熊本大学集中講義（2006/12/04–08）講義資料

等質空間の幾何学入門

田丸 博士
（広島大学 大学院理学研究科）
tamaru@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

まえがき

本稿は, 筆者が熊本大学で行った集中講義（2006/12/04–08）で配布した講義資料である．ちなみに 2006 年度前期にも広島大学に於いて, 同様の内容の講義を 4 年生・大学院生向けに行った．本稿は, それらの講義の記録である（そして恐らくは, 数年後に同様の内容を講義するときの講義資料でもある）．しかしながら, 一応, 独立した読み物として読めるようにはなっていると思う．

本稿の目的は, 等質空間論の簡潔な入門書を提供することである．等質空間やリー群や対称空間を勉強しようとするとき, 入門書と呼ばれる有名な教科書がことごとく分厚くて困るという言葉を聞くことが多い．そこで本稿では, 本格的な解説はすっぱり諦めて, 具体例を多く取り入れて「習うより慣れる」ことに重点を置いた．分厚くて具体例が少ない本格的な教科書を読む際に, 具体例を知っていること, 慣れていることは, 大きなアドバンテージになるだろう．

本稿には, 定理などの証明は殆ど書かれていない．これは, 単に時間が無くてまだ書いていないだけで, 読む人が証明を補いながら読み進めることを想定してのものではない．そのような, 到底完成版とは言えないような状態ではあるが, 本稿が参考になる人も存在するかと思い, 公開することとした．誤りなどの指摘があれば, よろしくお願いしたい．

目次

第 1 章

群作用と等質集合

本章では, 群作用と等質空間に関する基本的な概念を述べる．ここでは, 単に群が集合に作用している場合を考える（位相空間や多様体への構造を保つ作用は, 次章以降で考える）．本節の内容は以下の通り:

- 等質集合とは, 推移的な群作用を持つ集合のこと.
- 等質集合は, 群の商空間 G/K で表される.
- 球面・射影空間・グラスマン多様体・旗多様体は, 等質集合である.

必要とされる予備知識は, 主に線型代数と群論. より詳しい解説は, 例えば [KO, §7], [M, §4] を参照.

1.1 群の例: 線型群

群作用・等質集合（空間）・リー群の典型的な例は, 行列の成す群（線型群）によって与えられる．まず初めに, 今後頻繁に登場する群を紹介する.

定義 1.1 $M_n(\mathbb{R})$ を $n \times n$ 実行列の全体とし, 以下の部分群を定義する:

(1) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) := \{g \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(g) \neq 0\}$ を **一般線型群**（**general linear group**）.

(2) $\mathrm{O}(n) := \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t g g = I_n\}$ を **直交群**（**orthogonal group**）.

(3) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) := \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(g) = 1\}$ を **特殊線型群**（**special linear group**）.

(4) $\mathrm{SO}(n) := \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(n)$ を **特殊直交群**（**special orthogonal group**）.

これらが群であることの証明は, 簡単な線型代数の問題. 特に直交群 $\mathrm{O}(n)$ は, $\mathbb{R}^n$ の内積を保つ $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の部分群であった.

問題 1.2 $\mathrm{O}(n) = \{g \in \mathrm{GL}_\mathrm{n}(\mathbb{R}) \mid \forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \langle gx, gy \rangle = \langle x, y \rangle\}$ を示せ．ただしここで $\langle , \rangle$ は $\mathbb{R}^n$ 上の自然な内積.

定義 1.1 に登場した群は, 実数成分の行列で表されていた. それぞれに対応する複素数版の群もある.

定義 1.3 $M_n(\mathbb{C})$ を $n \times n$ 複素行列の全体とし, 以下の部分群を定義する:

(1) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) := \{g \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det(g) \neq 0\}$ を **複素一般線型群**.

(2) $\mathrm{U}(n) := \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{g}g = I_n\}$ を **ユニタリ群**（**unitary group**）.

(3) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) := \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \det(g) = 1\}$ を **複素特殊線型群**.

(4) $\mathrm{SU}(n) := \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{U}(n)$ を **特殊ユニタリ群**（**special unitary group**）.

問題 1.4 $\mathrm{U}(n) = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \forall x, y \in \mathbb{C}^n,\ \langle gx, gy\rangle = \langle x, y\rangle\}$ を示せ. ただしここで $\langle , \rangle$ は $\mathbb{C}^n$ 上の自然なエルミート内積.

この他にも, 四元数 $\mathbb{H}$ に対応する群もある. それらの線型群を総称して **古典群**（**classical group**）と呼ぶ. もちろん, 古典群でない群も数多くある. 例えば,

定義 1.5 次で定義される群 H を **3 次元 Heisenberg 群** と呼ぶ:

$$H := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

問題 1.6 3 次元 Heisenberg 群 H が群であることを確かめよ.

1.2 群作用

群 G の集合 M への作用を定義する. 以下, 特に断らない限り, g, h は G の元, e は G の単位元, p, q は M の元とする.

定義 1.7 写像 $\Phi : G \times M \to M : (g, p) \mapsto \Phi(g, p) =: g.p$ が G の M への **作用**（**action**）とは, 次をみたすこと: (1) $(gh).p = g.(h.p)$, (2) $e.p = p$.

記号. ここでは $g.p = \Phi(g, p)$ という記号を用いるが, $g \cdot p$ あるいは単に gp と書くこともある（が, 群の積や行列の積と紛らわしいので $g.p$ と書く）. G が M に作用することを, 記号 $G \curvearrowright M$ で表す.

例 1.8 $\Phi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (g, v) \mapsto g.v := gv$ によって $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}^n$ に作用する. また $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の任意の部分群 G も同様に $\mathbb{R}^n$ に作用する.

一般に, G が M に作用しているならば, G の任意の部分群 G' も M に作用する. 上の例は, 作用が行列の積で書かれた, 非常に簡単な作用であった. そうでない, 作用の定義が非自明なものもある:

例 1.9 $\mathbb{RH}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ とおく．$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ は次によって $\mathbb{RH}^2$ に作用する:

$$\Phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{RH}^2 \to \mathbb{RH}^2 : (\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, z) \mapsto \frac{az+b}{cz+d}.$$

$\mathbb{RH}^2$ を <u>**上半平面**</u> と呼ぶ．また，上で定義された写像を <u>**１次分数変換**</u> と呼ぶ．

問題 1.10 例 1.9 を示せ．すなわち，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ は１次分数変換によって $\mathbb{RH}^2$ に作用することを示せ．

簡単な作用と複雑な作用の例を見た．では，与えられた集合に対して作用はどのくらいあるか，という疑問は自然である．一般に膨大な数の作用があるが，次の命題は，どの程度膨大であるかをある程度表している:

命題 1.11 集合 M に対して，$\mathrm{Aut}(M) := \{f : M \to M : 全単射\}$ と定義する．これは写像の合成に関して群となる．このとき，

(1) 作用 $\Phi : G \times M \to M$ に対して，次は群準同型:
$\varphi : G \to \mathrm{Aut}(M) : g \mapsto \Phi(g, \cdot)$ （ここで $\Phi(g, \cdot) : p \mapsto \Phi(g, p)$）．

(2) 逆に，群準同型 $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(M) : g \mapsto \varphi_g$ に対して，次は作用:
$\Phi : G \times M \to M : (g, p) \mapsto \varphi_g(p)$.

群準同型 φ のことを <u>**作用**</u> と呼ぶこともある．

問題 1.12 命題 1.11 を示せ．

作用を与えることと，群準同型を与えることが同値となる．大胆に言うと，作用を与えることと，$\mathrm{Aut}(M)$ の部分群を与えることが（殆ど）同値と言える．$\mathrm{Aut}(M)$ の部分群が M に作用することは明らかであろう．

定義 1.13 群 G がベクトル空間 V に $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ によって作用するとき，この作用を <u>**表現**（**representation**）</u>と呼ぶ．

表現のことを線型な作用，あるいは線型表現と呼ぶこともある．

定義 1.14 群 G の集合 M への作用に対し，$G.p := \{g.p \in M \mid g \in G\}$ を G による $p \in M$ を通る <u>**軌道**（**orbit**）</u>と呼ぶ．

軌道は M の部分集合である．後に，これが部分多様体になり，興味深い部分多様体の例を供給することを調べる．

1.3 等質集合

等質集合とは, 推移的な群作用を持つ集合のことである.

