# 第 1 章

# 実数

本章では実数に関する諸概念を学ぶ. ここで学んだ概念は, 後に距離空間や位相空間に対して拡張される. いきなり距離空間・位相空間を扱うと抽象的になり過ぎてしまうことが多々あるので, その準備として, まずここで実数の場合を扱う.

## 1.1 概要

数列の収束を例として, 距離空間や位相空間のコンセプトを（非常に粗く）説明する.

cd ../

**定義 1.1.** 実数 $\mathbb{R}$ に対して,

- 写像 $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto |x - y|$ を **距離**（または **距離関数**）と呼ぶ.
- $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ に対して, $U(a; \varepsilon) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ を $a$ における **$\varepsilon$-近傍** と呼ぶ.

注意. $(a, b) := \{x \mid a < x < b\}$ である（これを **開区間** と呼ぶ）. $\varepsilon$-近傍は次のように表すことも出来る: $U(a; \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, a) < \varepsilon\}$.

**問題 1.2.** $\mathbb{R}$ の距離関数 $d$ が次を満たすことを示せ:

(1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $d(x, y) \geq 0$. さらに, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(2) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $d(x, y) = d(y, x)$.

(3) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

数列の収束は, 距離関数や $\varepsilon$-近傍を用いて定義することができる.

**命題 1.3.** 数列 $a_n$ および $a \in \mathbb{R}$ に対し, 次の (1) - (3) は同値.

(1) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N$, $|a_n - a| < \varepsilon$.

(2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N$, $d(a_n, a) < \varepsilon$.

(3) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, a_n \in U(a;\varepsilon)$.

条件 (1) は通常の数列の収束の定義. 引き算や絶対値などの $\mathbb{R}$ に特有の概念を用いている. 条件 (2) は, 距離を用いて定義を言い換えたもの（引き算や絶対値は表面上は登場しない）. 条件 (3) は, 近傍を用いて定義を言い換えたもの（表面上は距離すら登場しない）. このことから, 次のように考えることは自然であろう.

- ある集合の中の数列（点列）に対して,「距離」さえあれば, 収束を定義することができるのではないか.
- ある集合の中の数列（点列）に対して,「近傍」さえあれば, 収束を定義することができるのではないか.

これから学ぶ「距離空間」と「位相空間」は, まさにそのようなものである. 非常に粗く大雑把に言うと, 次のように言えなくも無い.

- 「距離」が定義された集合を「距離空間」と呼ぶ. 距離を用いることによって, 実数に対して定義された諸概念の多くは, 距離空間に対しても定義することができる.
- 「近傍」が定義された集合を「位相空間」と呼ぶ. 近傍を用いることによって, 実数に対して定義された諸概念の多くは, 位相空間に対しても定義することができる.

距離空間や位相空間を学ぶ目的は, 今後, $\mathbb{R}$ よりもっと複雑な集合を扱うことが必要だからである（例えば, 曲がった曲面とか, 関数の全体の集合とか）. それらの複雑な集合に対しても, $\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^n$ の場合を参考にして, いろいろなことを調べることが可能になる.

**問題 1.4.** $\mathbb{R} \supset A \neq \emptyset$ に対し, $s$ を $A$ の上界とする. このとき $s$ が $A$ の **上限** であるとは, 次が成り立つことであった:

($*$) $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : s - \varepsilon < a$.

このとき（$s$ が $A$ の上界であるという仮定の下で）,

(1) 条件 ($*$) と同値な命題を, 距離関数を用いて書け.

(2) 条件 ($*$) と同値な命題を, $\varepsilon$-近傍を用いて書け.

**問題 1.5.** 区間 $[0,1]$ で定義された連続関数全体の集合を $X$ とする. 次で定義される関数 $d$ が問題 1.2 の条件 (1) - (3) を満たすことを示せ:

$$d : X \times X \to \mathbb{R} : (f,g) \mapsto \int_0^1 |f(t) - g(t)|dt.$$

注意. このように定義された $d$ を距離だと思うことによって, $X$ の中の点列（関数列）の収束などの概念を定義することができる. 距離は, 特にこれである必然性は無い. 他の距離を定義することもできる.

## 1.2　開集合

実数 $\mathbb{R}$ の部分集合 $A$ に対して, 開集合という概念を定義する. 開区間 $(a,b)$ には端っこの点が無いが, その性質を持つ集合を開集合と呼ぶ.

**定義 1.6.** $x \in \mathbb{R}$ が $A$ の **内点** とは, 次が成り立つこと: $\exists \delta > 0 : U(x;\delta) \subset A$.

内点とは, 直感的に言うと「内側にある点」「端っこにない点」のこと.

**問題 1.7.** $A := [0,1)$ に対して, 次が成り立つことを示せ:

(1) $x \in (0,1)$ ならば, $x$ は $A$ の内点,

(2) $0$ は $A$ の内点ではない.

