平成１８年度卒業論文
点と平面曲線との距離の考察
～サッカーにおける最適シュート角度～

広島大学理学部数学科
B034329　　神垣雅郁
指導教官　　田丸博士助教授

平成１９年２月９日

1　はじめに

私たちは高校数学で点と直線の距離については既に学習済みである．また，直線は平面曲線の一つであるということは承知の通りであろう．そこで直線以外の平面曲線と点の距離というものがどういうものであるかということに注目してみた．そして、点と平面曲線の距離を活用した例として『サッカーにおける最適シュート角度を求める』という問題に取り組み論文を書いた．

具体的にはゴールキーパーを点，シュートの軌跡を平面曲線と考え，点と曲線の距離が最も長くなるような角度を最適角度と定義し求めている．なぜなら，キーパーと曲線との距離が長いほどシュート範囲は広くなるので，距離が最も長くなる角度が求めたい角度となるからである．求める際，曲率が０がどうか，つまりカーブがかかるかどうかで計算過程が変化するので場合分けを行なっている．論文内では図を多用して視覚的に理解ができるようにもしているので，理解の手助けとなればと思う．問題を解くにあたっては厳密には３次元で考えたり論文内の条件設定とは異なる点が多々あるが，数学的に考察しやすいように定めていることを考慮して頂きたい．

結論を先に述べると，実際にはデルピエロゾーンと呼ばれる 45 °が最適角度になるか、数学的に考え y 軸対称であることを活かして 90 °が最適角度になると予想をたてて問題を解いてみたのだが，論文内のように条件を定めた結果予想は裏切られ，蹴る人とゴールとの距離，ゴールとキーパーとの距離，曲率の値に依存して変化するという結果が得られた．

2　準備

ここで平面曲線に関する定義及び定理を述べておく.

定義 2.1
$\gamma(s) = (x(s)\ ,\ y(s))$ を弧長パラメーターによる曲線の助変数表示としたとき
$\boldsymbol{e}(s) = \dot{\gamma}(s) = (\dot{x}(s)\ ,\ \dot{y}(s))$　を**単位接ベクトル**
$\boldsymbol{n}(s) = (-\dot{y}(s)\ ,\ \dot{x}(s))$　を**単位法線ベクトル** という.

定義 2.2
$\gamma(s) = (x(s)\ ,\ y(s))$ を弧長パラメーターによる曲線の助変数表示とすると,
$\ddot{\gamma}(s) = k(s)\boldsymbol{n}(s)$ と書ける.
この $k(s)$ を曲線 $\gamma(s)$ の**曲率**という. ちなみに $\dot{\gamma}(s)$, $\boldsymbol{n}(s)$ を列ベクトルとみなすと, $k(s) = \det(\dot{\gamma}(s)\ ,\ \ddot{\gamma}(s))$ とできる.

定理 2.3
曲線 $\gamma(s)$ の曲率が恒等的に 0 になるのは $\gamma(s)$ が直線のときで, またそのときに限る.

(証明)
$K(s) \equiv 0$ だから $\ddot{\gamma}(s) = 0$ となり, $\dot{\gamma}(s) = (\dot{x}(s)\ ,\ \dot{y}(s))$ が s によらない一定のベクトルである.
ここで, $\dot{x}(s) = \alpha$, $\dot{y}(s) = \beta$ とおくと,
$x(s) = s\alpha + a$, $y(s) = s\beta + b$　　（a , b : 定数）となるので $\gamma(s)$ は直線である.　□

命題 2.4
半径 R の円の曲率は $1/R$ である.

(証明)
$\gamma(s) = (R\cos\dfrac{s}{R}\ ,\ R\sin\dfrac{s}{R})$ とすると, これは弧長パラメーターによる半径

R の円の助変数表示である.
よって,

$$\dot{\gamma}(s) = (-\sin\frac{s}{R}\ ,\ \cos\frac{s}{R})\ ,\ \mathbf{n}(s) = (-\cos\frac{s}{R}\ ,\ -\sin\frac{s}{R}),$$

$$\ddot{\gamma}(s) = \frac{1}{R}(-\cos\frac{s}{R}\ ,\ -\sin\frac{s}{R}) = \frac{1}{R}\mathbf{n}(s).$$

故に

$$k(s) = \frac{1}{R} \quad . \qquad \square$$

定義 2.5

曲線 $\gamma(s)$ 上の点 $\gamma(s_1)$ における曲率 $k(s_1) \neq 0$ とする．

このとき $\gamma(s_1)$ で曲線に接する半径 $1/|k(s_1)|$ の円を曲線の進行方向に向かって，左右両側それぞれに１つずつおくことができる．

この円を $\gamma(s_1)$ における**曲率円**

曲率円の半径 $1/|k(s_1)|$ を**曲率半径**

曲率円の中心を**曲率中心**　という．

また，$\gamma(s_1)$ の曲率中心の位置ベクトルは $\gamma(s_1) + \boldsymbol{n}(s_1)/k(s_1)$ となる．

定理 2.6

曲線 $\gamma(s)$ の曲率 $k(> 0)$ が定数ならば曲線 $\gamma(s)$ は半径 $1/k$ の円である．

(証明)

曲率中心の位置ベクトルは $\gamma(s) + \mathbf{n}(s)/k$ となるので，これが s によらないことを示す．まず s で微分をすると，

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(s) + \frac{1}{k}\dot{\mathbf{n}}(s) &= \mathbf{n}(s) + \frac{1}{k}(-k\mathbf{n}(s)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

