平成１８年度 卒業論文

あるリー群の左不変計量に関する曲率について

広島大学理学部数学科
Ｂ０３４１５３ 児玉広志

指導教官 田丸博士

平成１９年　２月９日

目 次

1　はじめに

リー群に左不変計量を入れたものの曲率を求めるために, リー環を用いる方法がある. この論文では, その方法を用いていくつかの例について Ricci 曲率を計算した.

また, リー環上の内積を取替えることは多様体上の計量を取替えることに相当するため, 曲率が変化するが, 内積を変えるごとに Ricci 曲率がどの程度変わるかということを, 計算した. 一般に, リー環における内積の取替えは bracket の取替えにより記述できる. Ricci 曲率を求めるためには正規直交基底が必要なので, この事実を用いることで, 直接求めるのに比べて計算量を減らすことができる.

まず, 特定の内積に対し, 双曲平面 (上半平面), 双曲空間, 複素双曲平面の Ricci 曲率を計算し, 最後に, 任意の左不変計量に対し, 双曲平面の Ricci 曲率を計算した.

最後になったが, 指導教官の田丸先生にはいつも貴重な時間を割いて指導していただき, 大変お世話になった. この場を借りて深くお礼申し上げたい.

2　準備

この節では,Ricci 曲率, またそれを定義するために必要な事柄について述べる.

2.1　リーマン計量

定義 2.1. 等質空間 G/H が **reductive** $:\Leftrightarrow \exists \mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$: $(\mathrm{Ad}\,|_{\mathrm{H}})$-不変部分空間 $s.t.$ $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$.
また, この分解を **reductive 分解** という.

定義 2.2. $M = G/H$ を reductive な等質空間, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ を reductive 分解とする.このとき, $\mathfrak{p}$ 上の Ad_{H}-不変内積 $\langle , \rangle$ を M 上の **G-不変リーマン計量** という. また, 等質空間 G/H と G -不変リーマン計量の組 $(G/H, \langle , \rangle)$ を **リーマン等質空間** という.

$X(M)$ を M 上のベクトル場全体とする. リーマン多様体 (M, g) に対して次が定義される.

定義 2.3. 次で定義される双線形写像 $\nabla : X(M) \times X(M) \to X(M)$ を **Levi − Civita 接続** という :

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\ &\qquad + g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) + g(X,[Z,Y]). \end{aligned}$$

2.2　リー群の左不変計量

等質空間 $G/\{e\}$ を考える. このような等質空間 (明らかに G そのものと微分同相) は, 常に reductive 分解 $\mathfrak{g} = \{0\} \oplus \mathfrak{g}$ を持つ.

定義 2.4. $\mathfrak{g}$ 上の内積を, リー群 G 上の **左不変計量** という.

定義 2.5. 次で定義される双線形写像 $\nabla : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を **Levi-Civita 接続** という :

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \langle [X,Y], Z \rangle + \langle [Z,X], Y \rangle + \langle X, [Z,Y] \rangle.$$

(リーマン多様体上の Levi-Civita 接続に, 左不変ベクトル場を代入したもの)

Levi-Civita 接続を求めるために, 次で定義される双線形写像 $U : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を用いる.

$$2\langle U(X,Y), Z \rangle = \langle [Z,X], Y \rangle + \langle X, [Z,Y] \rangle.$$

定義より, U は対称である.
また,Levi-Civita 接続は $\nabla_X Y = (1/2)[X,Y] + U(X,Y)$ と表される.

定義 2.6. $R(X,Y)Z := -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z$ を **リーマン曲率** という.

定義 2.7. $\mathrm{Ric}(X,Y) := \sum \langle R(X,E_i)Y, E_i \rangle$ を **Ricci 曲率** という (ここで $\{E_i\}$ は $\mathfrak{g}$ の正規直交基底).

3 双曲平面

双曲平面 (上半平面) $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ はリー群とみなすことができる. その曲率を計算する.

