

平成18年度卒業論文
ガウス曲率一定曲面と平均曲率一定曲面の
関係

理学部数学科

B034210 高原 淳

指導教官 田丸博士 助教授

平成19年2月9日

目次

1	はじめに	2
2	準備	3
3	定理	5
4	曲率一定曲面の例	11
4.1	回転面の曲率	11
4.2	ガウス曲率一定回転面	13
4.3	平均曲率一定回転面	15
5	例	19
5.1	平均曲率一定回転面からガウス曲率一定回転面を作る例	21
5.2	ガウス曲率一定回転面から平均曲率一定回転面を作る例	21

1 はじめに

曲面の曲がり方を表すものとして、ガウス曲率と平均曲率がある。今回、そのガウス曲率が一定であるような曲面と平均曲率が一定であるような曲面の間にはどんな関係があるのだろうか、ということテーマにした。具体的には、ガウス曲率一定曲面からある一定距離だけ平行曲面をとると平均曲率一定曲面が得られ、逆に平均曲率一定曲面からある一定距離だけ平行曲面をとるとガウス曲率一定曲面が得られるという定理に証明を与えた。次に例を挙げた。球面や円柱面などはガウス曲率一定曲面や平均曲率一定曲面の代表的な例であり、平行曲面をとってもガウス曲率、平均曲率は一定のままである。それはあまりに簡単な例なので、別の例として、ガウス曲率一定回転面と平均曲率一定回転面を挙げ、その定理を使ってガウス曲率一定回転面から平均曲率一定回転面を、平均曲率一定回転面からガウス曲率一定回転面を得る例を挙げた。

2 準備

まず，平面曲線の性質を挙げる．

定義 2.1.

弧長パラメータ表示された平面曲線 $r(s)$ の単位法線ベクトルを $\mathbf{n}(s)$ ，曲率を $\kappa(s)$ とおく．このとき，ある定まった実数 t (パラメータとは考えない) に対して次のようにおく：

$$\tilde{r}(s) := r(s) + t\mathbf{n}(s) . \quad (2.1)$$

これを $r(s)$ の平行曲線とよぶ．

命題 2.2.

曲線 r の平行曲線 \tilde{r} の曲率を $\tilde{\kappa}$ とおけば，次が成り立つ：

$$\frac{1}{\tilde{\kappa}} = \frac{1}{\kappa} - t . \quad (2.2)$$

証明.

曲線 $r = (x, y)$ の曲率は

$$\kappa = \frac{x'y'' - x''y'}{\{(\tilde{x}')^2 + (\tilde{y}')^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

で表すことができる．

曲線 $\tilde{r} = (\tilde{x}, \tilde{y})$ について，

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= r + t\mathbf{n} \\ &= (x, y) + t(-y', x') \\ &= (x - ty', y + tx') \end{aligned}$$

となるので，

$$\tilde{x} = x - ty', \tilde{y} = y + tx' .$$

これを微分すると，

$$\tilde{x}' = x' - ty'', \tilde{y}' = y' + tx'' .$$

曲線の曲率の定義より， $r'' = \kappa \cdot \mathbf{n}$ なので，

$$(x'', y'') = (-\kappa y', \kappa x') .$$

これを用いて，

$$\begin{aligned} \tilde{x}' &= x' - ty'' = (1 - t\kappa)x' , \\ \tilde{y}' &= y' + tx'' = (1 - t\kappa)y' . \end{aligned}$$

これをさらに微分して,

$$\tilde{x}'' = -t\kappa'x' + (1-t\kappa)x'',$$

$$\tilde{y}'' = -t\kappa'y' + (1-t\kappa)y''.$$

これらを $\tilde{r} = (\tilde{x} \tilde{y})$ の曲率 $\tilde{\kappa}$ に代入して,

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa} &= \frac{\tilde{x}'\tilde{y}'' - \tilde{x}''\tilde{y}'}{\{(\tilde{x}')^2 + (\tilde{y}')^2\}^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{(1-t\kappa)^2}{(1-t\kappa)^3} \cdot \frac{x'y'' - x''y'}{\{(\tilde{x}')^2 + (\tilde{y}')^2\}^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\kappa}{1-t\kappa}.\end{aligned}$$

よって,

$$\frac{1}{\tilde{\kappa}} = \frac{1}{\kappa} - t.$$

□

3 定理

定義 3.1.

曲線の場合と同様に, 曲面 $p(u, v)$ に対して, その法線方向に一定の距離 t だけ移動した曲面

$$\tilde{p}(u, v) := p(u, v) + t\nu(u, v) \quad (\nu(u, v) \text{ は単位法ベクトル})$$

を平行曲面とよぶ.

曲面の場合にも, 命題 2.2 に相当する次の定理が成り立つ.

定理 3.2.

曲面 $p(u, v)$ に対して,

$$\tilde{p}(u, v) := p(u, v) + t\nu(u, v)$$

で与えられる曲面 $\tilde{p}(u, v)$ の主曲率 $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ は, $p(u, v)$ の主曲率 λ_1, λ_2 を用いて次のように表される:

$$\frac{1}{\tilde{\lambda}_j} = \frac{1}{\lambda_j} - t \quad (j = 1, 2). \quad (3.1)$$

とくに \tilde{p} のガウス曲率 \tilde{K} と平均曲率 \tilde{H} は次のように表される.

$$\tilde{K} = \frac{K}{1 - 2tH + t^2K}, \quad (3.2)$$

$$\tilde{H} = \frac{H - tK}{1 - 2tH + t^2K}. \quad (3.3)$$

定理の証明の前に, 準備を行なう.