定義 1.15 G の M への作用が **推移的**（**transitive**）とは, 次をみたすこと: $\forall p, q \in M$, $\exists g \in G : g.p = q$.

恐らく次が最も簡単な推移的な作用の例:

例 1.16 次で定まる加法群 $\mathbb{R}^n$ の $\mathbb{R}^n$ への作用は推移的: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (g, p) \mapsto g+p$.

一般に, 作用が推移的であることを示すときには, 次を用いるのが普通である:

命題 1.17 $G \curvearrowright M$ とし, $o \in M$ を一つ選ぶ. このとき, $\forall p \in M$, $\exists g \in G$ s.t. $g.p = o$ が成立するならば, 作用 $G \curvearrowright M$ は推移的.

次の証明には, 上の命題が必要であろう:

例 1.18 $n \geq 2$ とする. $\mathrm{O}(n)$ の S^{n-1} への作用は推移的.

この事実を繰り返し適用することによって, 「$\mathbb{R}^n$ の 2 つの正規直交基底は $\mathrm{O}(n)$ の元で移りあう」ことが証明できる（逆に, 「$\mathbb{R}^n$ の 2 つの正規直交基底は $\mathrm{O}(n)$ の元で移りあう」ことの帰結として, $\mathrm{O}(n)$ が S^{n-1} に推移的に作用することを導くこともできる）. 線型代数の性質は, 群作用の言葉で述べると見通しが良くなることが多い.

定義 1.19 M が **等質集合** とは, M に推移的に作用する群 G が存在すること.

強調して **G-等質集合** と呼ぶこともある.

1.4 商空間

等質集合は群の商空間として表示できる.

定義 1.20 G の部分群 K に対し, $g \sim h :\Leftrightarrow g^{-1}h \in K$ によって G 上の同値関係 $\sim$ を定義する. このとき, $G/K := G/\sim$ を G の K による **商空間**（**coset space**）と呼ぶ.

商空間は $G/K = \{gK \mid g \in G\}$ と表すこともできる. ここでは K は正規部分群とは仮定していないので, G/K が群（商群）になるとは限らない. M が G-等質集合ならば, M は G の商空間として表示できる.

定理 1.21 M を G-等質集合とする．$p \in M$ に対し, $G_p := \{g \in G \mid g.p = p\}$ とおくと, 次の写像が全単射: $G/G_p \to M : [g] \mapsto g.p$.

定理の中で定義された G_p を **固定部分群**（**isotropy subgroup**）と呼ぶ.

例 1.22 $G := \mathrm{O}(n+1) \curvearrowright S^n$ に対して,

$$G_{e_1} = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & \alpha \end{array}\right] \in \mathrm{O}(n+1) \mid \alpha \in \mathrm{O}(n) \right\} \cong \mathrm{O}(n).$$

よって S^n は次のように商空間表示できる: $S^n = \mathrm{O}(n+1)/\mathrm{O}(n)$.

容易に分かるように, 点 p を取り替えると G_p は替わる:

$$G_{e_{n+1}} = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} \alpha & \\ \hline & 1 \end{array}\right] \in \mathrm{O}(n+1) \mid \alpha \in \mathrm{O}(n) \right\} \neq G_{e_1}.$$

しかし, G_p と G_q は共役になり, 商空間はもちろん一致する: $G/G_p \cong G/G_q$.

問題 1.23 M を G-等質空間とし, $p, q \in M$ とする．このとき G_p と G_q は共役（すなわち $\exists g \in G : g^{-1}G_p g = G_q$）であることを示せ.

$M = G/G_p$ という表示より, M の情報は全て (G, G_p) という組に反映されている（すなわち, 原理的には群を見れば全てが分かる）．そして一般に, 集合 M よりも群の組 (G, G_p) の方が調べやすい.

問題 1.24 群 G の商空間 G/K に対して, 次によって G は G/K に推移的に作用することを示せ: $G \times G/K \to G/K : (g, [h]) \mapsto g.[h] := [gh]$.

1.5 等質集合の例

射影空間・グラスマン多様体・旗多様体は等質集合である．その商空間表示を求める.

定義 1.25 **実射影空間** $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, **実グラスマン多様体** $G_k(\mathbb{R}^n)$, **旗多様体** $G_{k_1,\ldots,k_l}(\mathbb{R}^n)$ を次で定義する:

(1) $\mathbb{R}\mathrm{P}^n := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ （ただしここで, $v \sim w :\Leftrightarrow \exists c \neq 0 : v = cw$）.

(2) $G_k(\mathbb{R}^n) := \{V \subset K^n \mid V$ は線型部分空間, $\dim V = k\}$.

(3) $G_{k_1,\ldots,k_l}(\mathbb{R}^n) := \{(V_{k_1}, \ldots, V_{k_l}) \mid V_{k_1} \subset \cdots \subset V_{k_l}$: 線型部分空間, $\dim V_{k_i} = k_i\}$.

これらの集合の複素数版や四元数版もある.

注意 1.26 次は全単射: $\mathbb{R}\mathrm{P}^n \to G_1(\mathbb{R}^{n+1}) : [v] \mapsto \mathbb{R}v$.

すなわち射影空間はグラスマン多様体であり, また定義より明らかに, グラスマン多様体は旗多様体である．これらは全て等質空間となる．ここではグラスマン多様体の場合にそれを調べる．

命題 1.27 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の $G_k(\mathbb{R}^n)$ への作用を次で定義する： $g.V := \{gv \mid v \in V\}$.

(1) $G_k(\mathbb{R}^n)$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$-等質であり, $G_k(\mathbb{R}^n) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/B$. ここで

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \right\}.$$

(2) $G_k(\mathbb{R}^n)$ は $\mathrm{O}(n)$-等質でもあり, $G_k(\mathbb{R}^n) = \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k)$.

命題 1.27 から分かるように, 集合（多様体）が異なる商空間としての表示を持つことがある．異なる商空間表示は, 異なる変換群に対応し, それはさらに異なる幾何構造を考えることに対応する．

問題 1.28 上半平面 $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ を $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の商空間で表示せよ（例 1.9 で定義した 1 次分数変換によって作用する）．

商空間表示から集合の性質を読み取ることができる．その一例として, 次を挙げておく：

命題 1.29 $G_k(\mathbb{R}^n) \cong G_{n-k}(\mathbb{R}^n)$.

$G_k(\mathbb{R}^n) = \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k)$ および $G_{n-k}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-k) \times \mathrm{O}(k)$ と商空間表示できる．それぞれの固定部分群が共役であることから, 命題は示される．幾何学的には, 同型写像を次によって与えることができる： $G_k(\mathbb{R}^n) \to G_{n-k}(\mathbb{R}^n) : V \mapsto V^{\perp}$.

第 2 章

リー群とリー環

前章で等質空間 M は商空間 G/K として表示できることを述べた. これは現時点では集合としての同型であった. 次に, M が多様体である場合に, 商空間 G/K にも多様体構造が入り, $M = G/K$ は多様体として同型である, と話を進めたい. 商空間 G/K に多様体構造を入れる方法は, G に多様体構造を仮定してそれを用いて作るというものである. そこで本章では, 多様体構造を持つ群（すなわちリー群）を調べる. 本章の内容は以下の通り:

- リー群とは, 多様体 $+$ 群.
- リー環とは, 積が所定の性質を満たす代数.
- リー群上の左不変ベクトル場の全体は, リー環になる.
- 指数写像とは, リー環からリー群への局所同型写像.
- 行列の指数写像は, リー群の指数写像の特別な場合.