命題 3.1. $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ に対し, 次の群 G が 1 次分数変換で推移的に作用し, $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 = G/\{e\}$ となる:

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} e^x & y \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

このリー群 G のリー環は, 次で与えられる:

$$\mathfrak{g} := \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & -x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

リー環の基底 $\{A, X\}$ を次のように選ぶ:

$$A := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, X := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

このとき,bracket 積は $[A, X] = \sqrt{2}X$ を満たす. $\mathfrak{g}$ 上の内積として, $c > 0$ に対して次のものを選ぶ:

$$\langle A, A\rangle^{1/c} := \frac{1}{c^2}\ ,\ \langle A, X\rangle^{1/c} := 0\ ,\ \langle X, X\rangle^{1/c} := 1.$$

Proof) 簡単な計算によって確かめられる.$\square$

補題 3.2. $\mathfrak{g}$ 上の新しい bracket 積を次で定義する : $[A, X]^c := cX$.
このとき, 写像

$$f : (\mathfrak{g}, [,], \langle,\rangle^{1/c}) \to (\mathfrak{g}, [,]^c, \langle,\rangle)$$

を $f(A) = (1/c)A, f(X) = X$ によって定義すると f は内積を保つリー環の同型写像となる.

Proof)
線形、全単射は明らか. 他を確かめる.

$Y, Z \in \mathfrak{g}$ に対し, $Y = aA + bX,\ Z = a'A + b'X (a, b, a', b' \in \mathbb{R})$ とおく.

$$\begin{aligned} \langle Y, Z\rangle^{1/c} &= aa'\frac{1}{c^2} + bb'. \\ \langle f(Y), f(Z)\rangle &= \langle acA + bX, a'cA + b'X\rangle \\ &= aa'\frac{1}{c^2} + bb'. \\ \\ \therefore \langle Y, Z\rangle^{1/c} &= \langle f(Y), f(Z)\rangle. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f([Y,Z]) &= f\big((ab'-a'b)X\big) \\
&= (ab'-a'b)X.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[f(Y),f(Z)]^c &= [(a/c)A+bX,(a'/c)A+b'X]^c \\
&= (ab'-a'b)X.
\end{aligned}
$$

$$
\therefore f([Y,Z]) = [f(Y),f(Z)]^c. \quad \square
$$

よって, $\mathfrak{g}$ 上の内積を $\langle,\rangle^{1/c}$ に取り替えることは, bracket を $[,]^c$ に取り替えることによって表せる. 同じように, 一般のリー環についても, 内積の取り替えは bracket の取り替えによって記述することができる.

補題 3.3. 上のリー環 $(\mathfrak{g},[,]^c,\langle,\rangle)$ に対して次が成り立つ :
(1)$U(A,A)=0,\ U(A,X)=-(c/2)X,\ U(X,X)=cA.$
(2)$\nabla_A A=0,\ \nabla_A X=0,\ \nabla_X A=-cX,\ \nabla_X X=cA.$

Proof)

(1) $\{A,X\}$ は $(\mathfrak{g},[,]^c,\langle,\rangle)$ の正規直交基底となっているので, これらとの内積を考えればよい.

$$
\begin{aligned}
\langle U(A,A),A\rangle &= (1/2)(\langle [A,A]^c,A\rangle + \langle A,[A,A]^c) = 0. \\
\langle U(A,A),X\rangle &= (1/2)(\langle [X,A]^c,A\rangle + \langle A,[A,X]^c) \\
&= \langle -cX,A\rangle = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\therefore U(A,A)=0.
$$

以下同様に,

$$
U(A,X) = -\frac{c}{2}X,\ U(X,X)=cA.
$$

(2)

$$
\nabla_A A = \frac{1}{2}[A,A]^c + U(A,A) = 0.
$$

以下同様に,

$$\nabla_A X = 0,\ \nabla_X A = -cX,\ \nabla_X X = cA. \quad \square$$

補題 3.4. 上のリー環 $(\mathfrak{g}, [,]^c, \langle,\rangle)$ に対して, 次が成り立つ:
(1)$R(A,X)A = -c^2 X.$
(2)$R(A,X)X = c^2 A.$

Proof)

$$\begin{aligned} R(A,X)A &= -\nabla_A \nabla_X A + \nabla_X \nabla_A A + \nabla_{[A,X]^c} A \\ &= c\nabla_A X + c\nabla_X A \\ &= -c^2 X. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(A,X)X &= -\nabla_A \nabla_X X + \nabla_X \nabla_A X + \nabla_{[A,X]^c} X \\ &= -c\nabla_A A + c\nabla_X X \\ &= c^2 A. \quad \square \end{aligned}$$

U は対称双線形, またリーマン曲率は定義より $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$ を満たすので, 上のものだけ求めれば十分である.

