

0 線型代数学 II 演習について

線型代数 II 演習の目的:

- 線型代数 II の講義の理解を助ける為に, 演習問題に取り組む.
- ベクトル空間や線型写像などの, 数学の基礎となる概念を身に付ける.

教科書および参考書:

- 教科書は「理工系の基礎線形代数学」(裕野敏博・加藤芳文 共著) を指定します.
- 演習の際には, 演習問題のプリントを配布します.
- 線型代数に関係する本は非常に数多くあるので, 適宜参照すると良いです.

単位および成績について:

- 成績は, 線型代数学 II と連動します (一致するとは限りません).
- 但し, 演習に「参加」することが, 演習の単位を取得する為の必要条件です.
- 単に出席しているだけでは, 参加したとは見なしません.

一般的な諸注意:

- 小テストなどの場合を除き, 学生同士の相談を歓迎します. 但し, 一方的に答えを教わることを, 相談とは呼びません.
- 演習中に何か質問・コメント等がありましたら, 遠慮無く言って下さい. 特にプリントや板書の間違いの指摘は, 担当教員だけでなく他の学生の助けにもなります.
- 質問やコメントや相談は, TA または担当教員まで. 担当教員を捕まえるには, e-mail を送るなり, 研究室に直接来るなりして下さい.
- 休講や試験やレポート等の情報は, 講義中および下記 web page で伝えます.

担当教員について:

- 担当教員: 田丸 博士 (たまる ひろし)
- 研究室: 理学部 C-613
- e-mail: tamaru @ math.sci.hiroshima-u.ac.jp
- <http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~tamaru/index-j.html>

1 復習: 行列の基本的性質

行列に対して基本的な量として, 階数 (rank), 行列式 (determinant) が挙げられる. また, これらの量を定義し, 計算する為に, 次のような概念が必要であった: 置換, 行列の基本変形, 掃き出し, 展開, など... まずはこれらの復習を行う.

問題 1.1

(1) 以下のあみだくじを完成させよ:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \\ | & | & | & | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | & | & | & | \\ 7 & 5 & 6 & 1 & 3 & 2 & 4 & \end{array}$$

(2) 次の置換を互換の積で表せ, また, 符号を求めよ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

問題 1.2

行列式の定義 (置換を用いて定義されているとする) に従って, 次を示せ:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

問題 1.3

c を定数とする. $|AB| = |A||B|$ を用いて (行列式の定義や展開を用いなくて), 次を示せ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ca_{21} & a_{12} + ca_{22} & a_{13} + ca_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

問題 1.4

A を $(3, 2)$ -行列とし, 写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: v \mapsto Av$ を考える.

(1) 次の A に対して, 写像 f が単射でないことを示せ:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) $a_{11}, a_{22} \neq 0$ とする. 次の A に対して, 写像 f が単射であることを示せ:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) $\text{rank}(A) = 2$ のとき, 写像 f が単射であることを示せ.

(4) $\text{rank}(A) = 1$ のとき, 写像 f が単射でないことを示せ.

2 線型空間

線型空間（ベクトル空間）とは、和とスカラー倍が定義された集合である。単に集合を扱うだけでなく、集合に「構造」を入れたものを考えることは、非常に重要である。ここで、線型空間の構造とは、和とスカラー倍のこと。このような、演算で定義される構造を、代数構造と呼ぶ。数学の各分野の違いは、どのような構造を考えるかの違いである、と言っても良い。

問題 2.1

$(2, 2)$ -行列全体の集合 $M_2(\mathbb{R})$ は、通常の行列の和とスカラー倍により、実線型空間となることを示せ。ここで、 \mathbb{R} が実線型空間であること（結合法則や分配法則等を満たすこと）は用いて良い。

問題 2.2

V を線型空間とする。

(1) V の零ベクトル \mathbf{o} は唯一つであることを示せ。ここで零ベクトルとは、次を満たす元のこと： $\forall a \in V, a + \mathbf{o} = a$ 。

(2) $a \in V$ に対し、逆ベクトル a' は唯一つであることを示せ。ここで逆ベクトルとは、次を満たす元のこと： $a + a' = \mathbf{o}$ 。

