論理記号と証明の入門*

田丸 博士†

1　まえがき

本稿の目的は,「論理記号の読解」「証明の書き方」を演習問題を通して身に付けることである. 計算問題に関しては高校までにもある程度の訓練をしたと思うが, 証明に関しては, 大学の数学科で要求されるものは高校までとは全く違う, と言っても良い. このことが, 大学の数学科で学ぶ数学の最初の難関であると思われる. そして, 今後に学ぶ全ての数学の理解に関わる本質的なものである. この演習問題が, その難関を乗り越える手助けになるように祈る（そう, 逆に言うと, 手助けしか出来ない）. 演習問題の題材としては, 集合・写像・実数を取り扱う. これらは論理記号や証明の訓練に適した題材であるし, また, 数学のどの分野に於いても基本的な概念である. よって, これらの扱いに慣れておくことは, 今後の為にも大事であろう.

2　論理記号

定義 2.1. 次の記号は, 以下の意味で使うものとする:

- 「$\forall \ldots$」で「全ての ... に対して」(for all ...) を表す.
- 「$\exists \ldots$」で「... が存在する」(there exists ...) を表す.
- 「s.t.」で「such that」を表す（略して「：」と書くことも多い）.

問題 2.2. X をこのクラスの学生全員の集合とする. 次の命題の意味を考え, 正しいか正しくないかを判定せよ.

(1) $\forall x \in X$, x は女性.

(2) $\exists x \in X$ s.t. x は 4 月生まれ.

---

* 教養ゼミ（広島大学理学部数学科, 2007 年度田丸担当クラス）配布資料

† tamaru@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

定義 2.3. 命題 P の否定を $\neg P$ で表す.

否定（または否定命題）の定義には深入りしないが, 直感的に考えてほぼ間違い無いと思う. 「x は女性」という命題の否定は「x は女性でない」（または「x は男性である」）, 「x は 4 月生まれ」の否定は「x は 4 月生まれでない」.

問題 2.4. X をこのクラスの学生全員の集合とする. 次の命題の否定命題を作れ.

(1) $\forall x \in X$, x は女性.

(2) $\exists x \in X$ s.t. x は 4 月生まれ.

以上のような命題が, 基本である. これは英語で言うと「This is a pen」くらいの単純な構造であり, 実際には, もっと複雑な（関係代名詞を用いたような）命題を扱うことになる. しかし, どんな複雑な命題も, 単純な命題の組み合わせから成る.

問題 2.5. $X := \{$ ぐー, ちょき, ぱー $\}$ とする. 次の命題が正しいかどうか判定せよ.

(1) $\forall a \in X,\ \exists b \in X\ :\ b$ は a に勝つ.

(2) $\exists b \in X\ :\ \forall a \in X,\ b$ は a に勝つ.

このような $\forall$ や $\exists$ が組み合わされた命題を読むとき, 気を付けることは, 「前から順番に読むこと」. 順番が違うと, 命題の意味が全く異なる場合がある.

注意 2.6. 証明を書く時には, 以下のことを（練習の為に）要請します.

- 示すことをまず最初に書くこと. 証明は, 示すべきことの順番に従って行うこと.
- 示すことに「$\forall x \in X$」とある場合には, 素直に「$\forall x \in X$」を取ること.
- 示すことに「$\exists x \in X$」とある場合には, $x \in X$ を自分で上手く選ぶこと.

3 2-step の命題

以下, いくつかの命題の真偽を判定する問題を挙げる. ここでは, 真偽を判定するとは, 真か偽かを予想しそれを証明する, という意味である. ある命題が偽であることを示すには, その否定命題が真であることを示す必要がある. 否定命題に関する次の性質は重要.

命題 3.1. 命題 P に対し, 次が成り立つ.

- 「$\forall x \in M,\ P$」の否定命題は, 「$\exists x \in M : \neg P$」.
- 「$\exists x \in M : P$」の否定命題は, 「$\forall x \in M,\ \neg P$」.

例 3.2. 集合 $(0,1) := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ に対し, 次の命題の真偽を判定せよ.

(1) $\forall x \in (0,1)$, $x/2 \in (0,1)$.

(2) $\forall x \in (0,1)$, $2x \in (0,1)$.

証明. まず (1) の命題が正しいことを示す.

[示すこと: $\forall x \in (0,1)$, $x/2 \in (0,1)$.]