よって，$\gamma(s) + \mathbf{n}(s)/k$ は定点である．この定点から曲線 γ 上の点 $\gamma(s)$ に向かうベクトルは,

$$\gamma(s) - \left(\gamma(s) + \frac{1}{k}\mathbf{n}(s)\right) = -\frac{1}{k}\mathbf{n}(s).$$

また，$|\mathbf{n}(s)/k| = 1/k$ だから，$\gamma(s)$ は $\gamma(s) + \mathbf{n}(s)/k$ を中心とする半径 $1/k$ の円である．　$\square$

定数 $k(< 0)$ のときも同様にして，$\gamma(s)$ は $\gamma + \mathbf{n}/k$ を中心とする半径 $1/|k|$ の円であることが示せる．

定理 2.3，定理 2.6 より次の系が得られる．

系 2.7

曲率が一定の曲線は直線か円であり，逆に直線または円の曲率は常に一定である．

定義 2.8

$\gamma(s)=(x(s)\ ,\ y(s))$ をパラメーターによる曲線の助変数表示，A を定点としたとき，$\inf d(A\ ,\ \gamma(s))$ を点 A と曲線 $\gamma(s)$ の**距離**という．

平面曲線の中でも特に直線や円であれば次の系が導かれる．

系 2.9 ＜直線の場合＞

点 $A(a\ ,\ b)$ と直線 $mx+ny+l=0$ の距離は

$$d(A\ ,\ \gamma)=\frac{|am+bn+l|}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

系 2.10 ＜円の場合＞

点 $A(a\ ,\ b)$ と円 $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ の距離は，

(1) 点 A が円の内点のとき

$$d(A\ ,\ \gamma)=r-\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}.$$

(2) 点 A が円の外点のとき

$$d(A\ ,\ \gamma)=\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}-r.$$

従って *(1)(2)* より

$$d(A\ ,\ \gamma)=|r-\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}|.$$

以上のことを用いて次節以降で，サッカーに関する問題を考察していく．

3　問題設定

【問題】

サッカーをする際にどの角度からシュートをするのが最適なのだろうか？

・問題の考えかた $\cdots$

シュートの軌跡を曲線とみなし，ゴールキーパーを点とみなす．このときの点と曲線の距離を調べて最適角度を求める。

・最適角度とは $\cdots$

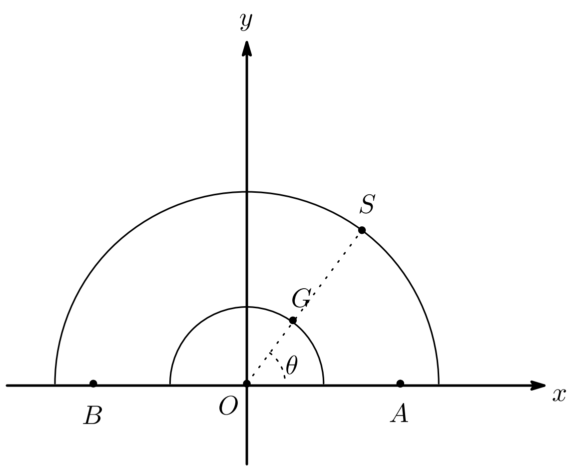
曲線と点の距離が最も長くなるような角度のことである．

問題を考えるために次のように条件を定めておく．

条件

・シュートが描く軌跡は曲率一定の曲線とする．
・高さは考えず二次元平面上で考察する．
・蹴る人とゴールの中心を結ぶ直線上にキーパーは必ず位置する．

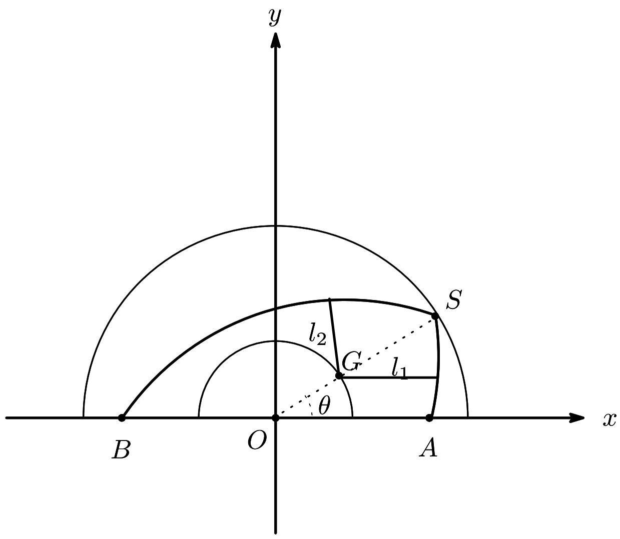
この問題を数学的に考察するために次のように定める．



ゴールの中心を O，ゴールラインを x 軸，ゴールの中心を通るように y 軸をとり，右ゴール隅を A，左ゴール隅を B，蹴る人を S，キーパーを G,
$\angle SOA = \angle GOA = \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$
$|\,SO\,| = R$, $|\,GO\,| = r \quad (r < R)$ ， $|\,AO\,| = |\,BO\,| = M$　とする．
従って，

$$A\,(M\ ,\ 0)\ ,\ B\,(-M\ ,\ 0)\ ,\ S\,(R\cos\theta\ ,\ R\sin\theta)\ ,\ G\,(r\cos\theta\ ,\ r\sin\theta)$$

と表せる.
この S からの軌跡を考えるので次のようになる.



上図のように左右に軌跡が描けるので, $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$, $\overset{\frown}{\mathrm{SB}}$ と G との距離 $l_1(\theta)$, $l_2(\theta)$ がとれる.