定義 3.3.

各点で速度ベクトルが主方向を向くような曲面上の曲線を曲率線という.

命題 3.4.

曲面上の臍点でない点の近くでは, u 曲線, v 曲線が曲率線であるような助変数 (曲率線座標) がとれる. この助変数表示では,

$$F = M = 0$$

が成り立つ.

曲率線座標の存在についての証明は省略する (参考文献 [1] 参照)
曲率線座標 (u, v) による助変数表示 $p(u, v)$ について $F = M = 0$ が成り立つことを示す.

補題 3.5.

uv 平面において, u 軸から角度 θ をなす方向 (α, β) ($\beta = \alpha \tan \theta$) に対応する曲面上の法曲率 κ_n は次の式で表される:

$$\begin{aligned}\kappa_n &= \frac{L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2}{E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2} \\ &= \frac{L \cos^2 \theta + 2M \cos \theta \sin \theta + N \sin^2 \theta}{E \cos^2 \theta + 2F \cos \theta \sin \theta + G \sin^2 \theta} .\end{aligned}$$

ただし, E, F, G を曲面の第一基本量, L, M, N を曲面の第二基本量とする.

証明.

いま, $r(s) = p(u(s), v(s))$ を $s = 0$ で u 軸から角度 θ をなす方向に出発する弧長をパラメータとする曲面上の曲線とすると,

$$(u'(0), v'(0)) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

となる正の数 ρ が存在する. 助変数 s は弧長なので,

$$r' \cdot r' = Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2 = 1 .$$

したがって,

$$\begin{aligned}1 &= Eu'(0)^2 + 2Fu'(0)v'(0) + Gv'(0)^2 \\ &= \rho^2(E \cos^2 \theta + 2F \cos \theta \sin \theta + G \sin^2 \theta)\end{aligned}$$

が成り立つ. また, $r(s)$ の法曲率 κ_n は,

$$\kappa_n = L(u')^2 + 2Mu'v' + N(v')^2$$

と表せるので,

$$\begin{aligned}\kappa_n &= Lu'(0)^2 + 2Mu'(0)v'(0) + Nv'(0)^2 \\ &= \rho^2(L \cos^2 \theta + 2M \cos \theta \sin \theta + N \sin^2 \theta) \\ &= \frac{L \cos^2 \theta + 2M \cos \theta \sin \theta + N \sin^2 \theta}{E \cos^2 \theta + 2F \cos \theta \sin \theta + G \sin^2 \theta} .\end{aligned}$$

□

この補題を用いて命題 3.4 の証明を行なう.

証明. (命題 3.4)

まず, 曲面上の臍点でない点における 2 つの主方向は直交することより, p_u と p_v は直交するので, $F = 0$. さらに, 曲率線座標による助変数表示では u 方向と v 方向が主方向になるので, 補題 3.5 で $\theta = 0, \pi/2$ として,

$$\lambda_1 = \frac{L}{E}, \lambda_2 = \frac{N}{G}$$

が主曲率である．ここで，

$$\frac{LN}{EG} = \lambda_1 \lambda_2 = K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{LN - M^2}{EG}$$

が成り立つので， $M = 0$ ．よって，

$$F = M = 0.$$

□

命題 3.6. (Weingarten の式)

助変数表示された曲面 $p(u, v)$ の第一基本量を E, F, G ，第二基本量を L, M, N とする．このとき，単位法線ベクトル ν の微分は次のように表される

$$\begin{aligned} \nu_u &= -\frac{GL - FM}{EG - F^2} p_u - \frac{EM - FL}{EG - F^2} p_v, \\ \nu_v &= -\frac{GM - FN}{EG - F^2} p_u - \frac{EN - FM}{EG - F^2} p_v. \end{aligned}$$

証明.

まず， $\nu \cdot \nu = 1$ を u で微分すると， $\nu_u \cdot \nu = 0$ となり， ν_u は ν に直交するので，

$$\nu_u = Ap_u + Bp_v$$

の形で書ける．この式と p_u, p_v との内積をとると，

$$-L = p_u \cdot \nu_u = EA + FB,$$

$$-M = p_v \cdot \nu_u = FA + GB$$

となる．この式を A, B について解くと，

$$A = \frac{FM - GL}{EG - F^2}, B = \frac{FL - GM}{EG - F^2}$$

となる．よって，

$$\nu_u = -\frac{GL - FM}{EG - F^2} p_u - \frac{EM - FL}{EG - F^2} p_v.$$

ν_v も同様に示せる．

□

これより，定理 3.2 の証明に入る．

証明. (定理 3.2)

曲面の臍点でない点の回りで曲率線座標 (u, v) によって $p = p(u, v)$ と表されているとする．曲面 p の第一基本量を E, F, G ，第二基本量を L, M, N とす