内点を考えることは, 例えば, 微分を考える時に必要となる. 関数 $f : A \to \mathbb{R}$ に対して, $a \in A$ での微分を考えてみよう. 微分係数は

$$\lim_{x \to a} (f(x) - f(a))/(x - a)$$

で定義されるが, 極限を考えるためには右極限と左極限が必要であった. そのためには, 非常に小さい範囲でも良いので, $a$ の周り $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ で $f$ が定義されている必要がある. このことは即ち, $a$ の周りが定義域 $A$ に含まれる, $a$ が $A$ の内点である, ということを要請している. 例えば, 関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ を $x = 0$ で微分せよ, などと言われたら困るであろう. そのため, 解析学などでは, 関数の定義域は開区間や開集合にしているはず.

**定義 1.8.** 次の $A^\circ$ を $A$ の **内部**（または **開核**）と呼ぶ: $A^\circ := \{x \mid \exists \varepsilon > 0 : U(x;\varepsilon) \subset A\}$.

要するに, 内部とは内点の集合である.

**問題 1.9.** $A := [0,1)$ に対して, $A^\circ = (0,1)$ であることを示せ.

**命題 1.10.** 内部に関して, 次が成り立つ:

(1) $\mathbb{R}^\circ = \mathbb{R}$, $\emptyset^\circ = \emptyset$,

(2) $A^\circ \subset A$,

(3) $(a,b) \subset A \Rightarrow (a,b) \subset A^\circ$,

(4) $(a,b)^\circ = (a,b)$,

(5) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

証明は, (1), (2) は容易. (3) 以降は, 良い訓練になるだろう.

**定義 1.11.** $A \subset \mathbb{R}$ に対して, $A$ が $\mathbb{R}$ の中の **開集合** とは, 次が成り立つこと: $\forall a \in A$, $\exists \varepsilon > 0 : U(a;\varepsilon) \subset A$.

開集合とは, 内点だけから成る集合. 端っこが無い集合, と言っても良い.

**問題 1.12.** 次を示せ: $A$ が開集合 $\Leftrightarrow A = A^\circ$.

**問題 1.13.** 次を示せ:

(1) $(a, b)$ は開集合,
(2) $(a, +\infty)$ は開集合,
(3) $(0.1) \cup (2, 3)$ は開集合,
(4) $[a, b)$ は開集合でない.

**問題 1.14.** $A \subset \mathbb{R}$ に対して, 次を示せ:

(1) $A$ が開集合 $\Rightarrow$ $A$ には最大値も最小値も存在しない,
(2) (1) の逆は成立しない,
(3) 有界を仮定したとしても, (1) の逆は成立しない.

**定理 1.15.** $\mathcal{O}$ を $\mathbb{R}$ の中の開集合全体の成す集合族とする. このとき次が成り立つ:

(1) $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{O}$,
(2) $O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{O} \Rightarrow \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{O}$,
(3) $\forall \lambda \in \Lambda$, $O_\lambda \in \mathcal{O} \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$.

この定理の (2) は「有限個の開集合の共通部分は開集合」, (3) は「開集合の和集合は開集合」であることをそれぞれ意味する. 無限個の開集合の和集合は, 開集合になるとは限らない. 和集合と共通部分のどちらが有限個かを忘れた場合は, 以下のような反例を考えるのが良いだろう.

**問題 1.16.** $A_n := (-1/n, 1)$ とする. 次を示せ: $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = [0, 1)$.

**問題 1.17.** $A, B \subset \mathbb{R}$ に対して, 次を示せ:

(1) $A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$,
(2) $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$,
(3) $A^\circ \cup B^\circ \supset (A \cup B)^\circ$ とは限らない.

## 1.3 閉集合

実数 $\mathbb{R}$ の部分集合 $A$ に対して, 閉集合という概念を定義する. 閉区間 $[a,b]$ には端っこの点があるが, その性質を持つ集合を閉集合と呼ぶ.

**定義 1.18.** $x \in \mathbb{R}$ が $A$ の **触点** とは, 次が成り立つこと: $\forall \varepsilon > 0, U(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

触点とは, 直感的に言うと「$A$ のめちゃめちゃ近くにある点」のこと.

**問題 1.19.** $A := (-\infty, 0)$ に対して, 次が成り立つことを示せ:

(1) $0$ は $A$ の触点,
(2) $1$ は $A$ の触点でない.

触点は, 数列の極限と関連がある. 例えば, $A$ に含まれる数列 $\{a_n\}$ が $a$ に収束していたとき, $a \in A$ となるとは限らない（例: 数列 $a_n := 1/n \in (0,2)$）. しかし, この数列の極限値 $a$ は, $A$ に非常に近いはず（開区間 $(0,1)$ に含まれる数列が $2$ に収束することはあり得ないだろう）. 実際, $A$ に含まれる数列の極限値であることと, $A$ の触点であることは, 実は同値である.