以上の補題から, 定義に従って Ricci 曲率を求めると次を得る.

定理 3.5. 上のリー環 $(\mathfrak{g}, [,]^c, \langle,\rangle)$ に対して, 次が成り立つ:

$$\mathrm{Ric}(Y,Z) = -c^2 \langle Y, Z\rangle.$$

Proof) $Y, Z \in \mathfrak{g}$ に対し,
$Y = \alpha A + \beta X,\ Z = \gamma A + \delta X \quad (\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R})$ とおく。

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(Y,Z) &= \sum \langle R(Y,E_i)Z, E_i\rangle \\ &= \langle R(Y,A)Z, A\rangle + \langle R(Y,X)Z, X\rangle \\ &= \langle \alpha R(A,A)Z + \beta R(X,A)Z, A\rangle + \langle \alpha R(A,X)Z + \beta R(X,X)Z, X\rangle \\ &= \beta\gamma\langle R(X,A)A, A\rangle + \beta\delta\langle R(X,A)X, A\rangle + \alpha\gamma\langle R(A,X)A, X\rangle + \alpha\delta\langle R(A,X)X, X\rangle \\ &= \beta\gamma\langle c^2 X, A\rangle + \beta\delta\langle -c^2 A, A\rangle + \alpha\gamma\langle -c^2 X, X\rangle + \alpha\delta\langle c^2 A, X\rangle \\ &= -c^2(\alpha\gamma + \beta\delta) \\ &= -c^2\langle Y, Z\rangle. \quad \square \end{aligned}$$

上のように, Ricci 曲率が内積の定数倍となるものを **Einstein 多様体** という.

4 実双曲空間

双曲平面を高次元化したものの曲率について考える.

定義 4.1. 線形空間 $\mathfrak{g} := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{A, X_1, ..., X_{n-1}\}$ に対して, $\{A, X_1, ..., X_{n-1}\}$ が正規直交基底になるような内積を入れ,bracket 積を次で定義する.: $[A, X_i] := cX_i,\ [X_i, X_j] := 0.$ このとき $(\mathfrak{g}, [,], \langle,\rangle)$ を **実双曲空間** という.

補題 4.2. 実双曲空間 $(\mathfrak{g}, [,], \langle,\rangle)$ に対して次が成り立つ:
(1)$U(A, A) = 0,\ U(A, X_i) = -(c/2)X_i,\ U(X_i, X_j) = \delta_{ij}cA.$
(2)$\nabla_A A = 0,\ \nabla_A X_i = 0,\ \nabla_{X_i} A = -cX_i,\ \nabla_{X_i} X_j = \delta_{ij}cA.$

Proof)
(1)

$$\begin{aligned}
\langle U(A, A), A\rangle &= \frac{1}{2}(\langle [A, A], A\rangle + \langle A, [A, A])\\
&= 0.\\
\langle U(A, A), X_i\rangle &= \frac{1}{2}(\langle [X_i, A], A\rangle + \langle A, [X_i, A])\\
&= \langle [X_i, A], A\rangle\\
&= \langle -cX_i, A\rangle\\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\therefore U(A, A) = 0.$$

以下同様に,

$$U(A, X_i) = -\frac{1}{2}X_i,\ U(X_i, X_j) = \delta_{ij}cA. \quad \square$$

(2)

$$\nabla_A A = \frac{1}{2}[A, A] + U(A, A) = 0.$$

以下同様に,

$$\nabla_A X_i = 0,\ \nabla_{X_i} A = -cX_i,\ \nabla_{X_i} X_j = \delta_{ij}cA. \quad \square$$