ると命題 3.4 により $F = M = 0$ となる。このとき、単位法線ベクトル ν の微分は、命題 3.6 より、

$$\nu_u = -(L/E)p_u, \quad \nu_v = -(N/G)p_v$$

となる。これを用いて、曲面 $\tilde{p} = p + t\nu$ の第一基本量 \tilde{E} \tilde{F} \tilde{G} 、第二基本量 \tilde{L} \tilde{M} \tilde{N} を求める。

$$\tilde{p}_u = p_u + t\nu_u = \{1 - (L/E)t\}p_u,$$

$$\tilde{p}_v = p_v + t\nu_v = \{1 - (N/G)t\}p_v.$$

なので、 $p_u \cdot p_v = 0$ に注意して、

$$\tilde{E} = \tilde{p}_u \cdot \tilde{p}_u = \{1 - (L/E)t\}^2 |p_u|^2,$$

$$\tilde{F} = \tilde{p}_u \cdot \tilde{p}_v = \{1 - (L/E)t\}\{1 - (N/G)t\}(p_u \cdot p_v) = 0,$$

$$\tilde{G} = \tilde{p}_v \cdot \tilde{p}_v = \{1 - (N/G)t\}^2 |p_v|^2,$$

$$\tilde{L} = -\tilde{p}_u \cdot \nu_u = (L/E)\{1 - (L/E)t\}|p_u|^2,$$

$$\tilde{M} = -\tilde{p}_u \cdot \nu_v = (N/G)\{1 - (L/E)t\}(p_u \cdot p_v) = 0,$$

$$\tilde{N} = -\tilde{p}_v \cdot \nu_v = (N/G)\{1 - (N/G)t\}|p_v|^2.$$

これより、

$$\tilde{A} = \frac{1}{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} \begin{pmatrix} \tilde{G}\tilde{L} - \tilde{F}\tilde{M} & \tilde{G}\tilde{M} - \tilde{F}\tilde{N} \\ -\tilde{F}\tilde{L} + \tilde{E}\tilde{M} & -\tilde{F}\tilde{M} + \tilde{E}\tilde{N} \end{pmatrix}$$

に代入して、

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} (L/E)\{1 - (L/E)t\}^{-1} & 0 \\ 0 & (N/G)\{1 - (N/G)t\}^{-1} \end{pmatrix}.$$

したがって、 \tilde{p} の主曲率 $\tilde{\lambda}_1$ $\tilde{\lambda}_2$ は、

$$\tilde{\lambda}_1 = (L/E)\{1 - (L/E)t\}^{-1},$$

$$\tilde{\lambda}_2 = (N/G)\{1 - (N/G)t\}^{-1}.$$

ここで、もとの曲面 p について、 $F = M = 0$ より、

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} GL - FM & GM - FN \\ -FL + EM & -FM + EN \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} L/E & 0 \\ 0 & N/G \end{pmatrix} \end{aligned}$$

なので, p の主曲率 λ_1, λ_2 は,

$$\lambda_1 = L/E, \lambda_2 = N/G.$$

したがって, \tilde{p} の主曲率 $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ は,

$$\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1(1 - \lambda_1 t)^{-1},$$

$$\tilde{\lambda}_2 = \lambda_2(1 - \lambda_2 t)^{-1}.$$

よって,

$$\frac{1}{\tilde{\lambda}_j} = \frac{1}{\lambda_j} - t \quad (j = 1, 2)$$

が示せた. また, \tilde{p} のガウス曲率 \tilde{K} , 平均曲率 \tilde{H} を求めると,

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(1 - \lambda_1 t)(1 - \lambda_2 t)} \\ &= \frac{K}{1 - 2tH + t^2 K}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \frac{\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_1 t} + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_2 t} \right) \\ &= \frac{H - tK}{1 - 2tH + t^2 K}. \end{aligned}$$

□

この定理より, 曲面 p のガウス曲率 $K > 0$ が定数のとき \tilde{H} が一定となるようにある値 t をとり平行曲面 \tilde{p} を考えれば, ガウス曲率一定曲面から平均曲率一定曲面が得られる. 逆に, p の平均曲率 $H > 0$ が定数のとき \tilde{K} が一定となるようにある値 t をとれば, 平均曲率一定曲面からガウス曲率一定曲面が得られる.

曲面 p のガウス曲率 $K > 0$ が定数のとき, $t = 1/\sqrt{K}$ とすると,

$$\tilde{H} = \frac{H - (1/\sqrt{K})K}{1 - 2(1/\sqrt{K})H + (1/K)K} = -\frac{\sqrt{K}}{2}$$

となり, $\tilde{H} = -\sqrt{K}/2 = (\text{一定})$ の平均曲率一定曲面が得られる. また, $t = -1/\sqrt{K}$ とすると $\tilde{H} = \sqrt{K}/2 = (\text{一定})$ の平均曲率一定曲面が得られる.

曲面 p の平均曲率 $H \neq 0$ が定数のとき, $t = 1/(2H)$ とおくと,

$$\tilde{K} = \frac{K}{1 - 2(1/2H)H + (1/4H^2)K} = 4H^2$$

となり, $\tilde{K} = 4H^2 = (\text{一定})$ のガウス曲率一定曲面が得られる.