ここで, 線分 AB 上の各点に S からの軌跡は考えられるのだが, $\overset{\frown}{\mathrm{SA}}$ が θ における軌跡の中で G との距離が右に最も長くなり, $\overset{\frown}{\mathrm{SB}}$ が左に最も長くなるので, 他の点は考える必要がないことに注意しておく.

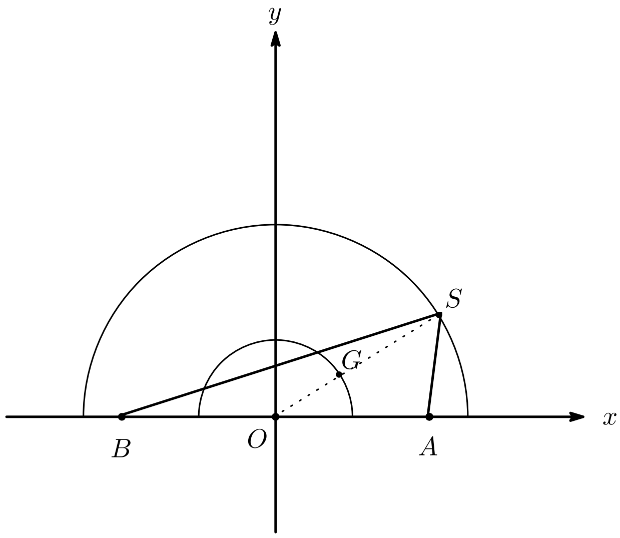
そして, $l(\theta) = \max\{l_1(\theta)\ ,\ l_2(\theta)\}$ を θ での距離とする. この $l(\theta)$ を比較し, $l(\theta)$ が最大となる θ を最適角度とすることとする.

このとき定理より

$k = 0$ のときは $\overset{\frown}{\mathrm{SA}}$, $\overset{\frown}{\mathrm{SB}}$ は線分.
$k \neq 0$ のときは $\overset{\frown}{\mathrm{SA}}$, $\overset{\frown}{\mathrm{SB}}$ は半径 $1/k$ の円弧.

となるので場合分けをして考えていく.

4　曲率 $k \equiv 0$ のとき



軌跡は直線であることより y 軸に関して対称なので，ここでは $0 \leq \theta \leq \pi/2$ で考えてよいことになる．

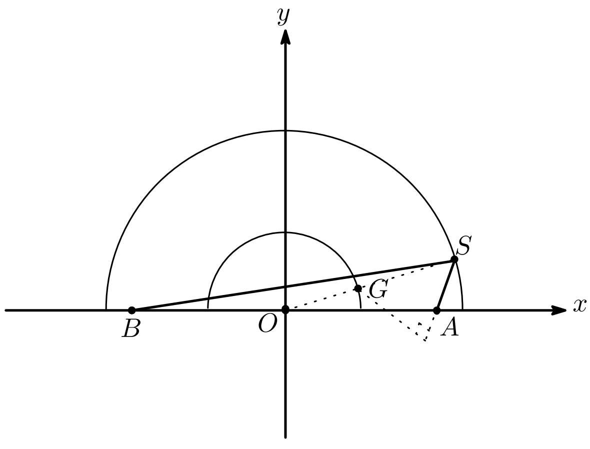
先のように点を定めたので描く軌跡は，

$\overline{SA} : R\sin\theta x + (M - R\cos\theta)y - MR\sin\theta = 0,$

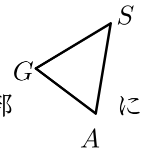
$\overline{SB} : R\sin\theta x - (M + R\cos\theta)y + MR\sin\theta = 0,$

と書ける．

従って，高校数学で学習済みの点と曲線の距離を考えればいいことになるのだが，今は線分を考えているので点と直線との距離を使うと次の図のように $l_1(\theta)$, $l_2(\theta)$ が存在しないこともありうる．



このときは定義に戻って $l_1(\theta) = |\,GA\,|$ として考えればよいのだが，そのように考えなければならないときの条件を考えてみる．

前頁の図の一部 

 において,

$\angle A \geq \pi/2$ のとき，つまり $|\,GS\,|^2 \geq |\,GA\,|^2 + |\,AS\,|^2$ のとき $l_1(\theta)$ は存在しない.

これを解くと,

$$\cos\theta \geq \frac{M^2+rR}{M(r+R)} \quad .$$

従って,

$$l_1(\theta) = \begin{cases} |\,GA\,| = \sqrt{r^2+M^2-2Mr\cos\theta} & \left(\cos\theta \geq \dfrac{M^2+rR}{M(r+R)}\right), \\ \dfrac{M(R-r)\sin\theta}{\sqrt{R^2-2MR\cos\theta+M^2}} & \left(\cos\theta \leq \dfrac{M^2+rR}{M(r+R)}\right). \end{cases}$$

また， $0 \leq \theta \leq \pi/2$ より $\angle GBS > \pi/2$ だから l_2 は存在するので,

$$l_2(\theta) = \frac{M(R-r)\sin\theta}{\sqrt{R^2+2MR\cos\theta+M^2}} \quad .$$

もう少し詳しく述べると， $0 \leq \{M^2+rR\}/\{M(r+R)\} \leq 1$ となるような θ が存在するとき $l_1(\theta)$ が存在しないことになる.

この条件を満たすための条件は,

$$\frac{M^2+rR}{M(r+R)} \leq 1$$

つまり $M(M-R) \leq r(M-R)$ となるので,

$$R \leq M \leq r \text{ または } r \leq M \leq R.$$

しかし仮定より $r < R$ としているので， $r \leq M < R$ が条件となる.
以上のことを考慮したうえで場合分けをしていく.

