

2006 年度 線型代数学 II 演習 中間試験問題 担当：田丸

以下、全ての問いの解答において、まず最初に証明すべきことを明確に記述すること。証明すべきことが最初に書かれていない場合、答案を採点しないことがあります。この試験では、証明を正確に正しい順序で書くことができることを要請しています。

問題用紙に書いてある定義は、大雑把な定義です。解答を書くときには、(必要ならば) これらを元にして正確な定義を復元して使って下さい。

定義.  $V$  を実線型空間とする。 $W$  が  $V$  の線型部分空間とは、次が成り立つこと:

- (i) 和に関して閉じている, (ii) スカラー倍に関して閉じている.

定義.  $\{v_1, \dots, v_n\}$  が  $V$  の基底であるとは、次が成り立つこと:

- (i) 1 次独立, (ii)  $V$  は  $v_1, \dots, v_n$  で張られる.

問題 1.  $\text{Alt}_3(\mathbb{R}) := \{X \in M_3(\mathbb{R}) \mid {}^tX = -X\}$  とおく。ただしここで、 $M_n(\mathbb{R})$  は  $(n, n)$ -行列全体の成す線形空間。このとき、

- (1)  $\text{Alt}_3(\mathbb{R})$  は  $M_3(\mathbb{R})$  の線型部分空間であることを示せ。(10)
- (2)  $\text{Alt}_3(\mathbb{R})$  の基底を一組予想し、それが基底であることを示せ。(20)

定義. 写像  $f: X \rightarrow Y$  に対して、

- $f$  が単射  $\Leftrightarrow$  行った先が等しければ元が等しい.
- $f$  が全射  $\Leftrightarrow Y$  の元は全て  $X$  から来る.
- $f$  が線型  $\Leftrightarrow$  和とスカラー倍を保つ.

定義. 線型写像  $f: X \rightarrow Y$  に対して、

- $\text{Im}(f) := f(X)$ .
- $\text{Ker}(f)$  は、0 の逆像.

問題 2. 次の写像  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を考える:

$$f = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ x + y + 2z \\ x + z \end{pmatrix}.$$

- (1)  $f$  が単射かどうかを予想し、それを示せ。(10)
- (2)  $f$  が全射かどうかを予想し、それを示せ。(10)
- (3)  $f$  が線型かどうかを予想し、それを示せ。(10)
- (4)  $\text{Im}(f)$  を求めよ。(10)
- (5)  $\text{Ker}(f)$  を求めよ。(10)

問題 3.  $V, W$  を線型空間、 $f: V \rightarrow W$  を線型写像とする。 $\text{Im}(f)$  は  $W$  の部分空間であることを示せ。(20)

追加. ヤマを張って外れた問題があったら、その問題と解答を書け。(10 点程度補填)

追加. 演習に関する意見・感想・コメント・要望がありましたら答案に書いて下さい。