**問題 1.20.** $A$ に含まれる数列 $\{a_n\}$ が $a$ に収束していたとする. このとき $a$ は $A$ の触点であることを示せ.

**命題 1.21.** $A \subset \mathbb{R}$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $a \in A$ ならば, $a$ は $A$ の触点,
(2) $x$ が $A$ の触点でない $\Leftrightarrow$ $x$ は $\mathbb{R} - A$ の内点.

ここで $\mathbb{R} - A := \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin A\}$ は $A$ の補集合. 補集合は $A^c$ と書くことも多い.

**定義 1.22.** 次の $\overline{A}$ を $A$ の **閉包** と呼ぶ: $\overline{A} = \{x \mid \forall \varepsilon > 0, U(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset\}$.

要するに, 閉包とは触点の集合.

**問題 1.23.** $A := [0,1)$ に対して, $\overline{A} = [0,1]$ であることを示せ.

**命題 1.24.** 閉包に関して, 次が成り立つ:

(1) $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, $\overline{\emptyset} = \emptyset$,
(2) $A \subset \overline{A}$,
(3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

**定義 1.25.** $A$ が <u>**閉集合**</u> とは, 次が成り立つこと: $\overline{A} = A$.

**定理 1.26.** $A$ が閉集合であるための必要十分条件は, $\mathbb{R} - A$ が開集合であること.

この定理の証明には, 命題 1.21 (2) を用いると良い.

**問題 1.27.** $\mathcal{A}$ を $\mathbb{R}$ の閉集合全体の成す集合族とする. 次が成り立つことを示せ:

(1) $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{A}$,

(2) $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} F_i \in \mathcal{A}$,

(3) $\forall \lambda \in \Lambda,\ F_\lambda \in \mathcal{A} \Rightarrow \displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{A}$.

すなわち, 有限個の閉集合の和集合は閉集合であり, 閉集合の共通部分は閉集合である. 証明は, 定理 1.26 を用いて開集合の場合に帰着させるのが, 簡潔な方法であろう.

**問題 1.28.** 無限個の閉集合の和集合は閉集合になるとは限らない. 反例を挙げよ.

**問題 1.29.** $A, B \subset \mathbb{R}$ に対して, 次を示せ:

(1) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$,

(2) $\overline{A} \cap \overline{B} \supset \overline{A \cap B}$,

(3) $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$ とは限らない.

**問題 1.30.** $A \subset \mathbb{R}$ に対して, 次を示せ:

(1) $m$ が $A$ の上限ならば, $m$ は $A$ の触点,

(2) $m$ が $A$ の上界かつ触点ならば, $m$ は $A$ の上限.

## 1.4 コンパクト集合

コンパクト集合とは, 直感的に言うと小さくて扱いやすい集合である（「小さい」というのは誤解を生む表現かも知れない）. コンパクト集合を考える利点は, 次の連続関数の節で触れる.

**定義 1.31.** 集合族 $\mathfrak{U} = \{U_\lambda \subset \mathbb{R} \mid \lambda \in \Lambda\}$ が $A$ の **開被覆**（**open cover**）とは, 次が成り立つこと:

(1) $\forall \lambda \in \Lambda$, $U_\lambda$ は開集合,

(2) $A \subset \displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$.

**問題 1.32.** $A := (0, 2)$ に対して, 次を示せ:

(1) $\{U(0; 1), U(1; 1), U(2; 1)\}$ は $A$ の開被覆,

(2) $\{U(0; 1/2), U(1; 1/2), U(2; 1/2)\}$ は $A$ の開被覆ではない,

(3) $\{(1/n, 2) \mid n \in \mathbb{N}\}$ は $A$ の開被覆.

**問題 1.33.** 全ての $A \subset \mathbb{R}$ に対して, 次を示せ:

(1) $\{U(a; 1) \mid a \in A\}$ は $A$ の開被覆,

(2) $\{U(0; r) \mid r > 0\}$ も $A$ の開被覆.

**定義 1.34.** $A$ が **コンパクト集合**（**compact set**）とは, 次が成り立つこと:

$$\forall \mathfrak{U}\ (A \text{ の開被覆}),\ \exists U_1, \ldots, U_n \in \mathfrak{U} :\ A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i.$$

コンパクトの定義を言葉で述べると, 「任意の開被覆に対して, 上手く選べば有限個で被覆できる」. つまり, 誤解を生じやすい表現かも知れないが, コンパクト集合とは有限個で事が足りるくらい小さい集合である, という意味.

**問題 1.35.** 次を示せ:

(1) $[0, +\infty)$ はコンパクトでない,

(2) $(0, 1)$ はコンパクトでない.

一般に, コンパクトであることを定義に従って証明するのは難しい.

**定理 1.36 (ハイネ-ボレルの被覆定理).** 閉区間 $[a, b]$ はコンパクトである.

証明には「区間縮小法」と呼ばれる手法を用いる.