(　) $r < R < M$ のとき

$$l_1(\theta) = \frac{M(R-r)\sin\theta}{\sqrt{R^2 - 2MR\cos\theta + M^2}}\ ,\ l_2(\theta) = \frac{M(R-r)\sin\theta}{\sqrt{R^2 + 2MR\cos\theta + M^2}}$$

であり，$0 < r < R < M$, $0 \leq \cos\theta$ だから $l_2(\theta) \leq l_1(\theta)$ となるので，

$$l(\theta) = l_1(\theta).$$

つまり，$l_1(\theta)$ が最大となる θ を考えればよい．そこで，

$$\begin{aligned} f(\theta) &= l_1(\theta) \\ &= \frac{M(R-r)\sin\theta}{\sqrt{R^2 - 2MR\cos\theta + M^2}} \end{aligned}$$

とおくと，

$$f'(\theta) = \frac{M(R-r)(M - R\cos\theta)(M\cos\theta - R)}{(R^2 - 2MR\cos\theta + M^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

ここで，$f'(\theta) = 0$ を解くと，$\cos\theta = M/R$ ，R/M.
また条件より，$R < M$ だから $R/M \leq 1 \leq M/R$.

よって増減表を書くと，

θ	0	$\cdots$	$\arccos\frac{R}{M}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\cdots$	$\frac{R}{M}$	$\cdots$	0
$f'(\theta)$		$+$	0	-	
$f(\theta)$		$\nearrow$	$R-r$	$\searrow$	

従って，

$$\text{最適角度} \quad \theta = \arccos\frac{R}{M} \quad (\max l = R - r).$$

(　) $r < M < R$ のとき

特に，$\cos\theta \geq \{M^2 + rR\}/\{M(r+R)\}$ のとき

$l_1(\theta) = \sqrt{r^2 + M^2 - 2Mr\cos\theta}$ となるので，この範囲では

$$l_1 \geq l_2.$$

また，$l_1(\theta)$ は $\cos\theta$ に関して単調減少だから，

$$\max l(\theta) = \sqrt{\frac{r^3 - Rr^2 - M^2r + M^2R}{R+r}} \qquad \left(\cos\theta = \frac{M^2+rR}{M(R+r)}\right).$$

$\cos\theta <$ $\{M^2 + rR\}/\{M(r+R)\}$ のとき

(　) と同様に，$f(\theta) = M(R-r)\sin\theta/\sqrt{R^2 - 2MR\cos\theta + M^2}$
とおき，条件から $M/R < \{M^2 + rR\}/\{M(R+r)\} < R/M$ だから，

増減表を書くと，

θ	$\arccos\frac{M^2+R}{M(R+r)}$	$\cdots$	$\arccos\frac{M}{R}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{M^2+R}{M(R+r)}$	$\cdots$	$\frac{M}{R}$	$\cdots$	0
$f'(\theta)$		$+$	0	-	
$f(\theta)$		$\nearrow$	$\frac{M(R-r)}{R}$	$\searrow$	

よって，$\max l(\theta) = \dfrac{M(R-r)}{R} \qquad \left(\theta = \arccos\dfrac{M}{R}\right).$

を比較すると，

$$\sqrt{\frac{r^3 - Rr^2 - M^2r + M^2R}{R+r}} \leq \frac{M(R-r)}{R}.$$

$$\left((\text{右辺})^2 - (\text{左辺})^2 = \frac{r^2(R-r)(R+M)(R-M)}{R^2(R+r)} \geq 0\right).$$

従って，

$$\text{最適角度} \quad \theta = \arccos\frac{M}{R} \quad \left(\max l = \frac{M(R-r)}{R}\right).$$

(　) $M < r < R$ のとき

$l_1(\theta) = \dfrac{M(R-r)\sin\theta}{\sqrt{R^2 - 2MR\cos\theta + M^2}}$, $l_2(\theta) = \dfrac{M(R-r)\sin\theta}{\sqrt{R^2 + 2MR\cos\theta + M^2}}$ であり,

$l_2(\theta) \leq l_1(\theta) \quad (0 \leq \forall\theta \leq \pi/2)$ だから,

$f(\theta) = M(R-r)\sin\theta/\sqrt{R^2 - 2MR\cos\theta + M^2}$ とおき,

条件から $M/R < 1 < R/M$ だから,

増減表を書くと,

θ	0	$\cdots$	$\arccos\frac{M}{R}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\cdots$	$\frac{M}{R}$	$\cdots$	0
$f'(\theta)$		$+$	0	-	
$f(\theta)$		$\nearrow$	$\frac{M(R-r)}{R}$	$\searrow$	

従って,

$$\text{最適角度} \quad \theta = \arccos\frac{M}{R} \quad \left(\max l = \frac{M(R-r)}{R}\right).$$

(　)(　)(　) より

$$\text{最適角度} \quad \theta = \begin{cases} \arccos\frac{R}{M} & (r < R < M), \\ \arccos\frac{M}{R} & (r < M < R, M < r < R). \end{cases}$$