ここでは, これらの内容を, 後に使う概念に話題を絞って具体例を中心に紹介する. より詳しい内容は, [KO, 第 5 章], [O2], [W, Chapter 3] などを参照.

2.1 リー群

リー群とは, 多様体かつ群で, それらの構造が適合しているものである. 線型群は, リー群の典型的な例である. ここでは多様体と言ったら C^∞-多様体を意味するものとする.

定義 2.1 群かつ多様体である G が <u>**リー群**</u>（<u>**Lie group**</u>）とは, 次を満たすこと:

(1) 積の操作 $G \times G \to G : (g, h) \mapsto gh$ が C^∞-写像.

(2) 逆元の操作 $G \to G : g \mapsto g^{-1}$ が C^∞-写像.

この条件 (1), (2) は次と置き換えても良い: $G \times G \to G : (g, h) \mapsto gh^{-1}$ が C^∞-写像.

例 2.2 次はリー群である:
(1) 加法群 $\mathbb{R}^n$. (2) 一般線型群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. (3) 3 次元 Heisenberg 群.

加法群 $\mathbb{R}^n$ がリー群となることは自明. 一般線型群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ は, $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ の開部分集合となることから多様体構造が定まる.

問題 2.3 3 次元 Heisenberg 群 H に, 自然に $\mathbb{R}^3$ と同型となる多様体構造を定義し, その構造に関して H がリー群となることを示せ.

これらは非常に簡単な例であるが, 多くの場合, リー群であることを定義に従って証明することは困難である. 例えば,

例 2.4 $\mathrm{SO}(2) \cong S^1$ はリー群である.

これを定義に従って証明するには, 4 つの座標近傍に分けて, 積と逆元の操作が C^∞-写像であることを座標近傍ごとに確かめる必要がある（多様体論の練習問題としては良いかも知れない）. しかし, 同様の方法で $\mathrm{SO}(n)$ がリー群であることを示すのは, 絶望的であろう. そこで, 次のような陰関数定理を使う方法が便利.

定理 2.5 $F : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^m$ を C^∞-写像とし, $G := \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid F(g) = 0\}$ が群であるとする. このとき, $\dim \mathrm{Ker}(dF)_g = k$（$\forall g \in G$）ならば, G は k-次元リー群の構造を持つ.

線型写像の次元公式より, $\mathrm{rank}(JF)_g = n^2 - \dim \mathrm{Ker}(dF)_g = n^2 - k$. よって陰関数定理を用いることができて, G は k 次元多様体である. 積と逆元の C^∞-性は, それらが成分の多項式や有理式で表せることから従う.

また, 以下のような説明もできる. $p \in G$ に対して,

$$T_pG := \{\dot{c}(0) \mid c : I \to M_n(\mathbb{R}) : C^\infty,\ c(I) \subset G,\ c(0) = p\}$$

と定義する. このとき $T_pM = \mathrm{Ker}(dF)_g$. 定理の仮定から, $\dim T_pG$ が p に依らずに一定なので, G は多様体である.

注意 2.6 F の g における微分 $(dF)_g$ とは, 次で定義される線型写像:

$$(dF)_g(X) := \lim_{t \to 0}(1/t)(F(g + tX) - F(g)).$$

例 2.7 直交群 $\mathrm{O}(n)$ はリー群であり, $\dim \mathrm{O}(n) = n(n-1)/2$. さらに, 次が成立: $T_e\mathrm{O}(n) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tX + X = 0\}$.

これは実質的に $\mathrm{O}(n)$ のリー環を求めたことになっている.

問題 2.8 次を示せ: 特殊線型群 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ はリー群であり, $\dim \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = n^2 - 1$.

問題 2.9 次を示せ: 特殊線型群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ はリー群であり, $\dim \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = 2n^2$.

いずれの場合も, $F(g) = 0$ が群の定義式になるような F を探して行う. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ の場合には容易に想像が付くだろう. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の場合のヒント: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$. 特に $n = 1$ の場合に考えてみると良い.

2.2 リー環

リー環とは, 所定の性質を満たす双線型な積を持つベクトル空間である.

定義 2.10 $\mathfrak{g}$ を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とし, $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を双線型写像とする. このとき $(\mathfrak{g}, [,])$ が **リー環**（**Lie algebra**）とは, 次を満たすこと:
(1) $[X, Y] = -[Y, X]$.
(2) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

用語. リー環は **リー代数** とも呼ばれる（英語および意味を考えると, そちらが自然）. リー環 $(\mathfrak{g}, [,])$ に対し, 代数構造 $[,]$ を **括弧積** または **ブラケット積**（**bracket product**）と呼ぶ. 定義に登場する条件 (ii) を **ヤコビ律**（**Jacobi identity**）と呼ぶ.

例 2.11 任意のベクトル空間は, $[X, Y] := 0$ によってリー環の構造を持つ（このようなものを **可換リー環**（**abelian Lie algebra**）と呼ぶ）.

例 2.12 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) := M_n(\mathbb{R})$ は, $[X, Y] := XY - YX$ によってリー環の構造を持つ.

前節で, 群の例として古典群を挙げたが, それらに対応するリー環が存在する.

定義 2.13 次は, $[X, Y] := XY - YX$ によってリー環の構造を持つ:
- $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) := M_n(\mathbb{R})$ を **一般線型リー環**（**general linear Lie algebra**）,
- $\mathfrak{o}(n) := \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid X + {}^tX = 0\}$ を **直交リー環**（**orthogonal Lie algebra**）,
- $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) := \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$ を **特殊線型リー環**(**special linear Lie algebra**).

古典群の中には, 特殊直交群 $\mathrm{SO}(n) := \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ があった. リー環でも対応する特殊直交リー環 $\mathfrak{so}(n) := \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{o}(n)$ を考えても良いが, $\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n)$ であるので, 通常省略される（しかしこれは $\mathrm{O}(n)$ と $\mathrm{SO}(n)$ に強い関係があることを示唆し, 興味深い）.

定義 2.14 次も $[X, Y] := XY - YX$ によってリー環の構造を持つ:
- $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) := M_n(\mathbb{C})$ を **複素一般線型リー環**,
- $\mathfrak{u}(n) := \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid X + {}^t\overline{X} = 0\}$ を **ユニタリリー環**（**unitary Lie algebra**）,

- $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) := \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$ を **複素特殊線型リー環**,
- $\mathfrak{su}(n) := \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \cap \mathfrak{u}(n)$ を **特殊ユニタリリー環** と呼ぶ.

定義 2.15 次に, 行列のブラケット積を入れたものを **3 次元 Heisenberg リー環**:

$$\mathfrak{h} := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

直交群やユニタリ群は, 内積という幾何構造と関係があった. 直交リー環やユニタリリー環についても, 対応する命題が成り立つ.

命題 2.16 $\mathbb{R}^n$ 上の自然な内積と $\mathbb{C}^n$ 上の自然な（エルミート）内積を共に $\langle , \rangle$ で表すと,

(1) $\mathfrak{o}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid \forall v, w \in \mathbb{R}^n,\ \langle Xv, w\rangle + \langle v, Xw\rangle = 0\}$.

(2) $\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid \forall v, w \in \mathbb{C}^n,\ \langle Xv, w\rangle + \langle v, Xw\rangle = 0\}$.

2.3 リー群のリー環

リー群上の左不変ベクトル場の全体の成すベクトル空間を考え, そこにベクトル場のブラケット積を導入することにより, リー環が作られる.

定義 2.17 リー群 G および $a \in G$ に対して, 次で定義されるなめらかな写像を **左移動** と呼ぶ: $L_a : G \to G : g \mapsto ag$.

多様体から多様体への写像の微分の定義を思い出すと, L_a の微分 $(dL_a)g : T_gG \to T_{ag}G$ は次で定義される:

$$(dL_a)g(v) : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : \varphi \mapsto v(\varphi \circ L_a).$$

さらに, $TG := \cup_{g\in G} T_gG$（G の接束と呼ぶ）とすると, 自然に $dL_a : TG \to TG$ が定義される.