4 曲率一定曲面の例

ここでは、ガウス曲率一定曲面と平均曲率一定曲面の例として、ガウス曲率一定回転面と平均曲率一定回転面を挙げる。

4.1 回転面の曲率

xy 平面上の弧長パラメータ表示された曲線を x 軸のまわりに回転してできる回転面を考える。

命題 4.1.

xy 平面上の曲線 $r(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ を x 軸のまわりに回転させてできる曲面

$$p(u, v) = (x(u), y(u) \cos v, y(u) \sin v)$$

のガウス曲率 K 、平均曲率 H は、次のように表される。

$$K = \frac{-x'^2 y'' + x' x'' y'}{y(x'^2 + y'^2)^2}, \quad (4.1)$$

$$H = \frac{x'}{2y\sqrt{x'^2 + y'^2}} + \frac{x'' y' - x' y''}{2(\sqrt{x'^2 + y'^2})^3}. \quad (4.2)$$

とくに、 θ が弧長パラメータのとき、

$$K = -\frac{y''}{y}, \quad (4.3)$$

$$H = \frac{x'}{2y} - \frac{y''}{2x'}. \quad (4.4)$$

証明.

$p(u, v)$ の外微分は、

$$dp = p_u du + p_v dv = (x', y' \cos v, y' \sin v) du + (0, -y \sin v, y \cos v) dv$$

となるので、第一基本形式は、

$$ds^2 = (x'^2 + y'^2) du^2 + y^2 dv^2.$$

したがって、第一基本量は、

$$E = x'^2 + y'^2, \quad F = 0, \quad G = y^2. \quad (4.5)$$

また、この曲面の単位法線ベクトルは、

$$\nu(u, v) = \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|} = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} (y', -x' \cos v, -x' \sin v).$$

これを外微分して,

$$d\nu = \left(\frac{x'^2 y'' - x' x'' y'}{(\sqrt{x'^2 + y'^2})^3}, \frac{(-x'' y'^2 + x' y' y'') \cos v}{(\sqrt{x'^2 + y'^2})^3}, \frac{(-x'' y'^2 + x' y' y'') \sin v}{(\sqrt{x'^2 + y'^2})^3} \right) du \\ + \left(0, \frac{x' \sin v}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \frac{-x' \cos v}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right) dv$$

となるので, 第二基本形式は,

$$-dp \cdot d\nu = -\frac{x'^3 y'' - x'^2 y' x'' - x'' y'^3 + x' y'^2 y''}{(\sqrt{x'^2 + y'^2})^3} du^2 + \frac{x' y}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} dv^2 \\ = \frac{-x' y'' + x'' y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} du^2 + \frac{x' y}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} dv^2 .$$

したがって, 第二基本量は,

$$L = \frac{-x' y'' + x'' y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \quad M = 0, \quad N = \frac{x' y}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} . \quad (4.6)$$

よって, (4.5)(4.6) より,

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \\ = \frac{LN}{EG} \\ = \frac{-x'^2 y'' + x' x'' y'}{y(x'^2 + y'^2)^2} , \\ H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} \\ = \frac{N}{2G} + \frac{L}{2E} \\ = \frac{\frac{x' y}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}}{2y^2} + \frac{\frac{-x' y'' + x'' y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}}{2(x'^2 + y'^2)} \\ = \frac{x'}{2y\sqrt{x'^2 + y'^2}} + \frac{x'' y' - x' y''}{2(\sqrt{x'^2 + y'^2})^3} .$$

パラメータ u が $r(u)$ の弧長であるとき, 弧長パラメータによる曲線の速度ベクトルの大きさは 1 なので,

$$(x')^2 + (y')^2 = 1 . \quad (4.7)$$

両辺を u で微分して,

$$x' x'' + y' y'' = 0 . \quad (4.8)$$

(4.7), (4.8) より,

$$x'' y' - x' y'' = -\frac{y''}{x'} \quad (4.9)$$

となるから, よって, (4.7), (4.9) を上の K, H に代入すると,

$$\begin{aligned} K &= -\frac{y''}{y}, \\ H &= \frac{x'}{2y} - \frac{y''}{2x'} \end{aligned} .$$

□

4.2 ガウス曲率一定回転面

補題 4.2.

曲面 $p(u, v)$ のガウス曲率と平均曲率をそれぞれ K, H とする. 正の定数 c に対して, $p(u, v)$ を c 倍に拡大 (縮小) してできる曲面 $cp(u, v)$ のガウス曲率と平均曲率はそれぞれ $K/c^2, H/c$ となる.

証明. $\tilde{p}(u, v) = cp(u, v)$ とすると,

$$\tilde{p}_u = cp_u, \tilde{p}_v = cp_v$$

なので, \tilde{p} の第一基本量は p の第一基本量の c^2 倍となる. また p と \tilde{p} の (u, v) における単位法線ベクトルは一致し,

$$\tilde{p}_{uu} = cp_{uu}, \tilde{p}_{uv} = cp_{uv}, \tilde{p}_{vv} = cp_{vv}$$

が成り立つので, \tilde{p} の第二基本量は p の第二基本量の c 倍となる. よってガウス曲率, 平均曲率の定義から, \tilde{p} のガウス曲率, 平均曲率をそれぞれ \tilde{K}, \tilde{H} とすると,

$$\tilde{K} = \frac{K}{c^2}, \quad \tilde{H} = \frac{H}{c}$$

が成り立つ. □

この補題から, ガウス曲率一定曲面を考えるときに, $K = -1, 0, 1$ の場合のみを考えればよい.