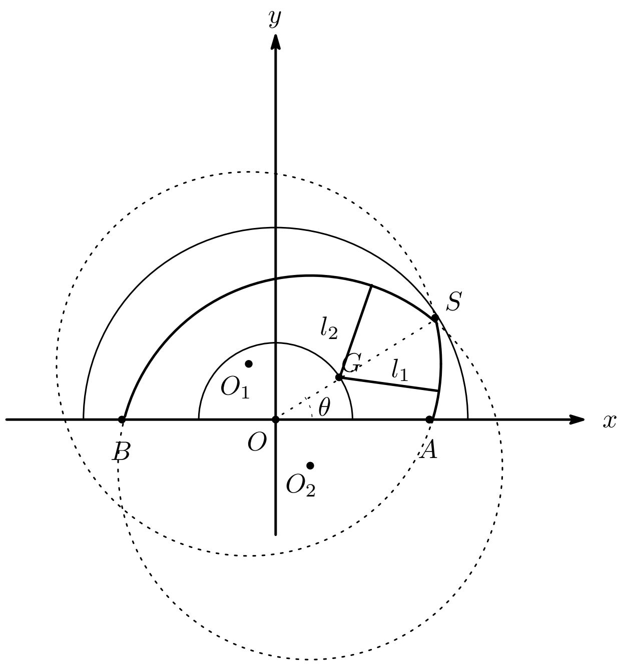
以上の結果から分かったことは

- 最適角度は一定ではなく蹴る距離とキーパーの位置によって変化する.
- 直線では最初の予想は間違っていた.
- キーパーがゴールポストの半径より外にいるか、内にいるかによっても最適角度が変化する.
- 最適角度 θ のとりうる範囲は,
  $r < R < M$　のとき　$0 < \theta < \pi$
  $r < M < R$, $M < r < R$ のとき $0 < \theta < 83°$, $97° < \theta < 180°$.

では次に曲率 $k \neq 0$ ではどうなるかを考えてみる.

5　曲率 $k \neq 0$ のとき

曲率が左右ともに $1/k$ 　(但し $k > \max\{r, R, M\}$) のときを考える.



定理 2.2 より軌跡は半径 k の円弧になるので，まずこの円の中心を求める．最初に $\widehat{\mathrm{SA}}$ を描く円は 2 点 S, A を通り半径 k の円であるから，中心の座標 $O_1(\theta)$ を (x, y) とすると次の連立方程式が立てられる：

$$\begin{cases} (R\cos\theta - x)^2 + (R\sin\theta - y)^2 = k^2, \\ (M - x)^2 + y^2 = k^2. \end{cases}$$

これを解くと,

$$\begin{cases} x = \dfrac{R\cos\theta + M}{2} \pm \dfrac{R\sin\theta}{2}\sqrt{\dfrac{4k^2 - R^2 - M^2 + 2RM\cos\theta}{R^2 + M^2 - 2RM\cos\theta}}, \\ y = \dfrac{R\sin\theta}{2} \mp \dfrac{R\cos\theta - M}{2}\sqrt{\dfrac{4k^2 - R^2 - M^2 + 2RM\cos\theta}{R^2 + M^2 - 2RM\cos\theta}}. \end{cases}$$

しかし図のように円弧をとりたいので，$O_1(\theta)$ の座標は,

$$\begin{cases} x = \dfrac{R\cos\theta + M}{2} - \dfrac{R\sin\theta}{2}\sqrt{\dfrac{4k^2 - R^2 - M^2 + 2RM\cos\theta}{R^2 + M^2 - 2RM\cos\theta}}, \\ y = \dfrac{R\sin\theta}{2} + \dfrac{R\cos\theta - M}{2}\sqrt{\dfrac{4k^2 - R^2 - M^2 + 2RM\cos\theta}{R^2 + M^2 - 2RM\cos\theta}}. \end{cases}$$

同様に $\overset{\frown}{\mathrm{SB}}$ を描く円の中心 $O_2(\theta) = (x', y')$ とすると，

$$\begin{cases} x' = \dfrac{R\cos\theta - M}{2} + \dfrac{R\sin\theta}{2}\sqrt{\dfrac{4k^2 - R^2 - M^2 - 2RM\cos\theta}{R^2 + M^2 + 2RM\cos\theta}}, \\ y' = \dfrac{R\sin\theta}{2} - \dfrac{R\cos\theta + M}{2}\sqrt{\dfrac{4k^2 - R^2 - M^2 - 2RM\cos\theta}{R^2 + M^2 + 2RM\cos\theta}}. \end{cases}$$

となる．

しかし，左右同じ曲率を考えているので， $l_1(\theta)$, $l_2(\theta)$ を $0 \leq \theta \leq \pi/2$ でそれぞれ求めて比較して最適角度を求めても， $0 \leq \theta \leq \pi$ で $l_1(\theta)$ のみに着目して最適角度を求めても同じことである．

従ってここからは $0 \leq \theta \leq \pi$ で $l_1(\theta)$ のみに着目して最適角度を求めることとする．

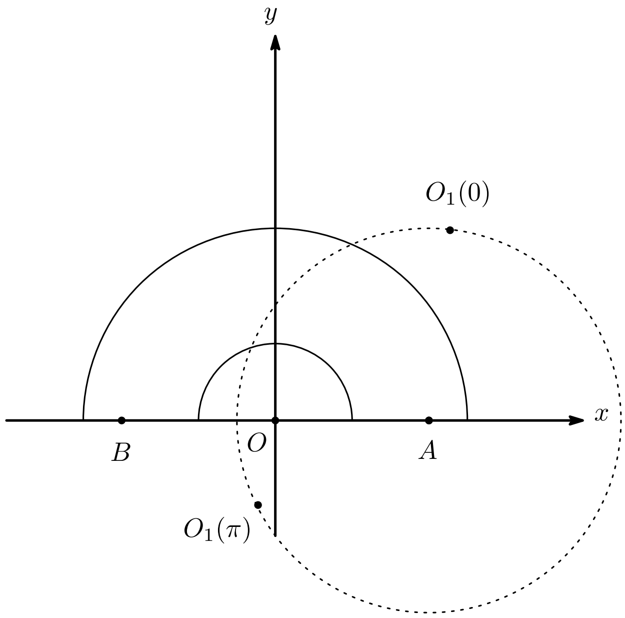
ここで，

$R < M \Rightarrow$ 中心 O_1 半径 k の円と中心 O 半径 R の円の上半部が 2 つの交点を持つ．

$M < R \Rightarrow$ 中心 O_1 半径 k の円と中心 O 半径 R の円の上半部は 1 つの交点を持つ．

このことも考慮しておく必要がある．

(　) $r < M < R$ のとき



$O_1(\pi) = \left(\frac{M-R}{2} \ , \ \frac{-R-M}{2}\sqrt{\frac{4k^2-R^2-M^2-2RM}{R^2+M^2+2RM}} \right)$ であり，

