r を次で定義: $K^r := \{(s) \in K \mid \dim(s) \leq r\}$.

2.3 単体的複体のホモロジー

本節では, 単体的複体に対して, ホモロジーやオイラー数といった概念を紹介する.

定義 2.3.1 k-単体 $(v_0, v_1, \dots, v_k)$ の順序付け $(v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$ と $(v_{j_0}, v_{j_1}, \dots, v_{j_k})$ が **同じ向き** であるとは, $(i_0, i_1, \dots, i_k)$ が $(j_0, j_1, \dots, j_k)$ に偶置換で移せること. 順序 $(v_0, v_1, \dots, v_k)$ が与えられた単体を **向きの付いた単体** と呼び, $\langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ で表す.

例えば, $\langle v_0, v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_2, v_0 \rangle \neq \langle v_1, v_0, v_2 \rangle$ である.

定義 2.3.2 単体的複体 K に対し, K に含まれる向きの付いた ℓ-単体で生成される自由アーベル群 $\{\sum n_s \langle s \rangle \mid n_s \in \mathbb{Z},\ s \in K,\ s$ は ℓ-単体 $\}$ を, $\{\langle v_0, v_1, v_2, \dots, v_\ell \rangle + \langle v_1, v_0, v_2, \dots, v_\ell \rangle \mid (v_0, v_1, \dots, v_\ell) \in K\}$ で生成される部分群で割った商群を **ℓ-鎖群** (**ℓ-chain group**) と呼び, $C_\ell(K.\mathbb{Z})$ で表す.

$K = \{(v_0), (v_1), (v_2), (v_0, v_1), (v_1, v_2)\}$ のとき, K に含まれる 1-単体で生成される自由アーベル群は次のようになる:

$$\{n_1 \langle v_0, v_1 \rangle + n_2 \langle v_1, v_0 \rangle + n_3 \langle v_1, v_2 \rangle + n_4 \langle v_2, v_1 \rangle \mid n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{Z}\}.$$

これを割る部分群は

$$\{n_5(\langle v_0, v_1 \rangle + \langle v_1, v_0 \rangle) + n_6(\langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_2, v_1 \rangle) \mid n_5, n_6 \in \mathbb{Z}\}.$$

よって K の 1-鎖群は $C_1(K, \mathbb{Z}) = \{m_1 \langle v_0, v_1 \rangle + m_2 \langle v_1, v_2 \rangle \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

定義 2.3.3 向きの付いた $(\ell+1)$-単体 $\langle s \rangle = \langle v_0, v_1, \dots, v_{\ell+1} \rangle$ の **境界** (**boundary**) を次で定義する: $\partial \langle s \rangle := \sum_{j=0}^{\ell+1} (-1)^j \langle v_0, v_1, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_{\ell+1} \rangle$.

記号 $\widehat{v_j}$ は, v_j を取り除くことを意味する. よって $(\ell+1)$-単体の境界は ℓ-単体である. 例えば, $\partial \langle v_0, v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle - \langle v_0, v_2 \rangle + \langle v_0, v_1 \rangle$.

命題 2.3.4 境界をとる写像 $\partial : K \to K$ から誘導される写像 $\partial : C_{\ell+1}(K, \mathbb{Z}) \to C_\ell(K, \mathbb{Z}) : \sum n_s \langle s \rangle \mapsto \sum n_s \partial \langle s \rangle$ は well-defined (これを **境界写像** と呼ぶ).

補題 2.3.5 $\partial \circ \partial = 0$.