補題 4.3. 実双曲空間 $(\mathfrak{g}, [,], \langle,\rangle)$ に対して, 次が成り立つ:
(1)$R(A, X_i)A = -c^2X_i.$
(2)$R(A, X_i)X_j = \delta_{ij}c^2A.$
(3)$R(X_i, X_j)A = 0.$
(4)$R(X_i, X_j)X_k = \delta_{jk}c^2X_i - \delta_{ik}c^2X_j.$

Proof)
(1)

$$\begin{aligned} R(A,X_i)A &= -\nabla_A\nabla_{X_i}A + \nabla_{X_i}\nabla_A A + \nabla_{[A,X_i]}A \\ &= -\nabla_A(-cX_i) + \nabla_{cX_i}A \\ &= c\nabla_A X_i + c\nabla_{X_i}A \\ &= -c^2X_i. \end{aligned}$$

以下同様に,

$$\begin{aligned} R(A,X_i)X_j &= \delta_{ij}c^2A, \\ R(X_i,X_j)A &= 0, \\ R(X_i,X_j)X_k &= \delta_{jk}c^2X_i - \delta_{ik}c^2X_j. \quad \square \end{aligned}$$

以上の補題から, Ricci 曲率を求めると次を得る.

定理 4.4. 実双曲空間 $(\mathfrak{g},[,],\langle,\rangle)$ に対して, 次が成り立つ:

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = -c^2(n-1)\langle X,Y\rangle.$$

Proof)
定義より, $\mathrm{Ric}:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{R}$ は線形なので, まず $\mathrm{Ric}(A,A),\ \mathrm{Ric}(A,X_j),\ \mathrm{Ric}(X_j,A),$ $\mathrm{Ric}(X_j,X_k)$ を計算すればよい.

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(A,A) &= \langle R(A,A)A,A\rangle + \sum_{i=1}^{n-1}\langle R(A,X_i)X_j,X_i\rangle \\ &= -c^2\sum_{i=1}^{n-1}\langle X_i,X_i\rangle \\ &= -c^2(n-1). \end{aligned}$$

同様に,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(A,X_j) &= 0, \\ \mathrm{Ric}(X_j,A) &= 0, \\ \mathrm{Ric}(X_j,X_k) &= c^2\langle X_j,X_k\rangle - \delta_{jk}c^2n. \end{aligned}$$

したがって, $X,Y\in\mathfrak{g}$ に対し,

$$X = \alpha_0A + \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_iX_i,\ Y = \beta_0A + \sum_{j=1}^{n-1}\beta_jX_j$$

とおくと,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(X,Y) &= \mathrm{Ric}(\alpha_0 A, \beta_0 A) + \mathrm{Ric}\big(\alpha_0 A, \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j X_j\big) \\
&\qquad + \mathrm{Ric}\big(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i X_i, \beta_0 A\big) + \mathrm{Ric}\big(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i X_i, \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j X_j\big) \\
&= \alpha_0\beta_0\big(-c^2(n-1)\big) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i\beta_i \mathrm{Ric}(X_i, X_i) \\
&= \alpha_0\beta_0\big(-c^2(n-1)\big) - c^2(n-1)\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i\beta_i \\
&= -c^2(n-1)\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i\beta_i \\
&= -c^2(n-1)\langle X, Y\rangle. \quad \square
\end{aligned}
$$

この結果を見ると, Ricci 曲率が内積の定数倍となっているので, 実双曲空間 $(\mathfrak{g}, [,], \langle,\rangle)$ は Einstein 多様体となることが分かる.

5 複素双曲平面

定義 5.1. 次の線形空間 $(\mathfrak{g}, [,], \langle,\rangle)$ を **複素双曲平面** という.
$\mathfrak{g} := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{A, X, Y, Z\}$ に対して, $\{A, X, Y, Z\}$ が正規直交基底になるような内積を入れ,bracket 積を次で定義する: $[A, X] := (1/2)X,\ [A, Y] := (1/2)Y,\ [A, Z] := Z,\ [X, Y] := Z$ (その他の bracket は 0 とする).