仮定より $M < R$ だから，

$$\frac{M-R}{2} < 0 \ , \ \frac{-R-M}{2}\sqrt{\frac{4k^2-R^2-M^2-2RM}{R^2+M^2+2RM}} < 0$$

となるので， $O_1(\pi)$ は第 3 象限に必ずあることがわかるから，

$O_1(\pi)\ G \perp \overset{\frown}{\mathrm{SA}}$ なる点は円弧上にある．

また， $O_1(0)$ がどの象限にあろうとも，

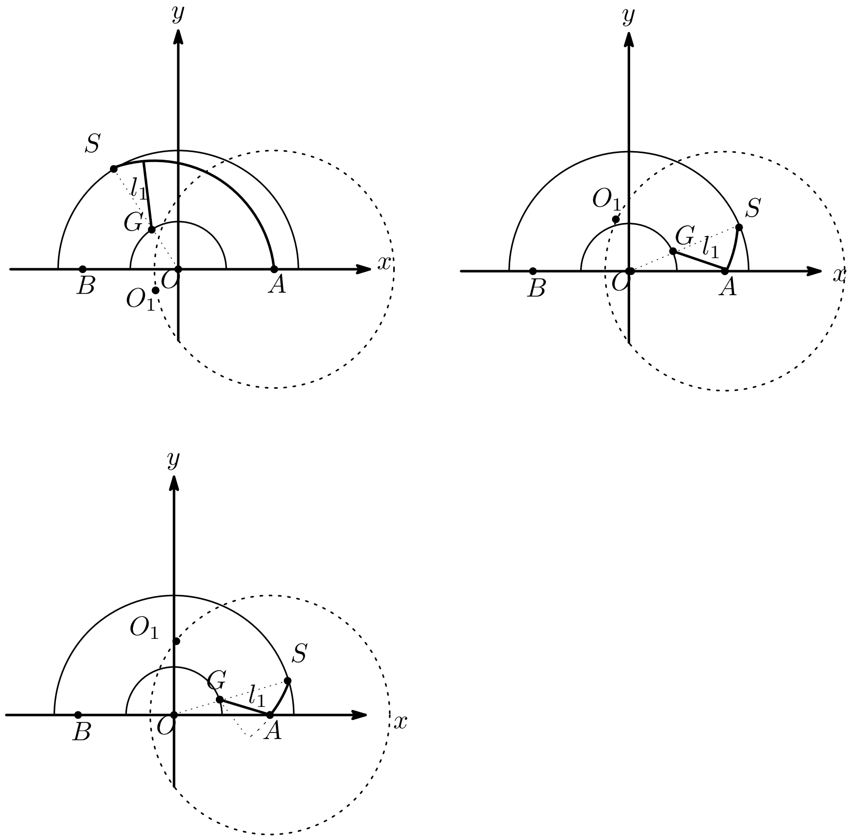
$O_1(0)\ G \perp \overset{\frown}{\mathrm{SA}}$ なる点は円弧上にない．

先に述べたように $M < R$ では中心 O_1 半径 k の円と中心 O 半径 R の円の上半部は１つの交点しかしか持たないので， S が中心 O 半径 R の円の上半部を滑らかに動くから， O_1 も $O_1(0)$ から左回りに $O_1(\pi)$ に至るまでの円弧上を滑らかに動くことになる．以上のことより， $0 < \exists\theta_1 \leq \pi$ が存在して，

$0 \leq \theta \leq \theta_1 \Rightarrow O_1\ G \perp \overset{\frown}{\mathrm{SA}}$ なる点が円弧上にない．
$\theta_1 \leq \theta \leq \pi \Rightarrow O_1\ G \perp \overset{\frown}{\mathrm{SA}}$ なる点が円弧上にある．

この θ_1 は A , $G(\theta)$, $O_1(\theta)$ が一直線上にあるときの θ のことである．

よって考えられるパターンは次の通りである．



上図より l_1 の変化の仕方が見てとれると思うが，右上図のときが丁度 θ_1 ということになる．従って $0 <\theta \leq \theta_1$ では $O_1\ G \perp$ 円 O_1 なる点は第 4 象限にあることが分かるので，

$$l_1(\theta) = \begin{cases} |\,GA\,| & (0 \leq \theta \leq \theta_1), \\ k - |\,O_1G\,| & (\theta_1 \leq \theta \leq \pi). \end{cases}$$

また，

$$0 \leq \theta \leq \theta_1 \Rightarrow l_1(\theta) \leq l_1(\theta_1)$$

であることにも注意をしておく．

まずは θ_1 を求めるので，

$$k - |\,O_1G\,| = |\,GA\,|$$

つまり，

$$k-\sqrt{k^2-(R-r)\left(r-M\cos\theta+M\sin\theta\sqrt{\frac{4k^2-R^2-M^2+2RM\cos\theta}{R^2+M^2-2RM\cos\theta}}\right)}$$
$$=\sqrt{(r\cos\theta-M)^2+(r\sin\theta)^2}$$