問題 2.3

$M_2(\mathbb{R})$ の和を、新たに積で定義する（すなわち、 $A + B := AB$ ）。このとき、

- (1) 零ベクトルが存在することを示せ。
- (2) 逆ベクトルが存在するとは限らないことを示せ。
- (3) 分配法則が成り立たないことを示せ。

問題 2.4

実数の数列全体の集合を S で表す。 S が線型空間となるように、和とスカラー倍を定めよ。また、零ベクトルと逆ベクトルが何かを予想し、それを示せ（線型空間であることの証明は不要）。

問題 2.5

線型空間 V , $a \in V$ およびスカラー c に対し、次を示せ:

- (1) $0a = \mathbf{o}$,
- (2) $c\mathbf{o} = \mathbf{o}$,
- (3) $(-1)a = -a$.

注意: 「定義に戻って考える」ことがポイントで、その訓練は非常に大事です。

3 線型部分空間

$M_n(\mathbb{R})$ を (n, n) -行列全体の成す集合とする. $M_n(\mathbb{R})$ は, 特に断らない限り, 行列の和とスカラー倍によって線型空間であるとみなす.

問題 3.1

行列 X の転置行列を tX で表す. 以下は $M_n(\mathbb{R})$ の部分空間であることを示せ:

(1) $\text{Sym}_n(\mathbb{R}) := \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tX = X\}$,

(2) $\text{Alt}_n(\mathbb{R}) := \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tX = -X\}$,

(3) $\text{sl}_n(\mathbb{R}) := \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(X) = 0\}$.

問題 3.2

数列全体の集合 S は自然に線型空間となる. 以下が S の部分空間かどうかを論ぜよ:

(1) 収束する数列の全体,

(2) $+\infty$ に発散する数列の全体.

問題 3.3

V を線型空間, W_1, W_2 を V の部分空間とする.

(1) $W_1 \cap W_2$ は V の部分空間になることを示せ.

(2) $W_1 \cup W_2$ は V の部分空間になるとは限らない. 部分空間にならない例を挙げよ.

問題 3.4

v_1, \dots, v_r で張られる部分空間を $\langle v_1, \dots, v_r \rangle$ で表す. 次を示せ:

(1) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

(2) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

(3) $\langle a_1 \rangle = \langle a_1, 2a_1 \rangle$,

(4) $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3 \rangle$.

問題 3.5

$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ とする (すなわち, A は (m, n) -行列).

(1) $\text{Ker}(A) := \{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = \mathbf{o}\}$ は \mathbb{R}^n の部分空間であることを示せ,

(2) $\text{Im}(A) := \{w \in \mathbb{R}^m \mid \exists v \in \mathbb{R}^n : w = Av\}$ は \mathbb{R}^m の部分空間であることを示せ.

4 1次独立と1次従属

問題 4.1

V をベクトル空間とし, $v_1, v_2 \in V$ とする. 次を定義に従って示せ:

- (1) $v_1, 2v_1$ は1次従属.
- (2) $v_1, v_2, v_1 + v_2$ は1次従属.
- (3) v_1, v_2 が1次独立であるとき, $v_1, v_1 + v_2$ も1次独立.

問題 4.2

複素数全体の集合を \mathbb{C} とする. 2つのベクトル $1, i$ は, \mathbb{C} を実線型空間とみたとき1次独立であり, \mathbb{C} を複素線型空間とみたとき1次従属であることを示せ.

記号: $GL_n(\mathbb{R}) := \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(X) \neq 0\}$. これを一般線型群と呼ぶ.

問題 4.3

$X \in GL_n(\mathbb{R})$ とする. このとき, $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ が1次独立ならば, Xv_1, \dots, Xv_m も1次独立であることを示せ.

記号: $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ を並べた (n, m) -行列を (v_1, \dots, v_m) で表す.

問題 4.4

問題 4.3 を用いて次を示せ: $\text{rank}(v_1, \dots, v_m) = m$ ならば, v_1, \dots, v_m は1次独立.
(ヒント: v_1, \dots, v_m が1次独立ならば, 適当に並び替えたものも1次独立)

問題 4.5

e_1, \dots, e_n を \mathbb{R}^n の基本ベクトルとする. $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ に対して, 次を示せ:

- (1) $n = 2$ のとき, $v_1 \neq 0$ ならば, $\exists X \in GL_2(\mathbb{R})$ s.t. $Xv_1 = e_1$.
- (2) $v_1 \neq 0$ ならば, $\exists X \in GL_n(\mathbb{R})$ s.t. $Xv_1 = e_1$. ((1) を用いて)
- (3) v_1, v_2 が1次独立ならば, $\exists X \in GL_n(\mathbb{R})$ s.t. $Xv_1 = e_1$ かつ $Xv_2 = ae_1 + e_2$.
- (4) v_1, \dots, v_m が1次独立ならば $\text{rank}(v_1, \dots, v_m) = m$.