複素双曲平面 $(\mathfrak{g}, [,], \langle,\rangle)$ について, 以下のことが成り立つ. 証明は省略するが, 先に挙げた例と同じように計算すれば容易に確かめられる.

補題 5.2. 複素双曲平面 $(\mathfrak{g}, [,], \langle,\rangle)$ に対して, 次が成り立つ:
(1) $U(A, A) = 0,\ U(A, X) = (-1/4)X,\ U(A, Y) = (-1/4)X,\ U(A, Z) = (-1/2)Z,$
$U(X, X) = (1/2)A,\ U(X, Y) = 0,\ U(X, Z) = (-1/2)Y,\ U(Y, Y) = (1/2)A,$
$U(Y, Z) = (1/2)X,\ U(Z, Z) = A.$

(2) $\nabla_A A = \nabla_A X = \nabla_A Y = \nabla_A Z = 0,$
$\nabla_X A = (-1/2)X,\ \nabla_X X = (1/2)A,\ \nabla_X Y = (1/2)Z,\ \nabla_X(-1/2)Y,$
$\nabla_Y A = (-1/2)Y,\ \nabla_Y X = (-1/2)Z,\ \nabla_Y Y = (1/2)A,\ \nabla_Y Z = (1/2)X,$
$\nabla_Z A = -Z,\ \nabla_Z X = (-1/2)Y,\ \nabla_Z Y = (1/2)X,\ \nabla_Z Z = A.$

補題 5.3. 複素双曲平面 $(\mathfrak{g}, [,], \langle,\rangle)$ に対して, 次が成り立つ :

$$\begin{array}{rcl}
R(A,X)A &=& (-1/4)X, \\
R(A,X)X &=& (1/4)A, \\
R(A,X)Y &=& (1/4)Z, \\
R(A,X)Z &=& (-1/4)Y, \\
R(A,Y)A &=& (-1/4)Y, \\
R(A,Y)X &=& (-1/4)Z, \\
R(A,Y)Y &=& (1/4)A, \\
R(A,Y)Z &=& (1/4)X, \\
R(A,Z)A &=& -Z, \\
R(A,Z)X &=& (-1/2)Y, \\
R(A,Z)Y &=& (1/2)X, \\
R(A,Z)Z &=& A, \\
R(X,Y)A &=& (-1/2)Z, \\
R(X,Y)X &=& -Y, \\
R(X,Y)Y &=& X, \\
R(X,Y)Z &=& (1/2)A, \\
R(X,Z)A &=& (-1/4)Y, \\
R(X,Z)X &=& (-1/4)Z, \\
R(X,Z)Y &=& (1/4)A, \\
R(X,Z)Z &=& (1/4)X, \\
R(Y,Z)A &=& (1/4)X, \\
R(Y,Z)X &=& (-1/4)A, \\
R(Y,Z)Y &=& (-1/4)Z, \\
R(Y,Z)Z &=& (1/4)Y.
\end{array}$$

以上の補題から, Ricci 曲率を求めると次を得る.

定理 5.4. 複素双曲平面 $(\mathfrak{g}, [,], \langle,\rangle)$ に対して, 次が成り立つ :
$X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$ に対し,

$$\mathrm{Ric}(X_1, X_2) = -\frac{3}{2}\langle X_1, X_2\rangle.$$

このことから, 複素双曲空間 $(\mathfrak{g}, [,], \langle,\rangle)$ は Einstein 多様体となっていることが分かる.

6　任意の内積に対する双曲平面の曲率

最後に, この節では先に扱った双曲平面において, $\mathfrak{g}$ 上の内積を任意に取った場合の Ricci 曲率について考える.

$\mathfrak{g}$ はベクトル空間として $\mathbb{R}^2$ と同一視できるので, 以降 $\mathfrak{g} := \mathbb{R}^2$ として議論する. $\mathfrak{g}$ の基底 {A,X} を次のように選ぶ :

$$A := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1, \quad X := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2.$$

また,bracket 積を次のように定義する :

$$[e_1, e_2] := \sqrt{2} e_2.$$

$\mathfrak{g}$ 上の任意の内積は次のように書くことができる :

$$\langle Y, Z \rangle^g := \langle gY, gZ \rangle \quad (g \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g})).$$

先にも述べたように, リー環の内積の取替えは,bracket の取替えによって記述することができるので, そのことを用いて Ricci 曲率を計算する.