(i) $K = 0$ のとき

(4.3) より, $K = 0$ ならば $y'' = 0$ なので, これを解いて (4.7) と合わせると,

$$x(u) = u\sqrt{1-a^2}, y(u) = au + b \quad (a, b \text{ は定数}, |a| \leq 1).$$

特に, $a = 0$ のときは円柱面, $0 < |a| \leq 1$ のときは円錐面, $|a| = 1$ のときは平面が得られる.

(ii) $K = 1$ のとき

(4.3) より $y'' = -y$ となる．この微分方程式を解くと，

$$\begin{aligned} y(u) &= \alpha \cos u + \beta \sin u \quad (\alpha, \beta \text{ は定数}) \\ &= a \cos(u - \delta) \quad (a = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \delta = \arctan(\beta/\alpha)) \end{aligned}$$

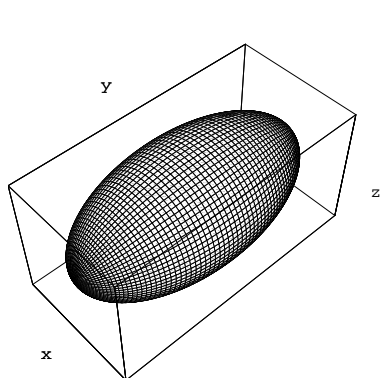
となるが，これは周期関数なので，

$$y(u) = a \cos u \quad (a = 0)$$

としても一般性を失わない．これと (4.7) より，

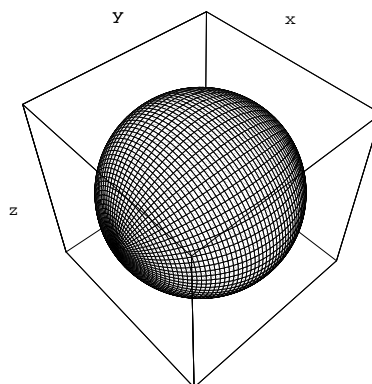
$$x(u) = \int_0^u \sqrt{1 - a^2 \sin^2 t} dt, \quad y(u) = a \cos u.$$

特に $a = 1$ のとき球面， $a < 1$ のときラグビーボール型， $a > 1$ のとき樽型の回転面となる．



$K = 1, a < 1$

図 4.1



$K = 1, a = 1$

図 4.2

(iii) $K = -1$ のとき (4.3) より $y'' = y$ となる．この微分方程式を解くと，

$$y(u) = ae^u + be^{-u} \quad (a, b : \text{定数}).$$

これと (4.7) より，

$$x(u) = \int_0^u \sqrt{1 - (ae^t - be^{-t})^2} dt, \quad y(u) = ae^u + be^{-u}$$

特に $a = 0, b = 1$ のとき，

$$x(u) = \int_0^u \sqrt{1 - e^{-2t}} dt, \quad y(u) = e^{-u}$$

から得られる回転面を擬球面という．

4.3 平均曲率一定回転面

まず、平均曲率一定回転面についての、次の定理を挙げる。

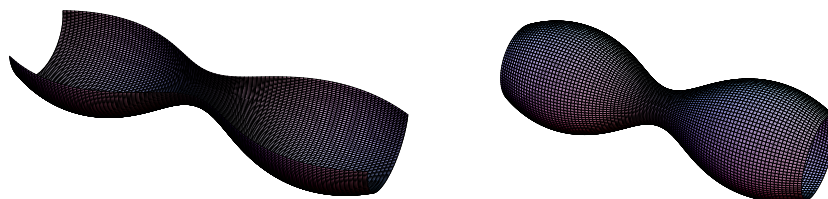
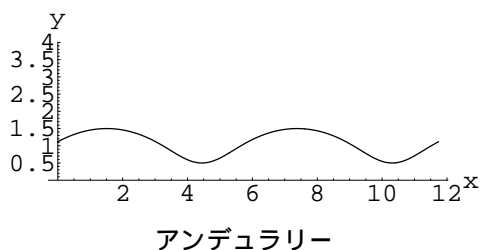
定理 4.3. (Delauney の定理)

平均曲率一定回転面は平面、円柱面、球面、懸垂面、アンデュロイド、ノイドのどれかに局所的に合同である。

ここでは証明は省略するが、平面、円柱面、球面の平均曲率が一定なことは明らかなので、懸垂面、アンデュロイド、ノイドが平均曲率一定回転面であることを示しておく。

(i) アンデュロイド

アンデュロイドは、楕円を定直線上で滑らないように転がしたときの焦点の軌跡として得られるアンデュラリーとよばれる曲線を定直線のまわりに回転して得られる曲面である。



アンデュロイド

アンデュロイドが平均曲率一定であることを示す。

まず、 xy 平面の極座標 (r, θ) を用いて、

$$r = r(\theta) = \frac{a}{1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (a > 0, 0 < \varepsilon < 1) \quad (4.10)$$