コメント: 前節および今節で見たように, 行列の階数は, 写像の性質やベクトルの1次独立性など, 非常に多くのことと関連がある量です.

問題 4.6

$A, B \in M_n(\mathbb{R})$ は共に零行列ではないとする. 次を示せ:

- (1) A が対称, B が交代ならば, A, B は1次独立.
- (2) $\text{tr}(A) = 1, \text{tr}(B) = 0$ ならば, A, B は1次独立.
- (3) $\text{tr}(A) = 1, \text{tr}(B) = 2$ だとしても, A, B は1次独立とは限らない.

5 基底と次元

問題 5.1

次の線型空間の基底を求め（一組で良い）、それが基底であることを示せ:

- (1) $\text{Sym}_2(\mathbb{R}) := \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid {}^tX = X\}$,
- (2) $\text{Alt}_2(\mathbb{R}) := \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid {}^tX = -X\}$,
- (3) $\text{sl}_2(\mathbb{R}) := \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(X) = 0\}$.

問題 5.2

次の $(3, 4)$ -行列 A を考える:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (1) $\text{Ker}(A) := \{v \in \mathbb{R}^4 \mid Av = \mathbf{o}\}$ の基底および次元を求めよ,
- (2) $\text{Im}(A) := \{w \in \mathbb{R}^3 \mid \exists v \in \mathbb{R}^4 : w = Av\}$ の基底および次元を求めよ.

問題 5.3

$X \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ および \mathbb{R}^n の部分空間 V に対し, $X.V := \{w \in \mathbb{R}^n \mid \exists v \in V : w = Xv\}$ と定める. このとき, v_1, \dots, v_k が V の基底ならば, Xv_1, \dots, Xv_k は $X.V$ の基底であることを示せ.

問題 5.4

(m, n) -行列 A に対し, $\dim \text{Im}(A) = \text{rank}(A)$ を示せ. (ヒント: 基本変形, 問題 5.3)

問題 5.5

次で定義される \mathbb{R}^2 の基底に対し, $\{u_1, u_2\}$ から $\{v_1, v_2\}$ への基底変換の行列を求めよ:

$$u_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

問題 5.6

次で定義される $M_2(\mathbb{R})$ の基底に対し, $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ から $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ への基底変換の行列を求めよ:

$$u_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad v_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6 線型写像

線型空間とは、和とスカラー倍という「構造」を持った集合であった。本節で扱う線型写像とは、線型空間の「構造を保つ写像」のことである。このような、構造の入った集合と、その構造を保つ写像を考えることは、数学の全ての分野に於いて非常に基本的である。

問題 6.1

次が全射かどうか、単射かどうか、線型かどうかを予想し、定義に従ってそれらを示せ:

$$(1) f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 2x + 3y,$$

$$(2) f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto \begin{pmatrix} 2x \\ 3x \end{pmatrix},$$

$$(3) f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2.$$

問題 6.2

次で定義される \mathbb{R}^2 から \mathbb{R}^2 への写像が線型かどうかを予想し、定義に従ってそれらを示せ:

- (1) 原点を中心に角度 θ 回転させる写像,
- (2) x 軸方向に 1 平行移動させる写像.

問題 6.3

線型写像 $f : V \rightarrow W$ に対して、次を定義に従って示せ:

- (1) $\text{Im}(f) := \{w \in W \mid \exists v \in V : w = f(v)\}$ は W の線型部分空間,
- (2) $\text{Ker}(f) := \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ は V の線型部分空間.

問題 6.4

線型写像 $f : V \rightarrow W$ に対して、次を示せ: f が単射 $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0\}$.

問題 6.5

$f : V \rightarrow W$ を線型同型写像, v_1, \dots, v_n を V の基底とする。次を定義に従って示せ: $f(v_1), \dots, f(v_n)$ は W の基底である。

問題 6.6

次元公式を用いて次を示せ: $\dim \text{sl}_n(\mathbb{R}) = n^2 - 1$.