補題 6.1. $\mathfrak{g}$ 上の新しい bracket 積を次で定義する*:*

$$[Y, Z]^g := g[g^{-1}Y, g^{-1}Z].$$

このとき, 写像

$$f : (\mathfrak{g}, [,], \langle , \rangle^g) \to (\mathfrak{g}, [,]^g, \langle , \rangle)$$

を $f(Y) = gY$ によって定義すると, f は内積を保つリー環の同型写像となる.

Proof) 線形, 全単射は明らか. 他を確かめる.

$$\begin{aligned} \langle Y, Z \rangle^g &= \langle gY, gZ \rangle \\ &= \langle f(Y), f(Z) \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [f(Y), f(Z)]^g &= [gY, gZ]^g \\ &= g[g^{-1}(gY), g^{-1}gZ] \\ &= g[Y, Z] \\ &= f([Y, Z]). \ \square \end{aligned}$$

これ以降,

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

とおく. すると,

$$[e_1, e_2]^g = \frac{\sqrt{2}}{\mathrm{det}g}(g_{12}e_1 + g_{22}e_2)$$

となる.

それでは, これから曲率の計算に入る.

補題 6.2. 上の $(\mathfrak{g}, [,]^g, \langle , \rangle)$ に対しして次が成り立つ :

$$\begin{aligned} U(e_1, e_1) &= -\frac{\sqrt{2}g_{12}}{\mathrm{det}g}e_2, \\ U(e_1, e_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}\mathrm{det}g}(g_{12}e_1 - g_{22}e_2), \\ U(e_2, e_2) &= \frac{\sqrt{2}g_{22}}{\mathrm{det}g}e_1. \end{aligned}$$

Proof) これまでと同様に, 正規直交基底との内積を計算すればよい.

$$\begin{aligned} \langle U(e_1, e_1), e_1 \rangle &= \langle e_1, [e_1, e_1]^g \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle U(e_1, e_1), e_2 \rangle &= \langle e_1, [e_2, e_1]^g \rangle \\ &= -\frac{\sqrt{2}g_{12}}{\mathrm{det}g}. \end{aligned}$$

$$\therefore U(e_1, e_1) = -\frac{\sqrt{2}g_{12}}{\mathrm{det}g}e_2.$$

以下同様に,

$$\begin{aligned} U(e_1, e_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}\mathrm{det}g}(g_{12}e_1 - g_{22}e_2), \\ U(e_2, e_2) &= \frac{\sqrt{2}g_{22}}{\mathrm{det}g}e_1. \ \square \end{aligned}$$

補題 6.3. 上の $(\mathfrak{g}, [,]^g, \langle, \rangle)$ に対しして次が成り立つ：

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1} e_1 &= -\frac{\sqrt{2} g_{12}}{\det g} e_2, \\
\nabla_{e_1} e_2 &= \frac{\sqrt{2} g_{12}}{\det g} e_1, \\
\nabla_{e_2} e_1 &= -\frac{\sqrt{2} g_{22}}{\det g} e_2, \\
\nabla_{e_2} e_2 &= \frac{\sqrt{2} g_{22}}{\det g} e_1.
\end{aligned}$$

Proof)

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1} e_1 &= \frac{1}{2}[e_1, e_1]^g + U(e_1, e_1) \\
&= U(e_1, e_1) \\
&= -\frac{\sqrt{2} g_{12}}{\det g} e_2.
\end{aligned}$$

以下同様に,

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1} e_2 &= \frac{\sqrt{2} g_{12}}{\det g} e_1, \\
\nabla_{e_2} e_1 &= -\frac{\sqrt{2} g_{22}}{\det g} e_2, \\
\nabla_{e_2} e_2 &= \frac{\sqrt{2} g_{22}}{\det g} e_1. \ \square
\end{aligned}$$