で表される曲線は原点 O を 1 つの焦点とする楕円で、 ε はその離心率となる。この楕円を助変数表示すると、

$$\gamma(\theta) := r(\theta)(\cos \theta, \sin \theta)$$

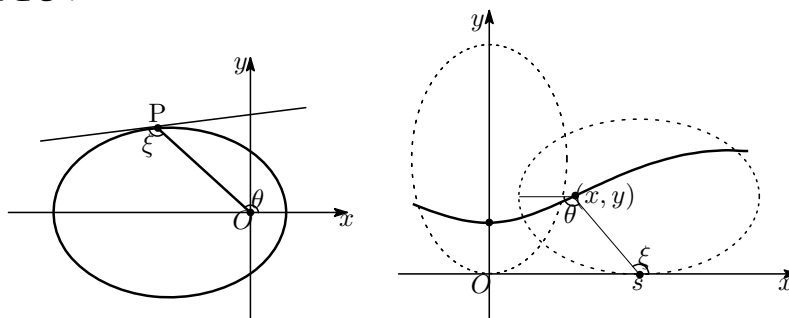
となるので, その $P = \gamma(\theta)$ における接ベクトルは,

$$\gamma'(\theta) = \left(\frac{-a \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}, \frac{\varepsilon + a(\cos \theta)}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right)$$

となるので, ベクトル \overrightarrow{PO} と P における楕円の接線とのなす角を ξ とすれば

$$\begin{aligned} \cos \xi &= \frac{-\varepsilon \sin \theta}{\sqrt{1 + 2\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2}}, \\ \sin \xi &= \frac{1 + \varepsilon \cos \theta}{\sqrt{1 + 2\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2}} \end{aligned}$$

が成り立つことがわかる (下図左). この楕円を下図右のように x 軸上に回転させる.



楕円が1つの焦点のまわりに角度 θ だけ回転したとき, x 軸との接線の移動距離 $s(\theta)$ は曲線 $\gamma(\theta)$ の弧長なので,

$$s(\theta) = \int_0^\theta \frac{a\sqrt{1 + 2\varepsilon \cos t + \varepsilon^2}}{(1 + \varepsilon \cos t)^2} dt$$

となる. このとき, 楕円の焦点の座標は,

$$\begin{aligned} (x, y) &= (x(\theta), y(\theta)) \\ &= (s(\theta) + r(\theta) \cos \xi(\theta), r(\theta) \sin \xi(\theta)) \end{aligned}$$

となる. 曲線 $(x(\theta), y(\theta))$ を x 軸のまわりに回転させてできる回転面の平均曲率は, 命題 4.1 より,

$$H = \frac{x''y' - x'y''}{2(\sqrt{x'^2 + y'^2})^3} + \frac{x'}{2y\sqrt{x'^2 + y'^2}} \quad (4.11)$$

となる. ここで, $\Delta = \sqrt{1 + 2\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2}$ とすると,

$$\Delta' = -\frac{\varepsilon \sin \theta}{\Delta}, \quad (\cos \xi)' = \frac{\varepsilon^2 \sin^2 \theta - \Delta^2 \varepsilon \cos \theta}{\Delta^3}$$

より,

$$\begin{aligned}
 x' &= s' + r' \cos \xi + r(\cos \xi)' \\
 &= \frac{a\Delta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} + \frac{-a\varepsilon \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \cdot \frac{-\varepsilon \sin \theta}{\Delta} \\
 &\quad + \frac{a}{1 + \varepsilon \cos \theta} \frac{\varepsilon^2 \sin^2 \theta - \Delta^2 \varepsilon \cos \theta}{\Delta^3} \\
 &= \frac{a(1 + \varepsilon \cos \theta)}{\Delta^3} , \\
 x'' &= \frac{(-a\varepsilon \sin \theta)\Delta^3 - 3a(1 + \varepsilon \cos \theta)\Delta^2 \Delta'}{\Delta^6} , \\
 y &= r(\theta) \sin \xi(\theta) \\
 &= \frac{a}{1 + \varepsilon \cos \theta} \cdot \frac{1 + \varepsilon \cos \theta}{\Delta} \\
 &= \frac{a}{\Delta} , \\
 y' &= \frac{-a\Delta'}{\Delta^2} \\
 &= \frac{a\varepsilon \sin \theta}{\Delta^3} , \\
 y'' &= \frac{(a\varepsilon \cos \theta)\Delta^3 - 3(a\varepsilon \sin \theta)\Delta^2 \Delta'}{\Delta^6} , \\
 \sqrt{x'^2 + y'^2} &= \sqrt{\left(\frac{a(1 + \varepsilon \cos \theta)}{\Delta^3}\right)^2 + \left(\frac{a\varepsilon \sin \theta}{\Delta^3}\right)^2} \\
 &= \frac{a}{\Delta^2} .
 \end{aligned}$$

これを (4.11) に代入すると,

$$H = \frac{1 - \varepsilon^2}{2a} \quad (\varepsilon < 1)$$

となり, アンデュロイドの平均曲率は一定になる.

(ii) ノドイド

双曲線を定直線上に滑らないように回転させる. 回転を続けると直線との接点は無限遠に行き, 定直線は双曲線の漸近線に近づく. この極限の状態から, 双曲線のもう一方の側を定直線に沿って回転させる. ノドイドは, このようにして双曲線を定直線上で滑らないように転がしたときの焦点の軌跡として得られるノーダリーとよばれる曲線を定直線のまわりに回転して得られる曲面である.