問題 6.7 (発展問題)

線型空間 V に対して, $V^* := \{f : V \rightarrow \mathbb{R} : \text{線型写像}\}$ と定める。

- (1) V^* がベクトル空間になるように和とスカラー倍を定義せよ (証明不要),
- (2) v_1, \dots, v_n を V の基底とする。次で定義される f_1, \dots, f_n が V^* の基底であることを示せ: $f_i(a_1v_1 + \dots + a_nv_n) := a_i$.

7 線型写像に対応する行列

(m, n) -行列 A が与えられると、線型写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m: x \mapsto Ax$ が定まる。逆に、線型写像 $f: V \rightarrow W$ と V, W の基底が与えられると、行列 (表現行列) が定まる。基底を取り替えると表現行列は変わるが、基底変換の行列を見れば、どう変わるかが分かる。表現行列の性質から、線型写像の性質が分かる。

問題 7.1

次で定義される線型写像を考える:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ 2x_2 + 2x_3 \\ 3x_3 \end{pmatrix}.$$

(1) 標準的な基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ に関する f の表現行列 A を求めよ。

(2) 次の基底 $\{v_1, v_2, v_3\}$ に関する f の表現行列 B を求めよ:

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(3) $\{e_1, e_2, e_3\}$ から $\{v_1, v_2, v_3\}$ への基底変換の行列 P を求め、 $B = P^{-1}AP$ を示せ。

(4) $n \in \mathbb{N}$ に対し、 A^n を求めよ。

問題 7.2

次の線型写像 f に対し、 $\text{Ker}(f)$, $\text{Im}(f)$ の次元および基底を、表現行列を用いて求めよ:

$$f: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R}): X \mapsto AX - XA, \quad \text{where } A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

問題 7.3 (高校の復習)

\mathbb{R}^2 において、原点を中心に角度 θ 回転させる写像を f_θ とする。 f_θ が線型写像であることは既知として、 f_θ の標準的な基底に関する表現行列を求めよ。また合成写像の表現行列に関する性質を用いて、三角関数の加法定理を導け。

問題 7.4 (発展問題)

$V := \mathbb{R}^2$ の基底 $\{v_1, v_2\}$ に対し、問題 6.7 で定義した V^* および基底 $\{f_1, f_2\}$ を考える。

(1) 線型写像 $\varphi: V \rightarrow V$ に対し、次で定義される φ^* が線型写像であることを示せ:

$$\varphi^*: V^* \rightarrow V^*: f \mapsto f \circ \varphi.$$

(2) φ の $\{v_1, v_2\}$ に関する表現行列を A とする。このとき φ^* の $\{f_1, f_2\}$ に関する表現行列を A を用いて表せ。

8 内積空間と正規直交基底

線型空間上の内積に対して, 正規直交基底が定義される. 有限次元ならば, 任意の基底から, グラム-シュミットの直交化と呼ばれる操作で正規直交基底を作ることができる.

問題 8.1

V を実線型空間, $(,)$ を V 上の内積とする. $v_0 \in V$ とするとき, 次が線型写像であることを示せ: $f: V \rightarrow V: v \mapsto (v_0, v)$.

問題 8.2 (グラム-シュミットの直交化を平面ベクトルで理解するための問題)

$(,)$ を \mathbb{R}^2 の標準的な内積とする. $u, v \in \mathbb{R}^2$ (ただし $\|u\| = 1$) に対して,

- (1) v から u に降ろした垂線の足 v' を求めよ.
- (2) ベクトル $v - v'$ は u と直交することを (計算で) 示せ.

ベクトル $v - v'$ を長さで割ったものを u_2 とすれば, $\{u, u_2\}$ は正規直交基底になる.

問題 8.3 (グラム-シュミットの直交化を空間ベクトルで理解するための問題)

$(,)$ を \mathbb{R}^3 の標準的な内積とする. $u_1, u_2, v \in \mathbb{R}^3$ ($\{u_1, u_2\}$ は正規直交系) に対して,

- (1) u_1, u_2 で張られる \mathbb{R}^3 の部分空間 V_0 の方程式を求めよ.
- (2) v から V_0 に降ろした垂線の足 v' を求めよ.
- (3) ベクトル $v - v'$ は u_1, u_2 と直交することを (計算で) 示せ.