定義 2.18 ベクトル場 $X : G \to TG$ が **左不変** とは, 次の図式が可換となること:

$$\begin{array}{ccc} G & \overset{L_a}{\to} & G \\ \downarrow X & \circlearrowleft & \downarrow X \\ TG & \overset{dL_a}{\to} & TG \end{array}$$

最も簡単な例である加法群 $\mathbb{R}^n$ で見てみる:

例 2.19 $\mathbb{R}^n$ のベクトル場 $X := \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ が左不変であるための必要十分条件は, 各 f_i が定数関数となること.

ちなみに, $\mathbb{R}^n$ の左移動の微分は次を満たす: $(dL_a)_g(\frac{\partial}{\partial x_i})_g = (\frac{\partial}{\partial x_i})_{a+g}$.

定義 2.20 リー群 G に対し, 左不変ベクトル場の全体の成す集合 $\mathfrak{g}$ にベクトル場のブラケット積を入れたものを, **リー群 G のリー環** と呼ぶ.

左不変ベクトル場 X, Y に対して, $[X, Y]$ も左不変であることは, 確かめる必要がある.

例 2.21 $G = \mathbb{R}^n$ のとき, $\mathfrak{g} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ であり, これは n 次元可換リー環.

命題 2.22 次は線型同型写像: $\alpha : \mathfrak{g} \to T_eG : X \to X_e$.

このことから, リー環 $\mathfrak{g}$ と T_eG を同一視することも多い. 我々は, 時と場合によって適当に使い分けることにする.

2.4 線型リー群のリー環

リー群のリー環は, 左不変ベクトル場の全体として定義されていた. そのままの形でリー環の構造を調べることは困難であるが, 線型リー群の場合には, 行列表示を用いて, 分かりやすいリー環と同型対応を作ることができる.

定義 2.23 $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ をリー環とする. 線型写像 $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ が **準同型写像** であるとは, 次が成り立つこと: $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$, $\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)]$. また, 全単射である準同型写像を **同型写像** と呼ぶ.

命題 2.24 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ のリー環 $\mathfrak{g}$ は, $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ とリー環として同型.

$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ は, $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ の開集合であるので, T_eG は自然に $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ と同一視できる. 一方で, G の左不変ベクトル場の成すリー環 $\mathfrak{g}$ は, T_eG と同一視することができた. 以上により, 次の線型同型が得られる:

$$\mathfrak{g} \cong T_eG = M_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}).$$

この線型同型は, 次のように書くことができる: $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) : X \mapsto (X_e x_{ij})_{ij}$. ここで, $x_{ij} : G \to \mathbb{R}$ は, 行列の (i, j)-成分を対応させる写像（G の局所座標でもある）. この φ がリー環のブラケット積を保つことを示せば良い（$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ には $[X, Y] = XY - YX$ によってブラケット積が定義されている）.

定義 2.25 リー群 G に対し, $G \supset H$ が **リー部分群** とは, 次が成り立つこと:

(1) $G \supset H$ は部分群.

(2) $G \supset H$ は部分多様体.

(3) 上の (1), (2) によって H はリー群となる.

注意. ここで部分多様体とは, 包含写像 $i : H \to G$ が埋め込みであること, すなわち, i およびその微分が単射であること.

定理 2.26 $i : H \to G$ がリー部分群のとき, $di : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ は単射準同型.

この場合, $\mathfrak{h}$ と $di(\mathfrak{h})$ はリー環として同型である. 両者を同一視すれば, $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の部分環となる. この定理を用いると, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ のリー部分群に対し, そのリー環は $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ の部分環として（すなわち, 行列を使って）表すことができる.

命題 2.27 $\mathrm{O}(n)$ のリー環は $\mathfrak{o}(n)$ と同型.

定理 2.26 より, $\mathrm{O}(n)$ の接空間を求めれば良い. $\mathrm{O}(n)$ の接空間は 2.7 で既に求めてあるので, 上の証明は容易.

問題 2.28 命題 2.27 と同様にして次を示せ:
(1) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ のリー環は $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ と同型.
(2) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ のリー環は $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ と同型.
(3) $\mathrm{U}(n)$ のリー環は $\mathfrak{u}(n)$ と同型.

2.5 指数写像

リー群の指数写像とは, リー環からリー群への写像である. 線型リー群の場合には, リー群の指数写像と行列の指数写像は一致する. 以下, G をリー群, $\mathfrak{g}$ をそのリー環とする.

補題 2.29 $X_e \in T_e G$ に対して, $\exists^1 c_X : \mathbb{R} \to G$: 準同型 s.t. $\dot{c}_X(0) = X_e$.

この c_X またはその像を 1 **変数部分群** と呼ぶ.

定義 2.30 G をリー群, $\mathfrak{g}$ をそのリー環とする. リー群の **指数写像** を次で定義する: $\exp : \mathfrak{g} \to G : X \mapsto c_X(1)$.

指数写像が C^∞-写像であることは, 多少証明を要する. しかし, $0 \in \mathfrak{g}$ における微分は容易に計算できる: $d\exp_0 : \mathfrak{g} \to T_e G : X \mapsto X_e$. 逆関数定理より, 次が従う:

命題 2.31 指数写像 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ は, $0 \in \mathfrak{g}$ の近傍から $e \in G$ の近傍への局所微分同相.

一般のリー群に対して, その指数写像を具体的に記述することは困難. しかし, 線型リー群（行列群）の場合には, リー群の指数写像は行列の指数写像と一致する.

定義 2.32 次で定義される写像 $\exp : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ を, 行列の **指数写像** と呼ぶ:

$$\exp(A) := e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

補題 2.33 行列の指数写像について, 以下が成り立つ:
(1) $Be^AB^{-1} = e^{BAB^{-1}}$,　(2) $\det e^A = e^{\mathrm{tr} A}$,　(3) $e^{A+B} = e^Ae^B$ if $AB = BA$.

命題 2.34 行列の指数写像 $\exp : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ は, リー群の指数写像と一致する.

この命題の証明は簡単: $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ に対し, $c_X(t) := \sum (tX)^k/k!$ は $\dot{c_X}(0) = X$ を満たす準同型写像であるから. ちなみに, 通常の 1 変数の指数関数 exp は, 可換リー環 $\mathbb{R}$ からリー群 $\mathbb{R}_{>0}$ への指数写像である.

例 2.35 $X \in \mathfrak{o}(2)$ に対して, $e^X \in \mathrm{SO}(2)$.

行列の指数写像を用いて, 線型リー群のリー環を求めることができる.

命題 2.36 リー部分群 $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ に対して, $\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid \forall t \in \mathbb{R},\ e^{tX} \in G\}$.

これを用いて, 命題 2.27 の別証明が与えられる.

命題 2.37 $\mathrm{O}(n)$ のリー環は $\mathfrak{o}(n)$ と同型.

問題 2.38 命題 2.37 と同様に, 指数写像を用いて次を示せ:
(1) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ のリー環は $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ と同型.
(2) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ のリー環は $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ と同型.
(3) $\mathrm{U}(n)$ のリー環は $\mathfrak{u}(n)$ と同型.

問題 2.39 3 次元 Heisenberg リー群 H に対し, そのリー環 $\mathfrak{h}$ が次になることを示せ:

$$H := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathfrak{h} := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

ヒント: リー群とリー環の次元は一致することを用いて良い.

第 3 章

等質多様体

群作用の章では, 群 G が集合 M に推移的に作用するならば, 商空間 G/G_p と M は集合として一致することを調べた. 本章では, リー群が多様体に作用している場合を考えるが, このとき G/G_p と M は多様体として同型となる. 本章の内容は次の通り:

- リー群 G が多様体 M になめらかに作用しているとき, G_p は閉部分群.
- G をリー群, H を閉部分群としたとき, G/H には良い多様体構造が入る.
- $\dim G/H = \dim G - \dim H$.
- 等質多様体 $M = G/H$ に対して, イソトロピー表現 $H \curvearrowright T_pM$ が定義できる.
- イソトロピー表現は, リー環の reductive 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ を用いて記述できる.