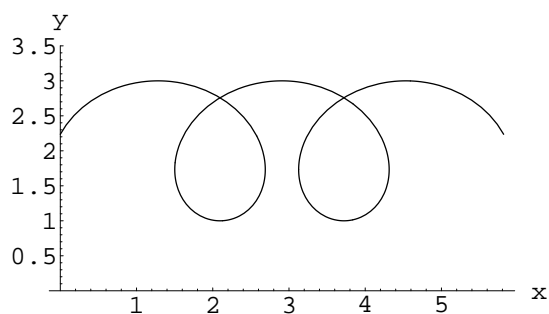
(4.10) において, $\varepsilon > 1$ とすると

$$r = r(\theta) = \frac{a}{1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (a > 0, \varepsilon > 1) .$$

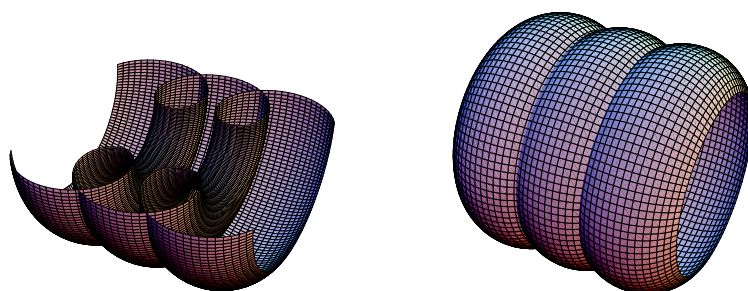
これは双曲線の極表示なので, 同様の計算によってノドイドの平均曲率は,

$$H = \frac{1 - \varepsilon^2}{2a} \quad (\varepsilon > 1)$$

となり，一定であることが確かめられる．



ノードリー



ノドイド

(iii) 懸垂面

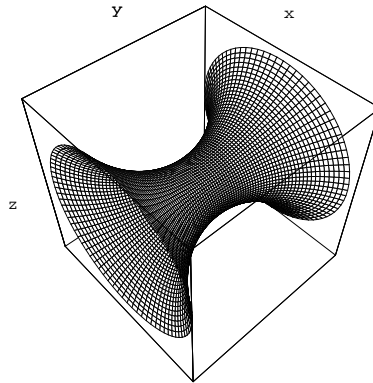
懸垂面は，放物線を定直線上で滑らないように転がしたときの焦点の軌跡として得られる懸垂線を定直線のまわりに回転して得られる曲面である．

(4.10) において， $\varepsilon = 1$ とすると

$$r = r(\theta) = \frac{a}{1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (a > 0, \varepsilon = 1) .$$

これは放物線の極表示なので，同様の計算によって懸垂面の平均曲率も一定であることが確かめられる．

懸垂面は $H = 0$ の曲面で，このように H がすべての点で零になる曲面は極小曲面とよばれる．



懸垂面

5 例

回転面についての次の命題を挙げる .

命題 5.1.

回転面について , 曲線 $r(s)$ を x 軸のまわりにまわしてできる曲面 $p(u, v)$ の平行曲面 $\tilde{p}_1(u, v) = p(u, v) + t\nu(u, v)$ と , 曲線 $r(s)$ の平行曲線 $\tilde{r}(s) = r(s) + t \mathbf{n}(s)$ を x 軸のまわりにまわしてできる曲面 $\tilde{p}_2(u, v)$ は一致する .

証明.

s を弧長パラメータとし , $r(s) = (x(s), y(s))$ とすると , $r(s)$ の平行曲線 $\tilde{r}(s)$ は

$$\begin{aligned} \tilde{r}(s) &= r(s) + t \mathbf{n}(s) \\ &= (x(s) - ty'(s), y(s) + tx'(s)) \end{aligned}$$

となる . これを x 軸のまわりに回転させてできる曲面 $\tilde{p}_2(u, v)$ は ,

$$\begin{aligned} \tilde{p}_2(u, v) &= (x(u) - ty'(u), (y(u) + tx'(u)) \cos v, (y(u) + tx'(u)) \sin v) \\ &= (x(u), y(u) \cos v, y(u) \sin v) + t(-y'(u), x'(u) \cos v, x'(u) \sin v) \\ &= p(u, v) + t\nu(u, v) \quad (\nu(u, v) = (-y'(u), x'(u) \cos v, x'(u) \sin v)) \end{aligned}$$

となる . この $\nu(u, v)$ が曲面 $p(u, v)$ の単位法線ベクトルであることを示せ

れば $\tilde{p}_1(u, v)$ と $\tilde{p}_2(u, v)$ は一致することがわかる .