問題 8.4

次のベクトルに対して, 以下の問いに答えよ:

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (1) $\{v_1, v_2, v_3\}$ から, グラム-シュミットの方法で正規直交基底を求めよ.
- (2) $\{v_2, v_1, v_3\}$ から, グラム-シュミットの方法で正規直交基底を求めよ.

問題 8.5

内積空間 V の部分空間 W に対して, 直交補空間 W^\perp も部分空間であることを示せ. ただしここで, $W^\perp := \{a \in V \mid \forall w \in W, (a, w) = 0\}$.

問題 8.6

V を 2 次以下の多項式の成す線型空間に対して, $(f, g) := \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ と定義する.

- (1) $(,)$ が内積であることを示せ.
- (2) $f(x) := x^2 + x + 1$ と $g(x) := ax - 1$ が直交するように a を定めよ.
- (3) V の基底 $\{1, x, x^2\}$ から, 正規直交基底を作れ.

9 直交変換とユニタリ変換

直交変換やユニタリ変換は、内積という幾何学的対象を保つ変換として特徴付けられる。このことから、これらの変換は、多くの応用を持つ非常に重要なものである。来年度以降の講義でも恐らく頻繁に登場するであろう。

問題 9.1 (高校数学の1次変換の問題)

写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を、直線 $ax + by = 0$ に関する折り返しとする。このとき f の表現行列 A を求めよ。また A が直交行列であることを確かめよ。

問題 9.2

V, W を内積空間、 $f: V \rightarrow W$ を直交変換とする。このとき f が単射であることを示せ。

問題 9.3

V を内積空間、 $\{a_1, \dots, a_n\}$ を V の正規直交系とする。 $f: V \rightarrow V$ が直交変換であるとき、 $\{f(a_1), \dots, f(a_n)\}$ も V の正規直交系であることを示せ。

上の問いは、正規直交基底は直交変換で移しても正規直交基底であると述べている。逆に、2つの正規直交基底は直交変換で互いに移りあう。

問題 9.4

$\{a_1, \dots, a_n\}$ を \mathbb{R}^n の正規直交基底とする。

- (1) 行列 $A := (a_1, \dots, a_n)$ が直交行列であることを示せ。
- (2) $a_i = Ae_i$ ($i = 1, \dots, n$) を示せ。
- (3) 任意の2つの正規直交基底は、直交変換で移りあうことを示せ。

同じことを、以下のように帰納的に示すこともできる:

問題 9.5

n 次の直交行列全体の成す集合を $O(n)$ とする。次を示せ:

- (1) $\forall v \in \mathbb{R}^2$ ($|v| = 1$), $\exists g \in O(2)$ s.t. $gv = e_1$.
- (2) $g \in O(n-1)$ のとき,

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & g & \\ 0 & & & \end{array} \right) \in O(n).$$

- (3) $\forall v \in \mathbb{R}^n$ ($|v| = 1$), $\exists g \in O(n)$ s.t. $gv = e_1$. ((1) を用いて示せ)
- (4) \mathbb{R}^n の正規直交系 $\{v_1, v_2\}$ に対して、 $\exists g \in O(n)$ s.t. $gv_1 = e_1, gv_2 = e_2$.

10 固有値と固有ベクトル

線型写像に対して、基底を一つ決めると行列表示が得られる。良い行列表示を得るためには、良い基底を選ぶ必要がある（標準的な基底が良いとは限らない）。その良い基底を選ぶ指針となるのが、固有ベクトルの考え方である。

問題 10.1

次のベクトル v_1, v_2, v_3 は、行列 X の固有ベクトルであることを示せ:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

問題 10.2

次の行列の固有値および固有ベクトルを求めよ:

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & i & -1 \\ i & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

問題 10.3

$f: V \rightarrow V$ を線型写像, v_1, v_2 をそれぞれ固有値 λ_1, λ_2 の固有ベクトルとする. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ のとき, v_1, v_2 は 1 次独立であることを示せ.

問題 10.4

正方行列 A, B が相似であることを、次で定義する: $\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ s.t. $B = P^{-1}AP$. またこのことを $A \sim B$ と表す.