イソトロピー表現には, 等質多様体の様々な性質が反映する. より詳しい内容は, [KO, 第 6 章], [W, Chapter 3] などを参照.

3.1 なめらかな作用

リー群の多様体へのなめらかな作用を定義する.

定義 3.1 リー群 G の多様体 M への作用が <u>**なめらか**</u> または <u>C^∞**-級**</u> であるとは, 写像 $G \times M \to M : (g, p) \mapsto g.p$ が C^∞-写像であること.

行列群の作用が, 成分の多項式や有理式で書けていれば, なめらかである.

例 3.2 次はなめらかな作用:

(1) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の $\mathbb{R}^n$ への自然な作用,

(2) $\mathrm{O}(n+1)$ および $\mathrm{SO}(n+1)$ の S^n への作用.

同様にして多くの線型群のなめらかな作用が考えられる．そのようなものの他に，リー群の定義から定まるなめらかな作用がある．

例 3.3 G をリー群とし $a \in G$ とする．次で与えられる G の作用は，なめらか:

(1) $L_a : G \to G : g \mapsto ag$ （これを **左作用** と呼ぶ）．

(2) $I_a : G \to G : g \mapsto aga^{-1}$ （この I_a を **内部自己同型** と呼ぶ）．

(3) $\mathrm{Ad}_a : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} : X \mapsto (dI_a)_e(X)$ （これを **随伴表現** と呼ぶ）．

ここで，G のリー環 $\mathfrak{g}$ と T_eG を同一視している．特に I や Ad による作用の軌道は，非常に興味深い等質空間の例を供給する．

なめらかな作用に対して，$\varphi : G \to M : g \mapsto g.p$ もなめらかな写像である（特に，連続でもある）．$\{p\}$ が閉集合であることから，次が示される:

命題 3.4 リー群 G が多様体 M になめらかに作用するとき，任意の $p \in M$ に対して，固定部分群 $G_p := \{g \in G \mid g.p = p\}$ は G の閉部分群.

3.2　商空間の多様体構造

なめらかな作用の軌道 G/G_p に対して，多様体構造を定義する．そのためには，リー群 G とその閉部分群 H に対し，商集合 G/H 上に多様体構造を定義すれば良い．H が閉であることは重要:

補題 3.5 G をリー群，H をその部分群とし，$\pi : G \to G/H$ を自然な射影とする．π による G/H の商位相がハウスドルフならば，H は G の閉集合.

群 G は等質空間 G/H に自然に作用していた: $a \in G$ に対して，$a.[g] := [ag]$.

定理 3.6 リー群 G とその閉部分群 H に対し，G/H 上には次を満たす多様体構造が一意に存在する: 自然な作用 $G \curvearrowright G/H$ はなめらか.

証明のためには，G/H の多様体構造を構成する必要がある．構成は，リー群の指数写像 exp を用いて，以下の手順で行われる:

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$（ベクトル空間の直和）となるような $\mathfrak{p}$ を選ぶ.
- $\pi \circ \exp : \mathfrak{p} \to G/H$ は，$0 \in \mathfrak{p}$ の近傍 U から $[e] \in G/H$ の近傍 N への局所同型. よって，$(N, (\pi \circ \exp)^{-1})$ は $[e]$ の周りの局所座標.
- 上の局所座標を G の作用で動かす: $\{(gN, (\pi \circ \exp)^{-1} \circ g^{-1})\}_{g \in G}$ は，G/H の局所座標系.

定理 3.7 リー群 G が多様体 M になめらかかつ推移的に作用しているとする．このとき $\varphi : G/G_p \to M : [g] \mapsto g.p$ は, G/G_p 上の自然な多様体構造に関して C^∞.

これによって, M の多様体としての情報は, G と G_p によって（原理的には）完全に決定されることになる．

例 3.8 $S^2 = \mathrm{O}(3)/\mathrm{O}(2)$ に対して, 次で定義される ψ は $p := (1,0,0)$ の近傍での局所座標を与える: $\psi(a,b) := (\cos a \cos b, \sin a \cos b, \sin b)$.

等質空間の多様体構造の決め方から, 次が直ちに従う:

系 3.9 $\dim G/H = \dim G - \dim H$.

これを使って, 様々なリー群および多様体の次元を計算することが出来る．

例 3.10 $S^n = \mathrm{O}(n+1)/\mathrm{O}(n)$ より $\dim \mathrm{O}(n+1) = \dim \mathrm{O}(n) + n$. この漸化式を解くことによって次を得る: $\dim \mathrm{O}(n) = n(n-1)/2$.

もちろん $\dim \mathrm{O}(n) = \dim \mathfrak{o}(n)$ を用いて計算しても良い．

例 3.11 グラスマン多様体は $G_k(\mathbb{R}^n) = \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k)$ と表せることから, 次を得る: $\dim G_k(\mathbb{R}^n) = \dim \mathrm{O}(n) - (\dim \mathrm{O}(k) + \dim \mathrm{O}(n-k)) = k(n-k)$.

同様にして他の等質空間の次元も計算できる．

問題 3.12 旗多様体 $G_{1,2,\ldots,n-1}(\mathbb{R}^n)$ の次元を求めよ．

3.3 イソトロピー表現

$M = G/G_p$ を等質空間とすると, イソトロピー表現という G_p の T_pM への作用が定まる．イソトロピー表現は, リー環を使って記述できる．

定義 3.13 作用 $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(M)$ がなめらかであるとする．$p \in M$ に対して, 次で与えられる G_p の T_pM への作用を **イソトロピー表現**（**isotropy representation**）と呼ぶ: $(d\varphi) : G_p \to \mathrm{GL}(T_pM) : a \mapsto (d\varphi_a)_p$.

イソトロピー表現そのものは, 等質空間でなくても定義できる．特に等質空間の場合には, 固定部分群は共役であった（問題 1.23）．さらに, 次を満たす:

問題 3.14 作用 $G \curvearrowright M$ が推移的ならば, イソトロピー表現は p の取り方に依存しない（すなわち, p と q でのイソトロピー表現は同値である）ことを示せ．

ただしここで,

定義 3.15 2つの表現 $\alpha : G_1 \to \mathrm{GL}(V)$ および $\beta : G_2 \to \mathrm{GL}(W)$ が **同値**（**equivalent**）とは, 次を満たすこと: $\exists \varphi : G_1 \to G_2$: 群同型, $\exists F : V \to W$: 線型同型 s.t. 次の図式が可換:

$$\begin{array}{ccc} V & \stackrel{\alpha_g}{\to} & V \\ \downarrow F & \circlearrowright & \downarrow F \\ W & \stackrel{\beta_{\varphi(g)}}{\to} & W \end{array}$$

イソトロピー表現の定義に従って計算することにより, 次を得る:

例 3.16 $\mathrm{O}(3) \curvearrowright S^2$ のイソトロピー表現は, 自然な表現 $\mathrm{O}(2) \curvearrowright \mathbb{R}^2$ と同値.

一般に, イソトロピー表現を定義に従って決定するのは難しい. イソトロピー表現は, 例 3.3 で述べた随伴表現 $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ を用いて調べることができる. 随伴表現の制限を $\mathrm{Ad}|_H : H \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ と書く.

定義 3.17 等質多様体 G/H が **reductive** とは, 次が成り立つこと: $\exists \mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$: $(\mathrm{Ad}|_H)$-不変部分空間 s.t. $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$. また, この分解を **reductive 分解** と呼ぶ.

このような分解は存在するとは限らないが, 存在する場合には, イソトロピー表現が分かる.

定理 3.18 等質多様体 G/H が reductive 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ を持つとする. このとき, イソトロピー表現は $\mathrm{Ad}|_H : H \to \mathrm{GL}(\mathfrak{p})$ と同値.