を解かなければならない．ここからは具体的数値を用いて考える．

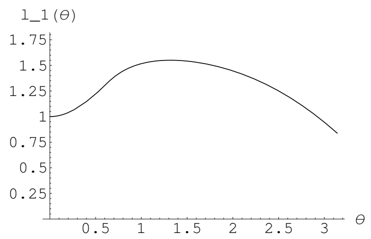
$r=1, M=2, R=3, k=4$ のとき

$$4-\sqrt{4^2-(3-1)(1-2\cos\theta+2\sin\theta\sqrt{\frac{4\times4^2-3^2-2^2+2\times3\times2\cos\theta}{3^2+2^2-2\times3\times2\cos\theta}})}$$
$$=\sqrt{(\cos\theta-2)^2+(\sin\theta)^2}$$

これを解くと $\theta=36\pi/180$
従って，

$$l_1(\theta)=\begin{cases}\sqrt{5-4\cos\theta} & (0\le\theta\le\frac{36\pi}{180})\\ 4-\sqrt{16-2\left(1-2\cos\theta+2\sin\theta\sqrt{\frac{51+12\cos\theta}{13-12\cos\theta}}\right)} & (\frac{36\pi}{180}\le\theta\le\frac{\pi}{2})\end{cases}$$

これをグラフにしてみると，



上のグラフより，$\theta=1.36=75°$ で最大だから，

$$\max l_1(\theta)=\max l_1(75°)=1.5.$$

従って，

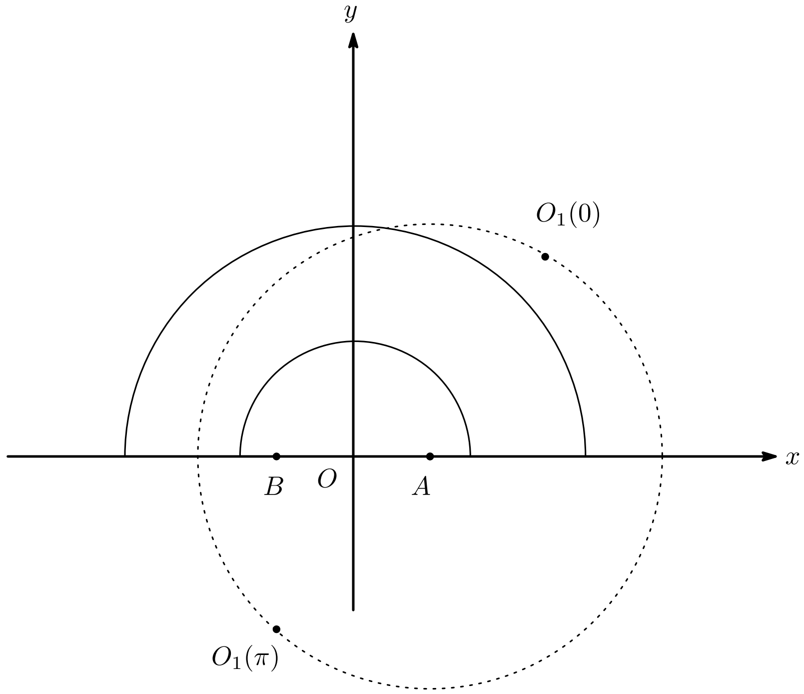
最適角度　$\theta=75°, 105°.$

数値を変えて同様のことを行いそれを次の表でまとめると，

r	M	R	k	θ_1	$\max l_1$	最適角度
1	2	3	4	36 °	$\max l_1(75°)=1.5$	75 °　105 °
1	2	3	5	35 °	$\max l_1(67°)=1.4$	67 °　113 °
1	2	4	5	49 °	$\max l_1(89°)=1.8$	89 °　91 °

従って最適角度は r , R , k の値によって変化するが y 軸対称の 2 つの値を持つ．

(　) $M < r < R$ のとき



(　) と同様に $O_1(\pi)$ は第 3 象限に必ずあるので，

$$O_1(\pi)\ G \perp \widehat{\mathrm{SA}} \text{ なる点は円弧上にある．}$$

また， $O_1(0) = \left(\frac{R+M}{2}\ ,\ \frac{R-M}{2}\sqrt{\frac{4k^2-R^2-M^2+2RM}{R^2+M^2-2RM}}\right)$ だから， $O_1(0)$ は第 1 象限にある．

よって，

$$O_1(0)\ G \perp \widehat{\mathrm{SA}} \text{ なる点は円弧上にある．}$$

従って O_1 も $O_1(0)$ から左回りに $O_1(\pi)$ に至るまでの円弧上を滑らかに動くので， $0 \leq \forall\theta \leq \pi$ で $O_1G \perp \widehat{\mathrm{SA}}$ なる点は円弧上にあるので，

$$\begin{aligned} l_1(\theta) &= k - |\,O_1G\,| \\ &= k - \sqrt{k^2 - (R-r)\left(r - M\cos\theta + M\sin\theta\sqrt{\frac{4k^2-R^2-M^2+2RM\cos\theta}{R^2+M^2-2RM\cos\theta}}\right)}. \end{aligned}$$

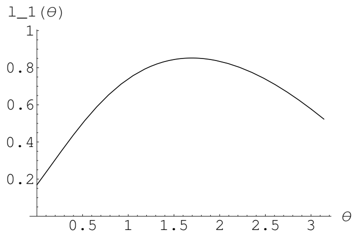
従って，この $l_1(\theta)$ を図示して最適角度を探すことにする．

ここからはまた具体的数値を用いて考えていく．

$M=1$, $r=2$, $R=4$, $k=6$ のとき

$$l_1(\theta)=6-\sqrt{6^2-(4-2)\left(2-\cos\theta+\sin\theta\sqrt{\frac{4\times6^2-4^2-1^2+2\times4\times1\times\cos\theta}{4^2+1^2-2\times4\times1\times\cos\theta}}\right)}.$$