- (1) 次を示せ: (i) $A \sim A$, (ii) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$, (iii) $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$.
- (2) 次の A と B が相似でないことを示せ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

問題 10.5 (応用: フィボナッチ数列)

漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ で定義される数列をフィボナッチ数列と呼ぶ. これを解くためには, $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$ のような型の 2 項間の漸化式に帰着させるのが定石である. 上の漸化式が

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

と表されることと固有値の考え方をを用いて、フィボナッチ数列の一般項を求めよ.

11 行列の対角化と3角化

与えられた正方行列 A に対して、適当な正則行列 P を用いて、 $P^{-1}AP$ が対角行列または上3角行列となるようにしたい。その P の見付けるために、固有ベクトルが用いられる。対角化または3角化できると、いろいろな性質が調べやすくなる。

問題 11.1

線型写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ の標準的な基底 $\{e_1, \dots, e_n\}$ に関する行列表示を A とする。また、 $\{e_1, \dots, e_n\}$ から基底 $\{v_1, \dots, v_n\}$ への基底変換の行列を P とする。

- (1) $(f(v_1), \dots, f(v_n)) = (f(e_1), \dots, f(e_n))P$ を示せ。
- (2) f の $\{v_1, \dots, v_n\}$ に関する行列表示が $P^{-1}AP$ であることを示せ。
- (3) 各 v_i は固有値 λ_i の固有ベクトルであるとする。このとき $P^{-1}AP$ を求めよ。

問題 11.2

次の行列を対角化し、行列の n 乗を求めよ:

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & i & -1 \\ i & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

問題 11.3

次の行列 A を、直交行列を用いて3角化したい:

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (1) A の固有値を求めよ。
- (2) A の重複度が1の固有値を λ とする。対応する固有ベクトル v_1 を求めよ。
- (3) $\{v_1, e_2, e_3\}$ から、グラム・シュミットの方法で正規直交基底 $\{u_1, u_2, u_3\}$ を作れ。
- (4) $P_1 := (u_1 \ u_2 \ u_3)$ とする。 $P_1^{-1}AP_1$ を計算し、(2,1)-成分と(3,1)-成分が0になることを確かめよ。
- (5) $P_1^{-1}AP_1$ の右下の(2,2)-行列を B とする。(1)から(4)の手順を B に適応して、 B を3角化せよ。
- (6) 行列 A の3角化を求めよ。

問題 11.4 (ハミルトン・ケーリーの定理)

n 次正方行列 A の固有多項式を ϕ とすると、 $\phi(A) = 0$ が成り立つことが知られている。

- (1) 上の主張は、 A が3角行列であるときに示せば十分である。そのことを示せ。
- (2) $n = 2$ のときに、 $\phi(A) = 0$ を具体的に書け。

12 実対称行列およびエルミート行列の対角化

行列は常に対角化可能であるとは限らないが、実対称行列およびエルミート行列は、常に対角化可能である。更に、そのときに用いる行列 ($P^{-1}AP$ に現れる行列 P) として、直交行列やユニタリ行列を取ることができる。

問題 12.1

\mathbb{R}^n および \mathbb{C}^n の自然な内積に関して、次を示せ:

- (1) 実対称行列の相異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交する。
- (2) エルミート行列の相異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交する。

問題 12.2

次の実対称行列を、直交行列を用いて対角化せよ:

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

問題 12.3

エルミート行列の固有値は実数であることを示せ。

問題 12.4

次の行列がエルミート行列であることを確かめ、ユニタリ行列を用いて対角化せよ:

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

問題 12.5

対称行列は直交行列で対角化でき、エルミート行列はユニタリ行列で対角化できる。これらの逆、すなわち次を示せ:

- (1) 実行列は、直交行列で対角化できるならば、対称行列である。
- (2) 複素行列は、ユニタリ行列で対角化できるならば、エルミート行列である。

問題 12.6 (応用: 2次曲線)

曲線 $F(x, y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 2$ のグラフを、対称行列の直交行列による対角化を用いて描け。ただしここで、 $F(x, y)$ は行列 A を使って次のように書けることに注意する:

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad F(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

ヒント: 対称行列 A を対角化する直交行列を P とするとき、 $\det P = 1$ となるように取れば、 P は回転を表す。求める曲線を行列 P で移した曲線を、まず考えよ。