これを用いてイソトロピー表現を求めることができる:

例 3.19 $\mathrm{O}(n+1) \curvearrowright S^n$ のイソトロピー表現は, 自然な表現 $\mathrm{O}(n) \curvearrowright \mathbb{R}^n$ と同値.

問題 3.20 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \curvearrowright H^2$ のイソトロピー表現は, 次で与えられる表現と同値であることを示せ: 自然な表現 $\mathrm{SO}(2) \curvearrowright \mathbb{R}^2$.

ちなみに $S^2 = \mathrm{SO}(3)/\mathrm{SO}(2)$ のイソトロピー表現も, 自然な表現 $\mathrm{SO}(2) \curvearrowright \mathbb{R}^2$ と同値である. このことから, イソトロピー表現だけでは多様体は決まらないことが分かる. しかし, S^2 と H^2 の間に深い関係があることも示唆する.

問題 3.21 $\mathrm{O}(n) \curvearrowright G_k(\mathbb{R}^n)$ のイソトロピー表現は, 次で与えられる表現と同値であることを示せ: $\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k) \curvearrowright M_{n-k,k}(\mathbb{R})$, ここで $(a,b).X := bX^t a$.

ここで $M_{n-k,k}(\mathbb{R})$ は $(k, n-k)$-行列の全体. これが $\mathfrak{p} = T_p G_k(\mathbb{R}^n)$ と線型同型であることからも, $\dim G_k(\mathbb{R}^n) = k(n-k)$ が分かる.

第 4 章

等質部分多様体

リー群の多様体へのなめらかな作用 $G \curvearrowright M$ を考える．このとき, $p \in M$ を通る軌道 $G.p$ は M の部分多様体になる（このような部分多様体を等質部分多様体と呼ぶ）．この方法によって, 多くの興味深い部分多様体の例が構成される．本節では, ユークリッド空間内の等質部分多様体と, 球面内の等質部分多様体の例を詳しく調べることを目的とする．具体的には,

- $\mathbb{R}^3$ 内の等質曲面
- 球面内の等質超曲面の簡単な例
- $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$ のイソトロピー表現の軌道

一般に, これ以外の例を調べようと思った場合には, 例えばリー環や対称空間のルート系の理論は非常に有用である．

4.1 定義と例

等質部分多様体の定義と例を紹介する．要するに, なめらかな作用の軌道を考える．

定義 4.1 $G \curvearrowright N$ をなめらかな作用とする． N の部分多様体 M が（G に関する）**等質部分多様体** とは, 次を満たすこと: $G \supset G'$: リー部分群 s.t. M は G'-軌道.

等質部分多様体を考えることと, なめらかな作用の軌道を考えることは同値である: なめらかな作用 $G' \curvearrowright N$ に対して, 各点 $p \in N$ を通る軌道 $M := G'.p$ は N の部分多様体. ここで軌道とは, $G'.p := \{g.p \in N \mid g \in G'\}$ であった.

命題 4.2 等質部分多様体は, 自動的に等質多様体: $M = G'/G'_p$.

逆に, 等質多様体 $M = G/H$ が先に与えられているとする. このとき, 「M を別の多様体 N に, 等質部分多様体となるように埋め込め」という問題が自然に考えられる. このような埋め込みを **G-同変埋め込み** と呼ぶ. 同変の意味は, 次の通り:

定義 4.3 $\alpha : G \curvearrowright M, \beta : G \curvearrowright N$ をなめらかな作用とする. なめらかな写像 $f : M \to N$ が **G-同変写像** であるとは, 次を満たすこと: $\forall g \in G$, 次が可換:

$$\begin{array}{ccc} M & \stackrel{\alpha_g}{\to} & M \\ \downarrow f & \circlearrowright & \downarrow f \\ N & \stackrel{\beta_g}{\to} & N \end{array}$$

例 4.4 球面 $S^n = \mathrm{O}(n+1)/\mathrm{O}(n)$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ への $\mathrm{O}(n+1)$-同変埋め込みを持つ.

例えば $e_1 \in S^n$ を選べば, $S^n = \mathrm{O}(n+1).e_1 \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. 一般に, 「与えられた等質多様体に対して, 同変埋め込みを構成せよ」という問題は, 難しい. ここでは, なめらかな G-作用を持つ多様体 N に対して, 「G-作用に関する等質部分多様体を見付ける」という問題を考えよう.

例 4.5 $G := \mathrm{O}(3) \ltimes \mathbb{R}^3$ の $\mathbb{R}^3$ への作用を, 次で与える: $(a, v) \in G$ および $w \in \mathbb{R}^3$ に対し, $(a, v).w := aw + v$. このとき次は, G の作用に関する $\mathbb{R}^3$ の等質部分多様体:

(1) 球面 $S^2(r) := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$.

(2) 円柱 $S^1(r) \times \mathbb{R} := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = r^2\}$.

(3) 平面 $\mathbb{R}^2 := \{(x, y, 0)\}$.

証明. (1) $G_1 := \mathrm{O}(3)$, $v := (r, 0, 0)$ とすれば良い.
(2) $G_2 := \mathrm{O}(2) \ltimes \{(0, 0, z)\}$, $v := (r, 0, 0)$ とすれば良い.
(3) $G_3 := \{(x, y, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$, $v := (0, 0, 0)$ とすれば良い. □

G は集合としては $\mathrm{O}(3)$ と $\mathbb{R}^3$ の直積集合だが, 群としての積ではない. 積は $(a, v) \cdot (b, u) = (ab, au + v)$ で与えられる（$\mathbb{R}^3$ への作用が, 作用の条件を満たすためには, 積がこの形をしていなくてはならない）. ちなみに G は, $\mathbb{R}^3$ の標準的な計量に関する等長変換群である. これらの等質部分多様体はいずれも 2 次元である（よって, 等質曲面と呼ぶ）. $\mathbb{R}^3$ の等質曲面は, 共役を除いて, 上記の 3 つに限ることが知られている.

問題 4.6 証明に登場する G_1, G_2, G_3 が群であることを確かめよ.

一般的に, $G \curvearrowright N$ をなめらかな作用とする. このとき, G の全ての部分群 G' に対して, G' の軌道は等質部分多様体である. このようにして, 数多くの等質部分多様体が得られる. 次章以降で, 具体例を調べる.

4.2 球面内の等質超曲面

球面 S^n 内の, $\mathrm{O}(n+1)$ の作用に関して等質な超曲面（余次元 1 の部分多様体）の具体例をいくつか調べる. これらは等径超曲面と呼ばれるものになっている.

例 4.7 次の群 G の S^n への作用の軌道は $S^{n-1}(r)$ $(r \geq 0)$:

$$G := \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & \alpha \end{array} \right) \mid \alpha \in \mathrm{O}(n) \right\} \cong \mathrm{O}(n).$$

この作用の軌道は, $r > 0$ の場合に余次元 1 になる. 次元が落ちる軌道は $r = 0$ に対応する軌道で, それらは 0 次元である（北極と南極に対応）.

例 4.8 次の群 G の S^n への作用の軌道は $S^{k-1}(r_1) \times S^{n-k-1}(r_2)$ $(r_1^2 + r_2^2 = 1)$:

$$G := \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \alpha & \\ \hline & \beta \end{array} \right) \mid \alpha \in \mathrm{O}(k),\ \beta \in \mathrm{O}(n-k) \right\} \cong \mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k).$$

この作用の軌道は, $r_1 > 0$ かつ $r_2 > 0$ の場合には余次元 1. $r_1 = 0$ の場合の軌道は $S^{n-k-1}(1)$, $r_2 = 0$ の場合の軌道は $S^{k-1}(1)$ となる. ちなみにこの作用は, 等質空間 $S^k \times S^{n-k} = (\mathrm{O}(k+1) \times \mathrm{O}(n-k))/(\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k-1))$ のイソトロピー表現である.