**命題 1.37.** $K$ をコンパクト集合, $F$ を閉集合, $F \subset K$ とする. このとき $F$ もコンパクト集合.

すなわち, コンパクト集合の閉部分集合はコンパクトである. 示すべきことは, 「$F$ の任意の開被覆に対して, 上手く有限個を選べること」. 仮定は, 「$K$ の任意の開被覆に対して, 上手く有限個を選べること」. よって証明の粗筋は, 次のようになることが予想される:

(1) $F$ の任意の開被覆を取る,
(2) そこから何とかして $K$ の開被覆を作る,
(3) 仮定より, $K$ の有限被覆を取ることができる,
(4) そこから何とかして $F$ の有限被覆を作る.

勿論, 途中の適切な段階で, $F$ が閉集合であることを用いなくてはならない.

**定理 1.38.** $K$ がコンパクトであるための必要十分条件は, $K$ が有界閉集合であること.

有界閉集合ならばコンパクトであることの証明は, 定理 1.36 と命題 1.37 を用いれば容易. コンパクトならば有界閉集合であることの証明は, 定義に従って行えば良い.

注意. ここで $K \subset \mathbb{R}$ が **有界** とは, 上界と下界が存在すること. 言い換えると, 次が成り立つこと: $\exists a, b \in \mathbb{R} : K \subset [a, b]$.

定理 1.38 を見ると, 「有界閉集合と言った方が簡単なのに, 何故わざわざ開被覆を持ち出して定義するのか」という疑問が思い浮かぶかも知れない. その理由は 2 つある. まず 1 つは, 一般の（距離空間の）場合には, コンパクトと有界閉集合の概念が一致しない場合があること（よって, ここで有界閉集合を定義にしてしまうと, 後で混乱する）. 理由の 2 つめは, 出来るだけ一般の状態で議論を進めたいから. ここでは実数 $\mathbb{R}$ の世界で話をしているが, この先では実数ではなくて距離しか定義されていない世界（距離空間）, あるいは開集合しか定義されていない世界（位相空間）で, 様々なことを調べていく. その時の為に, 全ての概念をできるだけ開集合のみを使って定式化しておいた方が, 後々都合が良い.

## 1.5　連続写像

実数や距離空間や位相空間において, 連続写像は非常に重要な概念である. これは, 線型空間において線型写像が重要であったことと同様. このように, 集合（とその上の構造）と写像（でその構造と合致するもの）を合わせて考えることは, 現代数学では非常に基本的な考え方である.

復習. 写像 $f : X \to Y$ および $A \subset X$, $B \subset Y$ に対して,

- $f(A) := \{y \in Y \mid \exists a \in A : y = f(a)\}$ を $A$ の $f$ による **像**,
- $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ を $B$ の $f$ による **逆像** と呼ぶ.

像の定義は, 省略して次のように表すこともある: $f(A) := \{f(a) \in Y \mid a \in A\}$.

**定義 1.39.** $A \subset \mathbb{R}$ とする. 写像 $f : A \to \mathbb{R}$ が点 $a \in A$ で **連続**（**continuous**）とは, 次が成り立つこと: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : f(U(a;\delta) \cap A) \subset U(f(a);\varepsilon)$.

この連続の定義は, 解析学などでは次のように書かれることが多い.

**問題 1.40.** 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が点 $a \in \mathbb{R}$ で連続であることと, 次が同値であることを示せ: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

連続の直感的なイメージは, グラフが繋がっていることである.

**問題 1.41.** 次を示せ:

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x$ は $x = 0$ で連続,

(2) 次で定義される写像 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $x = 0$ で連続でない: $g(x) := 0$ $(x < 0)$, $g(x) := 1$ $(x \geq 0)$.

**定義 1.42.** 写像 $f : A \to \mathbb{R}$ が **連続** とは, 次が成り立つこと: $\forall a \in A$, $f$ は $a$ で連続.

連続の定義は直感的には「グラフが繋がっていること」なのだが, 次のような場合には注意が必要.

**問題 1.43.** 次で定義される写像 $f : (0,1) \cup (2,3) \to \mathbb{R}$ は連続: $f(x) := 0$ $(x \in (0,1))$, $f(x) := 1$ $(x \in (2,3))$.

**定理 1.44.** 写像 $f : A \to \mathbb{R}$ が連続であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと:
$\forall U$ : 開集合, $\exists O$ : 開集合 s.t. $f^{-1}(U) = A \cap O$.

定理 1.44 の特別な場合として, 次が成り立つ:

**系 1.45.** 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと:
$\forall U$ : 開集合, $f^{-1}(U)$ : 開集合.

すなわち, 連続の必要十分条件は, 開集合の逆像が開集合であること. これには 2 つの大きな意味がある. 1 つは, $\varepsilon - \delta$ を用いなくても連続の判定ができること. これによって連続性の証明はかなり楽になる. 2 つめは, 連続の概念が開集合だけを使って定式化されたこと. これによって, 実数だけでなく, 一般の距離空間や位相空間でも, 写像の連続性を自然に定義することができる.