補題 6.4. 上の $(\mathfrak{g}, [,]^g, \langle,\rangle)$ に対して次が成り立つ:

$$\begin{aligned} R(e_1, e_2)e_1 &= -\frac{2(g_{12}^2 + g_{22}^2)}{(\det g)^2} e_2, \\ R(e_1, e_2)e_2 &= \frac{2(g_{12}^2 + g_{22}^2)}{(\det g)^2} e_1. \end{aligned}$$

Proof)

$$\begin{aligned} R(e_1, e_2)e_1 &= -\nabla_{e_1} \nabla e_2 e_1 + \nabla e_2 \nabla e_1 e_1 + \nabla_{[e_1, e_2]^g} e_1 \\ &= \frac{\sqrt{2} g_{22}}{\det g} \nabla_{e_1} e_2 - \frac{\sqrt{2} g_{12}}{\det g} \nabla_{e_2} e_2 + \frac{\sqrt{2}}{\det g} \big(g_{12} \nabla_{e_1} e_1 + g_{22} \nabla_{e_2} e_1 \big) \\ &= \frac{2}{(\det g)^2} \big(g_{12} g_{22} e_1 - g_{12} g_{22} e_1 - g_{12}^2 e_2 - g_{22} e_2 \big) \\ &= -\frac{2(g_{12}^2 + g_{22}^2)}{(\det g)^2} e_2. \end{aligned}$$

同様に,

$$R(e_1, e_2)e_2 = \frac{2(g_{12}^2 + g_{22}^2)}{(\det g)^2} e_1. \ \square$$

以上の補題から, 任意の内積に対する双曲平面の Ricci 曲率を求めると次を得る.

定理 6.5. 上の $(\mathfrak{g}, [,]^g, \langle,\rangle)$ に対して次が成り立つ:

$$\mathrm{Ric}(Y, Z) = -\frac{2(g_{12}^2 + g_{22}^2)}{(\det g)^2} \langle Y, Z \rangle.$$

Proof) まず, $\mathrm{Ric}(e_i, e_j) \quad (i, j = 1, 2)$ を求める.

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(e_1, e_1) &= \langle R(e_1, e_2)e_1, e_2 \rangle \\ &= -\frac{2(g_{12}^2 + g_{22}^2)}{(\det g)^2}. \end{aligned}$$

同様に,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(e_1, e_2) &= 0, \\ \mathrm{Ric}(e_2, e_1) &= 0, \\ \mathrm{Ric}(e_2, e_2) &= -\frac{2(g_{12}^2 + g_{22}^2)}{(\det g)^2}. \end{aligned}$$

よって, $Y, Z \in \mathfrak{g}$ に対して,$Y = ae_1 + be_2, Z = a'e_1 + b'e_2$ とおくと,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(Y,Z) &= aa'\mathrm{Ric}(e_1,e_1) + bb'\mathrm{Ric}(e_2,e_2) \\ &= -\frac{2(g_{12}^2 + g_{22}^2)}{(\det g)^2}(aa' + bb') \\ &= -\frac{2(g_{12}^2 + g_{22}^2)}{(\det g)^2}\langle Y, Z\rangle. \ \square \end{aligned}$$

以上の結果から, 双曲平面は任意の左不変計量に対して Einstein 多様体となることが分かった. また, $\det g \neq 0$ より, $g_{12} \neq 0$ または $g_{22} \neq 0$ が成り立つので, 双曲平面の Ricci 曲率は 0 にならないが, g をうまく取れば $\mathrm{Ric}(Y,Z) \to 0$ とすることができる. 例えば,

$$g = \begin{pmatrix} 1/t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

に対し, $t \to 0$ とすればよい.

参考文献

[1] 田丸博士, 熊本大学集中講義ノート, 2006.

[2] 新地幸子, 3 次元 Lie 群上の平坦及び概平坦な左不変擬 Riemann 計量, 広島大学大学院理学研究科 2004 年度修士論文, 2005.

[3] 落合卓四郎, 微分幾何入門 (下), 東京大学出版, 1993.