これら以外にも球面内の等質超曲面の例は多く存在する（分類も知られている）. 分類結果によると, それらは全てある種の等質空間（階数 2 対称空間）のイソトロピー表現から来る.

4.3 イソトロピー軌道

等質空間 $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$ のイソトロピー表現の軌道を決定する. この等質空間は対称空間と呼ばれるものになっており, そのイソトロピー表現（s-表現と呼ばれる）およびその軌道は, 特に良い性質を持っている.

命題 4.9 等質空間 $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$ に対して,

(1) 次の分解によって reductive: $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) = \mathfrak{o}(3) \oplus \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} := \{X \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) \mid {}^tX = X\}$.

(2) イソトロピー表現は次で与えられる: $a.X := aXa^{-1}$ $(a \in \mathrm{SO}(3),\ X \in \mathfrak{p})$.

簡単のために $\mathrm{O}(3)$ の $\mathfrak{p}$ への作用を考える. この作用は $\mathfrak{p}$ の自然な内積 $\langle X, Y \rangle := \mathrm{tr}({}^tXY)$ を保つので, $\mathfrak{p}$ の単位球面 S^4 にも作用している.

補題 4.10 $\mathfrak{p}$ 内の全ての軌道は次の $\mathfrak{a}$ と交わる:

$$\mathfrak{a} := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

対称行列は直交行列で対角化できることを用いた. 実は次も言える:

補題 4.11 $\mathfrak{p}$ 内の全ての軌道は次の $\mathfrak{a}'$ と交わる:

$$\mathfrak{a}' := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \mid \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \right\}.$$

よって, $X \in \mathfrak{a}'$ を通る軌道（すなわち X を固定する部分群）を求めれば十分. まずは固定部分群のリー環を求める.

補題 4.12 $X \in \mathfrak{p}$ とする. $\mathrm{O}(3)$ の X での固定部分群のリー環 $\mathfrak{h}_X$ は次で与えられる: $\mathfrak{h}_X = \{Y \in \mathfrak{o}(3) \mid [Y, X] = 0\}$.

これを用いてリー環の bracket 積を計算すると, 次が得られる:

補題 4.13 $X \in \mathfrak{a}'$ に対して,

(1) $\lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3$ のとき, $\mathfrak{h}_X \cong \mathfrak{o}(2)$.

(2) $\lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3$ のとき, $\mathfrak{h}_X \cong \mathfrak{o}(2)$.

(3) $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ のとき, $\mathfrak{h}_X = 0$.

これを参考にして固定部分群を直接計算で求めることにより, 次を得る:

定理 4.14 $X \in \mathfrak{a}'$ に対して,

(1) $\lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3$ のとき, $H.X = \mathrm{O}(3)/\mathrm{O}(2) \times \mathrm{O}(1)$.

(2) $\lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3$ のとき, $H.X = \mathrm{O}(3)/\mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(2)$.

(3) $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ のとき, $H.X = \mathrm{O}(3)/\mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(1)$.

(1) および (2) のとき, 軌道は $G_1(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ であり, それが S^4 の等質部分多様体として実現できたことになる. これは **Veronese surface** と呼ばれている.

問題 4.15 同様の方法により, グラスマン多様体 $G_2(\mathbb{R}^5)$ のイソトロピー表現の軌道を全て決定せよ.

ここで調べた方法は, 実は非常に汎用性の高い方法で, 実はもっと一般の場合にも通用する. 一般の場合には, $\mathfrak{a}$ が極大可換部分空間（極大トーラス）, $\mathfrak{a}'$ がワイル領域に相当する. 固定部分群のリー環 $\mathfrak{h}_X$ は, ルート系の言葉で完全に記述することができる.

第 5 章

リーマン等質空間

等質空間上のリーマン計量, および, そこから定まる曲率などのリーマン幾何的なデータを扱う．本章で定義するリーマン等質空間の場合には, 曲率は全てリー環を用いて求めることが（原理的には）できる．本章の内容は次の通り:

- 等質空間上の不変リーマン計量の定義.
- リー群の左不変計量の場合の曲率.
- 負の定曲率の表示, 双曲平面および双曲空間.

関連する内容に関しては例えば [A], [B] を参照.

5.1 リーマン計量

ここでは以下の過激な定義を採用する:

定義 5.1 $M = G/H$ を reductive な等質空間, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ を reductive な分解とする．このとき $\mathfrak{p}$ 上の Ad_H-不変内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を M 上の **G-不変リーマン計量** と呼ぶ．また等質空間 G/H と G-不変リーマン計量の組 $G/H, \langle\ ,\ \rangle$ を **リーマン等質空間** と呼ぶ.

$\mathfrak{p}$ は自然に T_oM と同一視されたので, この定義の G-不変リーマン計量は T_oM の内積である．この内積は, 通常の意味のリーマン計量を定める:

命題 5.2 $\langle\ ,\ \rangle$ を M 上の G-不変リーマン計量とする．このとき, 各 $p \in M$ に対して, 次を満たす T_pM の内積 g_p が存在する: $\forall a \in G,\ g_{a.o}(X,Y) = \langle (da)_p(X), (da)_p(Y) \rangle$.

命題の条件式によって g_p を定義したときに, それが well-defined であることを示せば良い（すなわち, $a.o = b.o$ ならば $\langle (da)_p(X), (da)_p(Y) \rangle = \langle (db)_p(X), (db)_p(Y) \rangle$）．内積が Ad_H-不変であることから, well-defined であることは従う.

命題 5.3 $M = G/H$ を reductive 等質空間とする．このとき M 上に G-不変リーマン計量が存在するための必要十分条件は, Ad_H がコンパクトであること．

Ad_H の $\mathfrak{p}$ への作用をイソトロピー表現と言った．イソトロピー表現によって, G/H の幾何学的性質が分かる場合がある．例えば次は Shur の補題からの帰結:

命題 5.4 $M = G/H$ を reductive 等質空間, Ad_H はコンパクトとする．このとき, イソトロピー表現 $\mathrm{Ad}_H \curvearrowright \mathfrak{p}$ が既約ならば, G-不変リーマン計量がスカラー倍を除いて一意に存在する．

$\mathfrak{X}(M)$ を M 上のベクトル場全体とする．リーマン多様体 (M, g) に対して以下が定義される:

定義 5.5 次で定義される双線型写像 $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ を **Levi-Civita 接続** と呼ぶ:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) = {} & Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\ & + g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) + g(X,[Z,Y]). \end{aligned}$$

この接続を用いて, リーマン曲率などが定義される．

5.2　リー群の左不変計量

本節では, 等質空間 $G/\{e\}$ を考える．このような等質空間（明らかに G そのものと微分同相）は, 常に reductive 分解 $\mathfrak{g} = \{0\} \oplus \mathfrak{g}$ を持つ．

定義 5.6 $\mathfrak{g}$ 上の内積を, リー群 G 上の **左不変計量** と呼ぶ．

リー群上の左不変計量に関する, リーマン幾何的な諸概念を定義する．

定義 5.7 次で定義される双線型写像 $\nabla : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を **Levi-Civita 接続** と呼ぶ:

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \langle [X,Y], Z \rangle + \langle [Z,X], Y \rangle + \langle X, [Z,Y] \rangle.$$

これはリーマン多様体上の Levi-Civita 接続に, 左不変ベクトル場を代入したものである．計算上, 次で定義される双線型写像 $U : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を用いると便利:

$$2\langle U(X,Y), Z \rangle = \langle [Z,X], Y \rangle + \langle X, [Z,Y] \rangle.$$

定義より U は対称である．また Levi-Civita 接続は $\nabla_X Y = (1/2)[X,Y] + U(X,Y)$ と表される．

定義 5.8 $R(X,Y)Z := -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z$ を **リーマン曲率** と呼ぶ.

定義 5.9 $\mathrm{Ric}(X,Y) := \sum \langle R(X,E_i)Y, E_i \rangle$ を **Ricci 曲率** と呼ぶ. ただしここで $\{E_i\}$ は $\mathfrak{g}$ の正規直交基底.