**問題 1.46.** 問題 1.41 (2) の写像が連続でないことを, 系 1.45 を用いて示せ.

**定理 1.47.** 写像 $f : K \to \mathbb{R}$ が連続で $K$ がコンパクトのとき, 像 $f(K)$ もコンパクト.

証明には, 定理 1.44 を用いる. あとはコンパクトの定義に従えば, 素直に証明できる.

**系 1.48.** 写像 $f : K \to \mathbb{R}$ が連続で $K$ がコンパクトのとき, $f$ は最大値と最小値を持つ.

これがコンパクト集合を考える利点の 1 つである. コンパクト集合で定義された関数は, 様々な良い性質を持つ.

**命題 1.49.** $A, B, C \subset \mathbb{R}$ とする. 写像 $f : A \to B$ と $g : B \to C$ が連続のとき, 合成写像 $g \circ f$ も連続.

この命題も, 定義に従って示すと面倒だが, 定理 1.44 を用いると証明は容易.

**定義 1.50.** $A, B \subset \mathbb{R}$ とする. 写像 $f : A \to B$ が **同相写像** とは, 次が成り立つこと:
(1) $f$ は全単射,
(2) $f$ および $f^{-1}$ が連続.
また, $A$ と $B$ が **同相** とは, 次が成り立つこと: $\exists f : A \to B$ : 同相写像.

$A$ と $B$ が同相であることを, 記号 $A \approx B$ で表す. 「与えられた 2 つの集合 $A$, $B$ が同相かどうかを判定せよ」というのは, 本質的な問題である.

**命題 1.51.** $A, B, C \subset \mathbb{R}$ に対して, 次を示せ:
(1) $A \approx A$,
(2) $A \approx B \Rightarrow B \approx A$,
(3) $A \approx B$, $B \approx C \Rightarrow A \approx C$.

この (1) - (3) の条件を満たす関係を **同値関係** と呼ぶ.

# 第 2 章

# ユークリッド空間

この章では $\mathbb{R}^n$ に関する諸概念を扱う. $\mathbb{R}^n$ 上に定義される標準的な距離を用いて, 開集合・閉集合・コンパクト集合・連続写像などの概念を, 実数 $\mathbb{R}$ の場合と同様に, 定義し調べることができる.

## 2.1 ユークリッド距離

$\mathbb{R}^n$ に標準的な距離を定義する. 以下, $x = (x_i) = (x_1, \ldots, x_n)$ などによって $\mathbb{R}^n$ の元を表すこととする.

**定義 2.1.** $\mathbb{R}^n$ に対して,

- 次で定義される写像 $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を, $\mathbb{R}^n$ の **ユークリッド距離** と呼ぶ:

$$d(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

- $a \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ に対して, $U(a; \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, a) < \varepsilon\}$ を $a$ における **$\varepsilon$-近傍** と呼ぶ.

注意. ユークリッド距離 $d(x, y)$ は, 2 点 $x, y \in \mathbb{R}^n$ を結ぶ線分の長さに等しい. 要するに普通の距離である. このことから, $d$ は標準的な距離と呼ばれることもある.

**問題 2.2.** $\mathbb{R}^n$ に対して, $d(x, y) = ||x - y||$ を示せ. ただしここで,

- 内積を次で定義する: $\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$,
- ノルムを次で定義する: $||x|| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

$\mathbb{R}^n$ の距離も, 次のような, $\mathbb{R}$ の距離と同様の性質を満たす.

**命題 2.3.** $\mathbb{R}^n$ のユークリッド距離 $d$ は次を満たす:

(1) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $d(x,y) \geq 0$. さらに, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(2) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $d(x,y) = d(y,x)$.

(3) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$.

この命題の (3) の性質を **三角不等式** と呼ぶ. 三角不等式の証明には, 次を用いる:

**補題 2.4 (Cauchy-Schwarz の不等式).** $\forall a, b \in \mathbb{R}^n$, $|a \cdot b| \leq ||a|| \cdot ||b||$.

不等式 $|a \cdot b| \leq ||a|| \cdot ||b||$ を, 成分（座標）で書き下すと, 次のようになる:

$$|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

## 2.2 開集合

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 $A$ に対して, 開集合という概念を定義する. 実数 $\mathbb{R}$ の場合と議論の進め方は全く同じである. 始めに内点を定義し, 次に内部を定義し, そして開集合を定義する.

**定義 2.5.** $x \in \mathbb{R}^n$ が $A$ の **内点** とは, 次が成り立つこと:　$\exists \delta > 0 : U(x;\delta) \subset A$.

内点とは, 直感的に言うと「内側にある点」「端っこにない点」のこと（$\mathbb{R}$ の場合と同様）.

**問題 2.6.** $A := \{a \in \mathbb{R}^2 \mid ||a|| \leq 1\}$ に対して, 次が成り立つことを示せ:

(1) $||x|| < 1$ ならば, $x$ は $A$ の内点,

(2) 点 $(1,0)$ は $A$ の内点ではない.