($\because$) $\forall x \in (0,1)$ に対して,

定義より $0 < x < 1$ なので, 両辺を 2 で割ると $0 < x/2 < 1/2 < 1$.

よって $x/2 \in (0,1)$. □

次に (2) の命題が正しくないことを示す.

[示すこと: $\exists x \in (0,1) : 2x \notin (0,1)$.]

($\because$) $x := 0.8$ とすると,

$0 < x < 1$ なので, $x \in (0,1)$.

$2x = 1.6 > 1$ なので, $2x \notin (0,1)$. □

問題 3.3. 数列 $a_n = 1/(2n+1)$ に対し, 次の命題の真偽を判定せよ.

(1) $\forall n > 10,\ \ |a_n| < 0.05$.

(2) $\forall n > 10,\ \ |a_n - 1| < 0.05$.

問題 3.4. 数列 $a_n = (-2)^n$ に対し, 次の命題の真偽を判定せよ.

(1) $\forall n > 10$, $a_n > 1000$.

(2) $\exists n \in \mathbb{N} : a_n > 1000$.

注意. $\mathbb{N}$ は自然数全体の集合を表す.

問題 3.5. $A := \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} : y = 1 - x^2\}$ に対し, 次の命題の真偽を判定せよ.

(1) $0 \in A$.

(2) $2 \notin A$.

注意: 上の集合は, $A = \{1 - x^2 \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R}\}$ などと表されることが多い.

問題 3.6. $A := \{1/x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{N}\}$ に対し, 次の命題の真偽を判定せよ.

(1) $\forall a \in A$, $a > 0$.

(2) $\forall a \in A$, $a > 0.001$.

4　有界集合

定義 4.1. $A \subset \mathbb{R}$ に対して,

- $m \in \mathbb{R}$ が A の **上界** とは, 次が成り立つこと: $\forall a \in A,\ a \leq m$.
- A が **上に有界** とは, 次が成り立つこと: $\exists m \in \mathbb{R} : m$ は A の上界.
- $m \in \mathbb{R}$ が A の **下界** とは, 次が成り立つこと: $\forall a \in A,\ m \leq a$.
- A が **下に有界** とは, 次が成り立つこと: $\exists m \in \mathbb{R} : m$ は A の下界.

例 4.2. $A := \{1 - x^2 \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R}\}$ とすると,

(1) A は上に有界.

(2) A に下に有界でない.

(1) の証明: [示すこと: $\exists m \in \mathbb{R} : m$ は A の上界]

($\because$)　$m := 2 \in \mathbb{R}$ とおく.

m が A の上界であることを示せば良い. ([示すこと: $\forall a \in A,\ a \leq m$])

$\forall a \in A$ に対して,

$a \in A$ だから定義より $\exists x \in \mathbb{R} : a = 1 - x^2$.

$x^2 \geq 0$ より $a = 1 - x^2 \leq 1 < 2 = m$.

よって m は A の上界である. □

(2) の証明: [示すこと: $\forall m \in \mathbb{R},\ m$ は A の下界でない]

($\because$)　$\forall m \in \mathbb{R}$ に対して,

m が A の下界でないことを示せば良い. ([示すこと: $\exists a \in A : m > a$])

$x := \sqrt{|1 - m| + 1} \in \mathbb{R},\ a := 1 - x^2$ とおく.

定義より $a \in A$.

このとき $a = 1 - (|1 - m| + 1) = -|1 - m| \leq -(1 - m) = m - 1 < m$.

よって m は A の下界ではない. □

注意. (2) の証明での a の決め方は, 上の例の通りである必要は全く無い. 結果的に $a < m$ を満たせば, 何でも良い. 逆に言うと, $a < m$ から逆算して a を決めている（証明で書く順番と頭の中で考える順番は一致するとは限らない）.

問題 4.3. 次の集合が, 上または下にそれぞれ有界かどうか判定せよ:

(1) $A_1 := \{x^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$.

(2) $A_2 := \{\sin\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.

例 4.4. $\mathbb{R} \supset A$ が上に有界ならば, $2A := \{2a \mid a \in A\}$ も上に有界.