定義 2.3.6 単体的複体 K に対し, 次で定義される群 $H_\ell(K, \mathbb{Z})$ を **ℓ 次元ホモロジー群**:

$$Z_\ell(K, \mathbb{Z}) := \mathrm{Ker}\ \partial = \{c \in C_\ell(K, \mathbb{Z}) \mid \partial c = 0\},$$
$$B_\ell(K, \mathbb{Z}) := \mathrm{Im}\ \partial = \{\partial c \mid c \in C_{\ell+1}(K, \mathbb{Z}),$$
$$H_\ell(K, \mathbb{Z}) := Z_\ell(K, \mathbb{Z}) / B_\ell(K, \mathbb{Z}).$$

上でも例として挙げた $K = \{(v_0), (v_1), (v_2), (v_0, v_1), (v_1, v_2)\}$ の場合, 次のようになる:

$$B_0(K, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},\ \ Z_0(K, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},\ \ H_0(K, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z},$$
$$B_1(K, \mathbb{Z}) \cong 0,\ \ Z_1(K, \mathbb{Z}) \cong 0,\ \ H_1(K, \mathbb{Z}) \cong 0.$$

2.4 オイラー数

この講義の最後に, オイラー数の定義およびその有用性を紹介する. ホモロジー群やオイラー数は「不変量」と呼ばれるものになっている. 不変量は幾何学において非常に重要な概念であり, 今後の講義でも必ず登場する. ここでは, 不変量の概念が, 与えられた２つのものが「同型でないこと」を証明する時の強力な道具となる, ということを紹介する.

定義 2.4.1 単体的複体 K に対し, $\beta_l(K) := \dim H_l(K, \mathbb{Z})$ を l **次元ベッチ数** と呼ぶ. また, $\chi(K) := \sum(-1)^l \beta_l$ を **オイラー数** と呼ぶ.

$H_l(K, \mathbb{Z})$ の次元というのは厳密でない, と思われる場合には, $H_l(K, \mathbb{R})$ の $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間としての次元, の意味だと思って良い.

例 2.4.2 $K = \{(v_0), (v_1), (v_2), (v_0, v_1), (v_1, v_2)\}$ に対し, $\beta_0(K) = 1$, $\beta_1(K) = 0$, $\chi(K) = 1$.

要するに, ホモロジー群を求めることが出来れば, ベッチ数やオイラー数を求めることは容易. 実は, ホモロジー群を求めなくてもオイラー数は分かる.

定理 2.4.3 K を単体的複体, α_l を K に含まれる l-単体の数とする. このとき, K のオイラー数は次で求められる: $\chi(K) = \sum(-1)^l \alpha_l$.

この定理から, 頂点の数・辺の数・面の数・・・などを数えることにより, オイラー数を求めることが出来る. 例えば, 多角形の頂点と辺と面からなる単体的複体に対しては, オイラー数は 2 となることは, 容易に確かめられる. 多面体のオイラー数が全て一致するのは, 偶然ではなく, 次の理由に拠る:

定理 2.4.4 単体的複体 K, K' に対し, $[K]$ と $[K']$ が位相同型ならば, $H_l(K, \mathbb{Z})$ と $H_l(K', \mathbb{Z})$ は群として同型（$\forall l$ に対して）. 特に, $\chi(K) = \chi(K')$.

このような性質を満たすものを **不変量** と呼ぶ. 不変量の非常に強力な利用方法の一つは, ２つの位相空間が同型でないことの証明である; 上の定理の対偶, 「オイラー数が等しくないならば同型でない」を用いる.

例 2.4.5 閉区間 $[0, 1]$ と円周 S^1 は位相同型でない.

閉区間 $[0, 1]$ は, 単体的複体 $K = \{(v_0), (v_1), (V_0, v_1)\}$ と位相同型. 一方で円周 S^1 は次と位相同型: $K' = \{(V_0), (v_1), (v_2), (v_0, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_0)\}$. ところが $\chi(K) = 1 \neq 0 - \chi(K')$ なので, $[K]$ と $[K']$ は位相同型でない. また, 全く同様に, 球面 S^2 とトーラス T^2 が位相同型でないことも証明できる. 勿論, ホモロジー群やオイラー数が等しいからと言って同型とは限らないことに注意.