**定義 2.7.** 次の $A^\circ$ を $A$ の **内部**（または **開核**）と呼ぶ:　$A^\circ := \{x \mid \exists \varepsilon > 0 : U(x;\varepsilon) \subset A\}$.

要するに, 内部とは内点の集合である（$\mathbb{R}$ の場合と同様）.

**問題 2.8.** $A := \{a \in \mathbb{R}^2 \mid ||a|| \leq 1\}$ に対して, $A^\circ = \{a \in \mathbb{R}^2 \mid ||a|| < 1\}$ $(= U(0;1))$ であることを示せ.

**命題 2.9.** $\mathbb{R}^n$ の部分集合の内部に関して, 次が成り立つ:

(1) $(\mathbb{R}^n)^\circ = \mathbb{R}^n$, $\emptyset^\circ = \emptyset$,

(2) $A^\circ \subset A$,

(3) $U(a;\varepsilon) \subset A \Rightarrow U(a;\varepsilon) \subset A^\circ$,

(4) $U(a;\varepsilon)^\circ = U(a;\varepsilon)$,

(5) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

証明は, (3) 以外は, 実数 $\mathbb{R}$ の場合と殆ど同じである.

**定義 2.10.** $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して, $A$ が $\mathbb{R}^n$ の中の **開集合** とは, 次が成り立つこと: $\forall a \in A$, $\exists \varepsilon > 0 : U(a; \varepsilon) \subset A$.

開集合とは, 内点だけから成る集合. 定義は $\mathbb{R}$ の場合と全く同様である.

**問題 2.11.** 次を示せ: $A$ が開集合 $\Leftrightarrow A = A^\circ$.

**問題 2.12.** $a \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ に対して, 次を示せ:

(1) $U(a; \varepsilon)$ は開集合,

(2) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, a) \leq 0\}$ は開集合でない,

(3) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$ は開集合,

(4) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq 0\}$ は開集合でない.

**定理 2.13.** $\mathcal{O}$ を $\mathbb{R}^n$ の中の開集合全体の成す集合族とする. このとき次が成り立つ:

(1) $\emptyset, \mathbb{R}^n \in \mathcal{O}$,

(2) $O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{O} \Rightarrow \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{O}$,

(3) $\forall \lambda \in \Lambda$, $O_\lambda \in \mathcal{O} \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$.

すなわち, $\mathbb{R}$ の場合と同様に, 「有限個の開集合の共通部分は開集合」「開集合の和集合は開集合」が成り立つ.

**問題 2.14.** $\mathbb{R}^n$ の無限個の開集合に対して, その共通部分は開集合になるとは限らない. 反例を挙げよ.

実数 $\mathbb{R}$ の開集合でも, $\mathbb{R}^n$ の開集合でも, その直感的なイメージは殆ど同じであるし, 多くの性質は同じように成立している. 正確に言うと, $\mathbb{R}$ でも $\mathbb{R}^n$ でも成り立つような性質にしか興味が無いので, そういうものを選んで紹介している.

## 2.3 閉集合

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 $A$ に対して, 閉集合という概念を定義する. 実数 $\mathbb{R}$ の場合と同様に, 始めに触点を定義し, 次に閉包を定義し, そして閉集合を定義する.

**定義 2.15.** $x \in \mathbb{R}^n$ が $A$ の **触点** とは, 次が成り立つこと: $\forall \varepsilon > 0$, $U(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

触点とは, 直感的に言うと「$A$ のめちゃめちゃ近くにある点」のこと（定義の文言も直感的なイメージも, $\mathbb{R}$ の場合と全く同様である）.

**問題 2.16.** $A := U(0;1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(0,x) < 1\}$ に対して, 次が成り立つことを示せ:

(1) $d(0,p) = 1$ ならば, $p$ は $A$ の触点,

(2) $d(0,p) > 1$ ならば, $p$ は $A$ の触点でない.

**定義 2.17.** 次の $\overline{A}$ を $A$ の <u>**閉包**</u> と呼ぶ: $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall\varepsilon > 0, U(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset\}$.

要するに, 閉包とは触点の集合.

**問題 2.18.** $A := U(0;1) \subset \mathbb{R}^2$ に対して, $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(0,x) \leq 1\}$ であることを示せ.

閉包の直感的なイメージは, $A$ に「端っこ」（または「境界」）をくっ付けたものである. 実数 $\mathbb{R}$ の部分集合の場合には, 「端っこ」は点であった. $\mathbb{R}^2$ の部分集合の場合には, 「端っこ」は（一般的には）曲線である. $\mathbb{R}^3$ の部分集合の場合には, 「端っこ」は（一般的には）曲面である. これより次元が高くなると, イメージすることが困難になるかも知れない…….

**命題 2.19.** 閉包に関して, 次が成り立つ:

(1) $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$, $\overline{\emptyset} = \emptyset$,

(2) $A \subset \overline{A}$,

(3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

**定義 2.20.** $A$ が <u>**閉集合**</u> とは, 次が成り立つこと: $\overline{A} = A$.

**定理 2.21.** $A$ が閉集合であるための必要十分条件は, $\mathbb{R}^n - A$ が開集合であること.

この定理の証明は, $\mathbb{R}$ の場合と全く同様.