証明: [示すこと: $\exists m \in \mathbb{R} : m$ は $2A$ の上界]

($\because$) A が上に有界なので, $\exists m' \in \mathbb{R} : m'$ は A の上界.
$m := 2m'$ と置く.
m が $2A$ の上界であることを示せば良い. ([示すこと: $\forall b \in 2A,\ b \le m$])
$\forall b \in 2A$ に対して,
$2A$ の定義より $\exists a \in A : b = 2a$.
m' は A の上界なので, $a \le m'$.
よって $b = 2a \le 2m' = m$. □

問題 4.5. $A, B \subset \mathbb{R}$ とする. 次を示せ:

(1) A, B が共に上に有界ならば, $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ も上に有界,
(2) A が上に有界ならば, $-A := \{-a \mid a \in A\}$ は下に有界.

5 写像

定義 5.1. 集合 X, Y に対して,

- X の全ての元に対して Y の元が唯一つ定まるとき, その対応を **写像** と呼ぶ,
- 記号 $f : X \to Y$ で, f が X から Y への写像であることを表す,
- 記号 $f : x \mapsto f(x)$ で, 写像 f によって $x \in X$ が $f(x) \in Y$ に移ることを表す.

例えば, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ は写像である. しかし $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1/x$ は写像ではない（$x = 0$ の行き先が決まらないから. 定義域を $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ などにすれば写像になる）. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \pm\sqrt{x}$ も写像ではない（行き先が一つに決まらないから）.

問題 5.2. $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$ とする. A から B への写像を全て書け.

定義 5.3. 集合 A が X の **部分集合**（**subset**）とは, 次が成り立つこと: $\forall a \in A,\ a \in X$.

$A \subset X$ または $X \supset A$ によって, A が X の部分集合であることを表す. また, $A \subset B$ かつ $B \subset A$ であるときに, A と B は等しいと言い, $A = B$ で表す.

定義 5.4. 写像 $f : X \to Y$ に対して,

- $A \subset X$ の f による **像** を次で定義する: $f(A) := \{f(a) \mid a \in A\}$.
- $B \subset Y$ の f による **逆像** を次で定義する: $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.

問題 5.5. $X := \{a, b, c\}$, $Y := \{1, 2, 3\}$ に対し, 次で決まる写像 $f : X \to Y$ を考える: $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 2$.

(1) $A = \{a, b\}$ の f による像を求めよ,
(2) $B = \{2, 3\}$ の f による逆像を求めよ,
(3) $A = \{a, b\}$ に対して, $f^{-1}(f(A))$ を求めよ,
(4) $B = \{2, 3\}$ に対して, $f(f^{-1}(B))$ 求めよ.

注意. $f^{-1}(f(A))$ は, 集合 $f(A) \subset Y$ の f による逆像である. $f(f^{-1}(B))$ は, 集合 $f^{-1}(B) \subset X$ の f による像である.

例 5.6. 写像 $f : X \to Y$ および $A_1, A_2 \subset X$ に対して, $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$.

証明: [示すこと: $\forall b \in f(A_1 \cup A_2)$, $b \in f(A_1) \cup f(A_2)$]
($\because$) $\forall b \in f(A_1 \cup A_2)$ に対して,
像の定義より $\exists a \in A_1 \cup A_2 : b = f(a)$.
和集合の定義より, $a \in A_1$ または $a \in A_2$ が成立.
$a \in A_1$ のとき, $b = f(a) \in f(A_1)$.
$a \in A_2$ のとき, $b = f(a) \in f(A_2)$.
よって $b \in f(A_1)$ または $b \in f(A_2)$ が成立.
和集合の定義より, $b \in f(A_1) \cup f(A_2)$. □

問題 5.7. 写像 $f : X \to Y$ および部分集合 $A_1, A_2 \subset X$, $B_1, B_2 \subset Y$ を考える. 次の命題に対して, 正しければ証明し, 正しくなければ反例を挙げよ:

(1) $f(A_1 \cup A_2) \supset f(A_1) \cup f(A_2)$,
(2) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$,
(3) $f(A_1 \cap A_2) \supset f(A_1) \cap f(A_2)$,
(4) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$,
(5) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) \supset f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$,
(6) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$,
(7) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \supset f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$,
(8) $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$.

注意. 集合 $A_1 \cup A_2 := \{x \mid x \in A_1 \text{または}\ x \in A_2\}$ を **和集合**（**union**）と呼ぶ. また, 集合 $A_1 \cap A_2 := \{x \mid x \in A_1 \text{かつ}\ x \in A_2\}$ を **共通部分**（**intersection**）と呼ぶ. 「または」を $\vee$, 「かつ」を $\wedge$ という記号で表すことも多い.