このグラフを描くと,



従って上のグラフより $\max l_1(\theta)=l_1(1.69)=l_1(97^\circ)=0.85.$
従って,

$$\text{最適角度}\quad \theta=97^\circ, 83^\circ.$$

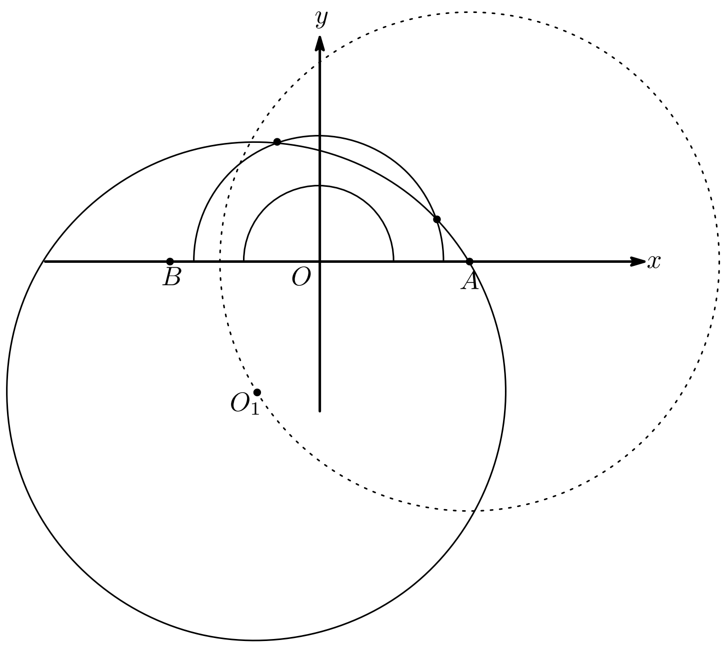
数値を変えて同様のことを行いそれを次の表でまとめると,

M	r	R	k	$\max l_1(\theta)$	最適角度
1	2	4	6	$l_1(97^\circ)=0.85$	97° 83°
1	2	4	7	$l_1(93^\circ)=0.79$	93° 87°
1	2	5	6	$l_1(94^\circ)=1.16$	94° 86°
1	4	5	6	$l_1(97^\circ)=0.85$	97° 83°

従って,

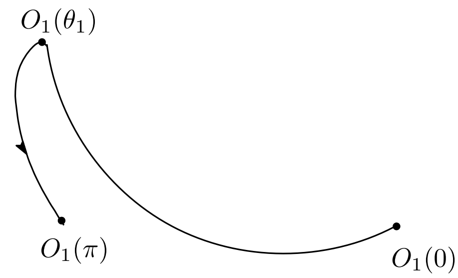
最適角度は r , R , k の値によって変化するが y 軸対称の 2 つの値を持つ.

(　) r < R < M のとき



中心 O_1 半径 k の円と中心 O 半径 R の円の上半部が 2 つの交点を持つということは，異なる θ で同じ中心点 O_1 を持つということである．従って (　)(　) のように考察することは困難である．

ここで $0 \leq \theta \leq \pi$ で $O_1(\theta)$ の動きに着目してみると，



と滑らかに動いている．

この図中の θ_1 とは中心 O_1 半径 k の円と中心 O 半径 R の円が内接する θ の値である．

言い換えると，点 $O_1(\theta)$, O , $G(\theta)$, $S(\theta)$ が一直線上に並ぶときである．よって，

$$0 \leq \theta \leq \theta_1 \Rightarrow O_1\ G \perp \widehat{\mathrm{SA}} \text{ なる点が円弧上にない．}$$
$$\theta_1 \leq \theta \leq \pi \Rightarrow O_1\ G \perp \widehat{\mathrm{SA}} \text{ なる点が円弧上にある．}$$

従って，

$$l_1(\theta) = \begin{cases} R - r & (0 \leq \theta \leq \theta_1), \\ k - \mid O_1 G \mid & (\theta_1 \leq \theta \leq \pi). \end{cases}$$

となるが，距離の定義より $0 \leq \forall\theta \leq \pi$ で，

$$k - \mid O_1 G \mid \leq R - r.$$

ここで θ_1 が r , R , k によらず一定であるとはとても言い難い．

(証明をしていないので必ずしも断言はできない．)

つまり図のように r , R , k をとると，最適角度は y 軸対称で 2 つ以上あることが分かる．

さらに言うと，

$0 < \theta_1 \leq \pi$ が存在して $0 \leq \theta \leq \theta_1$ が最適角度となる．

( )( )( ) より分かったことは，

- 最適角度は一定ではなく蹴る距離，キーパーの位置，さらには曲率の大きさにも依存して変化する．
- 円軌道においても最初の予想は間違っていた．
- 蹴る人がゴールポストの半径より外側にいれば最適角度は数値によって y 軸対称な 2 点に限り，内側にいた場合は y 軸対称な 2 点の組が 2 つ以上現れる．厳密に述べるとある特定の範囲が最適角度となる．

6　終わりに

最後にはなりましたが, 多くの助言を下さった田丸博士助教授にこの場を借りて感謝を述べさせて頂きます.

参考文献

[1] 小林昭七　『曲線と曲面の微分幾何 (改訂版)』裳華房

[2] 砂田利一　『曲面の幾何』岩波書店

[3] 梅原雅顕 ,　山田光太郎　『曲線と曲面』裳華房