**問題 2.22.** $\mathcal{A}$ を $\mathbb{R}^n$ の閉集合全体の成す集合族とする. 次が成り立つことを示せ:

(1) $\emptyset, \mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$,

(2) $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} F_i \in \mathcal{A}$,

(3) $\forall\lambda \in \Lambda,\ F_\lambda \in \mathcal{A} \Rightarrow \displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \in \mathcal{A}$.

すなわち, 有限個の閉集合の和集合は閉集合であり, 閉集合の共通部分は閉集合である. 実数 $\mathbb{R}$ の場合と同様に, 定理 2.21 を用いて開集合の場合に帰着させるのが, 簡潔な証明方法であろう.

**問題 2.23.** 無限個の閉集合の和集合は閉集合になるとは限らない. 反例を挙げよ.

## 2.4　コンパクト集合

実数 $\mathbb{R}$ の部分集合の場合と同様に, $\mathbb{R}^n$ の部分集合に対しても, 開被覆を使ってコンパクトの概念を定義する. この場合も, コンパクトと有界閉集合は同値である.

**定義 2.24.** 集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して, 集合族 $\mathfrak{U} = \{U_\lambda \subset \mathbb{R}^n \mid \lambda \in \Lambda\}$ が $A$ の **開被覆**（**open cover**）とは, 次が成り立つこと:

(1) $\forall \lambda \in \Lambda$, $U_\lambda$ は開集合,

(2) $A \subset \displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$.

**問題 2.25.** $A \subset \mathbb{R}^n$ とする. 次を示せ:

(1) $\{U(a;1) \mid a \in A\}$ は $A$ の開被覆,

(2) $\{U(0;r) \mid r > 0\}$ も $A$ の開被覆.

**定義 2.26.** $A \subset \mathbb{R}^n$ が **コンパクト集合**（**compact set**）とは, 次が成り立つこと:

$$\forall \mathfrak{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \ (A \text{ の開被覆}),\ \exists U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_n} \in \mathfrak{U} : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}.$$

コンパクトの定義を言葉で述べると, 「任意の開被覆に対して, 上手く選べば有限個で被覆できる」. 実数 $\mathbb{R}$ の部分集合の場合と, 定義は全く同じである.

**問題 2.27.** 次を示せ:

(1) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq 0\}$ はコンパクトでない,

(2) $a \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ とする. $\varepsilon$-近傍 $U(a;\varepsilon)$ はコンパクトでない.

一般に, コンパクトであることを定義に従って証明するのは難しい.

**定理 2.28.** 実数 $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ が, $a_i < b_i$ を満たすとする. このとき, 次の集合 $D$ はコンパクトである: $D := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in [a_i, b_i] \text{ for } i = 1, \ldots, n\}$.

証明の方法はいろいろ考えられるが, いずれにしても大変である. 方針だけを 3 通りほど列挙しておく:

(1) $\mathbb{R}$ のときの区間縮小法のような方法で行う,

(2) 点列コンパクトの概念を導入してそれを用いる（教科書の方法）,

(3) $D = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ と書ける（直積集合）ので, 「コンパクトとコンパクトの直積はコンパクト」を示す.

**命題 2.29.** $K(\subset \mathbb{R}^n)$ をコンパクト集合, $F(\subset \mathbb{R}^n)$ を閉集合, $F \subset K$ とする．このとき $F$ もコンパクト集合.

最後に, $\mathbb{R}^n$ の部分集合がコンパクトであるための必要十分条件が, 有界閉集合となることを示したい．そのためには, 有界という概念を定義しなくてはならない．実数 $\mathbb{R}$ の場合には, 有界を「上限と下限が存在する」ことで定義したが, $\mathbb{R}^n$ の場合に上限や下限は無いことに注意.

**定義 2.30.** $A(\subset \mathbb{R}^n)$ が **有界** とは, 次が成り立つこと: $\exists c \in \mathbb{R}^n, \exists \delta > 0 : A \subset U(c;\delta)$.

**問題 2.31.** 次を示せ:

(1) $U(a;\varepsilon)$ は有界である,
(2) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$ は有界でない.

**問題 2.32.** $A \subset \mathbb{R}^n$ とする．次が, $A$ が有界であるための必要十分条件であることを示せ: $\exists \delta' > 0 : A \subset U(0;\delta')$.

**定理 2.33.** $K \subset \mathbb{R}^n$ とする．$K$ がコンパクトであるための必要十分条件は, $K$ が有界閉集合であること.

有界閉集合ならばコンパクトであることの証明は, 定理 2.28 と命題 2.29 を用いれば容易．コンパクトならば有界閉集合であることの証明は, 方針としては, 実数の場合と同じである（閉集合であることの証明の方が, やや面倒）.