Ricci 曲率は正規直交基底の取り方に依らない.

定義 5.10 σ を $\mathfrak{g}$ の 2 次元部分空間, $\{X,Y\}$ を σ の正規直交基底とする. このとき $K_\sigma := \langle R(X,Y)X, Y \rangle$ を σ の **断面曲率** と呼ぶ.

断面曲率も σ の正規直交基底の取り方に依らない.

5.3 双曲平面

双曲平面（上半平面）$\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ はリー群と見なすことができる. その曲率を計算する.

命題 5.11 $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ には $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ が 1 次分数変換で推移的に作用していた. 次の部分群 G の作用も推移的であり, $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 = G/\{e\}$ となる:

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} e^x & y \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

このリー群 G のリー環は, 次で与えられる:

$$\mathfrak{g} := \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & -x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

リー環の基底 $\{A, X\}$ を次のように選ぶ:

$$A := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad X := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

このとき, bracket 積は $[A,X] = X$ を満たす. $\mathfrak{g}$ 上の内積として, $c > 0$ に対して, 次のものを選ぶ;

$$\langle A, A \rangle^{1/c} := 1/c^2, \quad \langle A, X \rangle^{1/c} := 0, \quad \langle X, X \rangle^{1/c} := 1.$$

補題 5.12 $\mathfrak{g}$ 上の新しい bracket 積を次で定義する: $[A,X]^c := cX$. このとき, $f : (\mathfrak{g}, [,], \langle,\rangle^{1/c}) \to (\mathfrak{g}, [,]^c, \langle,\rangle)$ を $f(A) = cA$, $f(X) = X$ によって定義すると, f は内積を保つリー環の同型写像.

一般に, リー環の内積の取替えは, bracket の取替えによって記述することができる. このような指針は, 最近良く用いられている.

補題 5.13 上のリー環 $(\mathfrak{g}, [,]^c, \langle,\rangle)$ に対して, 次が成立:

(1) $U(A,A) = 0,\ U(A,X) = -(c/2)X,\ U(X,X) = cA.$

(2) $\nabla_A A = 0,\ \nabla_A X = 0,\ \nabla_X A = -cX,\ \nabla_X X = cA.$

U は対称双線型であったので, 上のものだけ求めれば十分である.

補題 5.14 上のリー環 $(\mathfrak{g}, [,]^c, \langle,\rangle)$ に対して, 次が成立:

(1) $R(A,X)A = -c^2 X.$

(2) $R(A,X)X = c^2 A.$

リーマン曲率は定義より $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$ を満たすので, 上のものだけ求めれば十分である.

定理 5.15 上のリー環 $(\mathfrak{g}, [,]^c, \langle,\rangle)$ に対して, 次が成立:

(1) $\mathrm{Ric}(X,Y) = -c^2\langle X,Y\rangle.$

(2) $\sigma := \mathfrak{g}$ とすると, $K_\sigma = -c^2.$

(1) のように, Ricci 曲率が内積の定数倍となるものを **Einstein 多様体** と呼ぶ. (2) のように, 断面曲率が一定になるものを **定曲率空間** と呼ぶ（これは 2 次元なので当然ではあるが）.

5.4 双曲空間

双曲平面の高次元化を考える. 全てリー環で話をする.

定義 5.16 線型空間 $\mathfrak{g} := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{A, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ に対して, $\{A, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ が正規直交基底になるような内積を入れ, bracket 積を次で定義する: $[A, X_i] := cX_i$, $[X_i, X_j] := 0$. このとき $(\mathfrak{g}, [,], \langle,\rangle)$ を **実双曲空間** と呼ぶ.

本来の定義はこれとは異なるが, リーマン多様体としては同じであるので, 簡単のためにこれを定義として採用する.

補題 5.17 実双曲空間 $(\mathfrak{g}, [,], \langle,\rangle)$ に対して, 次が成立:

(1) $U(A,A) = 0,\ U(A,X_i) = -(c/2)X_i,\ U(X_i,X_j) = \delta_{ij}cA.$

(2) $\nabla_A A = 0,\ \nabla_A X_i = 0,\ \nabla_{X_i} A = -cX_i,\ \nabla_{X_i} X_j = \delta_{ij}cA.$

結果は双曲平面の場合と殆ど同じになっている.

補題 5.18 実双曲空間 $(\mathfrak{g}, [,], \langle,\rangle)$ に対して, 次が成立:

(1) $R(A,X_i)A = -c^2 X_i.$

(2) $R(A, X_i)X_j = \delta_{ij}c^2 A$.
(3) $R(X_i, X_j)A = 0$.
(4) $R(X_i, X_j)X_k = \delta_{jk}c^2 X_i - \delta_{ik}c^2 X_j$.

これらを用いると, 双曲平面の場合よりは多少複雑だが, 次が得られる:

定理 5.19 実双曲空間 $(\mathfrak{g}, [,], \langle,\rangle)$ に対して, 次が成立:
(1) $\mathrm{Ric}(X, Y) = -c^2(n-1)\langle X, Y\rangle$.
(2) 任意の σ に対して, $K_\sigma = -c^2$.

断面曲率は, 任意の 2 次元部分空間 σ に対して計算する必要がある. そのままでは計算が大変なので, 群作用を用いて σ を適当に動かす:

命題 5.20 $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ が内積を保つリー環の同型写像であるとする. このとき, 次が成立: $\nabla_X Y = \nabla_{f(X)} f(Y)$, $R(X, Y)Z = R(f(X), f(Y))f(Z)$.

すなわち $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{O}(\mathfrak{g}, \langle,\rangle)$ の作用で, 曲率は不変になっている. 実双曲空間の場合には, $\mathrm{O}(n-1)$ の作用で不変である.

問題 5.21 線型空間 $\mathfrak{g} := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{A, X, Y, X\}$ に対して, $\{A, X, Y, Z\}$ が正規直交基底になるような内積を入れ, bracket 積を次で定義する: $[A, X] := (1/2)X$, $[A, Y] := (1/2)Y$, $[A, Z] = Z$, $[X, Y] := Z$（その他の bracket は 0）. この Ricci 曲率, 断面曲率を求めよ.

この問いの空間を **複素双曲平面** と呼ぶ. 複素双曲空間に対して, X, Y, Z で張られる空間は部分リー環になっており, これは 3 次元 Heisenberg リー環である. これを高次元の Heisenberg リー環に取り替えたものが, 高次元の複素双曲空間になっている.

参考文献

[A] A. Arvanitoyeorgos, *An introduction to Lie groups and the geometry of homogeneous spaces.* Translated from the 1999 Greek original and revised by the author. Student Mathematical Library, 22. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. xvi+141 pp.

[BCO] J. Berndt, S. Console, C. Olmos, *Submanifolds and holonomy.* Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics 434, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2003, x+336 pp.

[B] A.L. Besse, *Einstein manifolds.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], 10. Springer-Verlag, Berlin, 1987. xii+510 pp.

[H] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Corrected reprint of the 1978 original. Graduate Studies in Mathematics, 34. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. xxvi+641 pp.

[KN1] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry. Vol. I.* Reprint of the 1963 original. Wiley Classics Library. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996. xii+329 pp.

[KN2] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry. Vol. II.* Reprint of the 1969 original. Wiley Classics Library. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996. xvi+468 pp.

[KO] 小林俊行, 大島利雄, **リー群と表現論**. 岩波書店, 2005.

[M] 松島与三, **多様体入門**. 裳華房, 1965.

[O1] 落合 卓四郎, **微分幾何入門 (上)**. 東京大学出版会, 1991.

[O2] 落合 卓四郎, **微分幾何入門 (下)**. 東京大学出版会, 1993.

[W] F. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups.* Corrected reprint of the 1971 edition. Graduate Texts in Mathematics, 94. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983. ix+272 pp.