6　全射と単射

定義 6.1. 写像 $f : X \to Y$ に対して,

- f が **全射** とは, 次が成り立つこと: $\forall y \in Y, \exists x \in X : y = f(x)$.
- f が **単射** とは, 次が成り立つこと: $\forall x_1, x_2 \in X, (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$.
- f が **全単射** とは, f が全射かつ単射であること.

問題 6.2. 集合 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$ に対して,

(1) 写像 $f : X \to Y$ で, 全射であるものと全射でないものを作れ,

(2) 写像 $f : X \to Y$ で, 単射であるものと単射でないものを作れ.

例えば, $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b\}$ の場合には, X から Y への単射を作ることはできない. このようにして, 全射や単射の存在によって, 集合の "元の個数" を比較することができる. 有限集合の場合には当たり前すぎるが, 無限集合の "元の個数"（正確に言うと, 集合の濃度）を比較するときには, 非常に本質的な考え方である.

問題 6.3. $\mathbb{N}$ を自然数全体の集合, $2\mathbb{N} := \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を偶数である自然数全体の集合とする. $\mathbb{N}$ と $2\mathbb{N}$ の間に全単射を作れ.

例 6.4. 写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x + y$ は全射だが単射ではない.

証明（全射）: [示すこと: $\forall z \in \mathbb{R}, \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 : z = f(x, y)$]

$(\because)$　$\forall z \in \mathbb{R}$ に対して,

$(x, y) := (z, 0) \in \mathbb{R}^2$ とすると,

$f(x, y) = f(z, 0) = z + 0 = z.$　　□

証明（単射でない）:

[示すこと: $\exists (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 : f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$ かつ $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$]

$(\because)$　$(x_1, y_1) = (1, 0)$, $(x_2, y_2) = (0, 1)$ とすると,

$f(x_1, y_1) = 1 = f(x_2, y_2)$ であり, かつ, $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$.　　□

問題 6.5. 次の写像が全射および単射であるかを予想し, それらを定義に従って示せ:

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x + 1$,

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto (x, 0)$,

(3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 + y$,

(4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$.

定義 6.6. 写像 $f : X \to Y$ および $g : Y \to Z$ に対して, f と g の **合成写像** を次で定義する: $g \circ f : X \to Z : x \mapsto g(f(x))$.

問題 6.7. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ および $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x + 1$ に対して,

(1) 合成写像 $g \circ f$ を求めよ,

(2) 合成写像 $f \circ g$ を求めよ.

例 6.8. 写像 $f : X \to Y$ および $g : Y \to Z$ に対して, f と g が全射ならば $g \circ f$ も全射.

証明: [示すこと: $\forall z \in Z, \exists x \in X : z = g \circ f(x)$]

[仮定 1: $\forall y_1 \in Y, \exists x_1 \in X : y_1 = f(x_1)$]

[仮定 2: $\forall z_2 \in Z, \exists y_2 \in Y : z_2 = g(y_2)$]

($\because$) $\forall z \in Z$ に対して,

$z_2 := z \in Z$ とすると, 仮定 2 より $\exists y_2 \in Y : z_2 = g(y_2)$.

$y_1 := y_2 \in Y$ とすると, 仮定 1 より $\exists x_1 \in X : y_1 = f(x_1)$.

$x := x_1$ とおく.

このとき $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(x_1)) = g(y_1) = g(y_2) = z_2 = z$. □

上の例題の証明は, 説明のために詳しく書いており, そのため煩雑である. 慣れてきたら, 次のような証明で十分であろう:

証明（簡略版）: [示すこと: $\forall z \in Z, \exists x \in X : z = g \circ f(x)$]

($\because$) $\forall z \in Z$ に対して,

g が全射より $\exists y \in Y : z = g(y)$.

この $y \in Y$ に対して, f が全射より $\exists x \in X : y = f(x)$.

このとき $g \circ f(x) = g(y) = z$. □

問題 6.9. 写像 $f : X \to Y$ および $g : Y \to Z$ に対して, 次が正しい場合には示し, 正しくない場合には反例を挙げよ:

(1) f と g が単射ならば $g \circ f$ も単射,

(2) $g \circ f$ が単射ならば f は単射,

(3) $g \circ f$ が全射ならば f は全射,

(4) $g \circ f$ が単射ならば g は単射,

(5) $g \circ f$ が全射ならば g は全射.