$$\begin{aligned}\nu(u, v) \cdot p_u(u, v) &= (-y'(u), x'(u) \cos v, x'(u) \sin v) \cdot (x'(u), y'(u) \cos v, y'(u) \sin v) \\ &= -y'(u) \cdot x'(u) + (x'(u) \cos v) \cdot (y'(u) \cos v) \\ &\quad + (x'(u) \sin v) \cdot (y'(u) \sin v) \\ &= 0 ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nu(u, v) \cdot p_v(u, v) &= (-y'(u), x'(u) \cos v, x'(u) \sin v) \cdot (0, -y'(u) \sin v, y'(u) \cos v) \\ &= -y'(u) \cdot 0 + x'(u) \cos v \cdot -y'(u) \sin v \\ &\quad + x'(u) \sin v \cdot y'(u) \cos v \\ &= 0 ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\nu(u, v)|^2 &= (-y'(u))^2 + (x'(u) \cos v)^2 + (x'(u) \sin v)^2 \\ &= (x'(u))^2 + (y'(u))^2 \\ &= 1 .\end{aligned}$$

したがって , $\nu(u, v)$ は曲面 $p(u, v)$ の単位法線ベクトルである . よって , $\tilde{p}_1(u, v)$ と $\tilde{p}_2(u, v)$ は一致する . \square

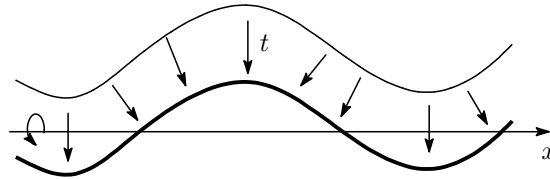
この命題より , 回転面の平行曲面を考えるときはその生成曲線の平行曲線に対応する回転面を考えればよい . さらに $\tilde{p}_1(u, v)$ と $\tilde{p}_2(u, v)$ は一致することから $\tilde{p}_1(u, v)$ のガウス曲率 , 平均曲率と $\tilde{p}_2(u, v)$ のガウス曲率 , 平均曲率はそれぞれ一致することも明らかである .

5.1 平均曲率一定回転面からガウス曲率一定回転面を作る例

平均曲率一定回転面であるアンデュロイドから平行曲面をとり，定理 3.2 によりガウス曲率一定回転面を作ること考えてみる．命題 5.1 により，アンデュロイドの平行曲面はその生成曲線アンデュラリーの平行曲線を x 軸のまわりにまわしてできる曲面と一致する．アンデュロイドの平均曲率 $H = 1 - \varepsilon^2/2$ で一定である． $t = 1/(2H) = a/(1 - \varepsilon^2)$ とおいて，下図のようにアンデュラリーの平行曲線をとり x 軸のまわりにまわすと，その曲面のガウス曲率は，

$$\tilde{K} = 4H^2 = \frac{(1 - \varepsilon^2)^2}{a^2}$$

となり，ガウス曲率一定曲面が得られる．その曲面は，図 4.1 のラグビーボール型のガウス曲率一定曲面が連なった形になると思われる．



5.2 ガウス曲率一定回転面から平均曲率一定回転面を作る例

ここでは，ガウス曲率一定回転面であるラグビーボール型回転面の平行曲面の平均曲率 \tilde{H} を具体的に計算して \tilde{H} を一定にするような t を求め，定理 3.2 と同様の結果が得られることを示す．

まず，ラグビーボール型回転面の生成曲線は，

$$x(u) = \int_0^u \sqrt{1 - a^2 \sin^2 t} dt, y(u) = a \cos u$$

と表される．これを x 軸上に回転させたときにできる回転面のガウス曲率 K ，平均曲率 H は，命題 4.1 より，

$$K = -\frac{y''}{y},$$

$$H = \frac{x'}{2y} - \frac{y''}{2x'}$$

となる．上の x, y をこの式に代入すると，

$$K = 1,$$

$$H = \frac{1 - a^2 \cos 2u}{2a \cos u \sqrt{1 - a^2 \sin^2 2u}}$$

となる．平行曲面の平均曲率 \tilde{H} は，(3.3) 式より，

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= \frac{H - tK}{1 - 2tH + t^2K} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1 - a^2 \cos 2u - 2a \cos u \sqrt{1 - a^2 \sin^2 2u}}{(1 + t^2)a \cos u \sqrt{1 - a^2 \sin^2 2u} - t(1 - a^2 \cos 2u)} .\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}A &= 1 - a^2 \cos 2u , \\ B &= a \cos u \sqrt{1 - a^2 \sin^2 2u}\end{aligned}$$

とおく．また，

$$\frac{A - 2tB}{(1 + t^2)B - tA} = c \text{ (定数)}$$

とおくと，

$$(1 + ct)A - (2t + c + ct^2)B = 0$$

となる． $\{A, B\}$ が一次独立であることより，

$$\begin{cases} 1 + ct = 0 , \\ 2t + c + ct^2 = 0 . \end{cases}$$

これを解くと，

$$t = \pm 1, c = \mp 1 .$$

したがって， $t = 1$ のとき $\tilde{H} = -1/2$ ， $t = -1$ のとき $\tilde{H} = 1/2$ の平行曲面が得られた．よって，定理 3.2 と同様の結果が得られた．

謝辞

卒業論文を書くにあたり，指導教官の田丸博士先生には，ご多忙にもかかわらず，助言やご指導をいただきました．この場を借りて深く御礼申し上げます．

参考文献

- [1] 曲線と曲面 - 微分幾何的アプローチ - 梅原 雅顕，山田 光太郎 裳
華房
- [2] 曲面論講義 - 平均曲率一定曲面入門 劔持 勝衛 培風館