## 2.5　連続写像

ここでは, 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ （定義域は $\mathbb{R}^n$ の部分集合であれば良く, 値域も $\mathbb{R}^m$ の部分集合で良い）が連続であることの定義を述べ, その例や性質を調べる.

**定義 2.34.** $A \subset \mathbb{R}^n$ とする．写像 $f : A \to \mathbb{R}^m$ が点 $a \in A$ で **連続**（**continuous**）とは, 次が成り立つこと: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : f(U(a;\delta) \cap A) \subset U(f(a);\varepsilon)$.

定義は, 実数の場合と全く同様である.

**定義 2.35.** 写像 $f : A \to \mathbb{R}^m$ が **連続** とは, 次が成り立つこと: $\forall a \in A$, $f$ は $a$ で連続.

**問題 2.36.** 写像 $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto x_i$ を **射影** と呼ぶ．次を示せ:

(1) 射影 $\pi_i$ は連続である,
(2) 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ に対して, 像 $\pi_i(U)$ は開集合である.

他にも連続写像の例は数多くあるが, それを紹介するために, 一般論を準備しておく.

**定理 2.37.** $A \subset \mathbb{R}^n$ とする. 写像 $f : A \to \mathbb{R}^m$ が連続であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall U (\subset \mathbb{R}^m)$ : 開集合, $\exists O (\subset \mathbb{R}^n)$ : 開集合 s.t. $f^{-1}(U) = A \cap O$.

証明は, 実数の場合と殆ど同じ. この定理を用いて, いろいろな性質が示される.

**系 2.38.** $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$, $C \subset \mathbb{R}^l$ とする. $f : A \to B$ と $g : B \to C$ が共に連続であるとき, 合成写像 $g \circ f : A \to C$ も連続である.

この系を用いると, 次が得られる.

**命題 2.39.** $A \subset \mathbb{R}^n$ とする. 写像 $f : A \to \mathbb{R}^m$ が連続であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall i$, $\pi_i \circ f : A \to \mathbb{R}$ が連続.

ここで, $\pi_i$ は射影である. $f$ が連続ならば $\pi_i \circ f$ が連続であることは, 問題 2.36, 系 2.38 より明らか. $\pi_i \circ f$ が連続ならば $f$ が連続であることは, 定義に従って証明できるが, 自力でやるには難しいかも知れない.

**問題 2.40.** $A \subset \mathbb{R}^n$ とする. 写像 $f, g : A \to \mathbb{R}$ が共に連続であるとき, 次を示せ:

(1) 写像 $f + g : A \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) + g(x)$ は連続,
(2) 写像 $f \cdot g : A \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ は連続.

これらを組み合わせると, 連続写像の例を数多く作ることができる.

**問題 2.41.** 次を示せ:

(1) 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対して, $f(x)$ が $x_1, \ldots, x_n$ の多項式で書けていたとする. このとき, $f$ は連続である.
(2) 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に対して, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ と表したとき, 各 $f_i(x)$ が $x_1, \ldots, x_n$ の多項式で書けていたとする. このとき, $f$ は連続である.

以下, 実数の場合と同様に成り立つ命題を挙げておく.

**定理 2.42.** $K \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクト集合, 写像 $f : K \to \mathbb{R}^m$ を連続写像とする. このとき, 像 $f(K)$ もコンパクト.

**系 2.43.** $K \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクト集合, 写像 $f : K \to \mathbb{R}$ を連続写像とする. このとき, $f$ は最大値と最小値を持つ.

# 第 3 章

# 距離空間

この章では, 一般の距離空間を定義し, 開集合・閉集合・コンパクト集合・連続写像などの概念を定義し調べていく. 実数 $\mathbb{R}$ やユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に, 今までに調べてきた標準的な距離を入れた空間は, 距離空間の典型的な例である. 勿論, それ以外の距離を考えることもできるし, 他の（もっと複雑な）集合に距離を定義することもできる.

## 3.1　距離空間

**定義 3.1.** 集合 $X$ に対して, 関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ が **距離**（または **距離関数**）とは, 次の条件を満たすこと:

(1) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) \geq 0.$ さらに, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$
(2) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = d(y, x).$
(3) $\forall x, y, z \in X,\ d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z).$

距離は, これらの条件さえ満たしていれば, 何でも良い. 集合 $X$ と距離 $d$ の組 $(X, d)$ を **距離空間** と呼ぶ.

**例 3.2.** 実数 $\mathbb{R}$ に対して,

(1) $d_{\mathrm{st}}(x, y) := |x - y|$ は距離（これを **標準的な距離** と呼ぶ）.
(2) $c > 0$ に対して, $c \cdot d_{\mathrm{st}}(x, y) := c|x - y|$ は距離.

**例 3.3.** ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に対して,

(1) ユークリッドの距離 $d_{\mathrm{st}}$ は距離（これを **標準的な距離** と呼ぶこともある）.
(2) $d_{\max}(x, y) := \min_{i=1,\ldots,n}\{|x_i - y_i|\}$ は距離.

これらのように, 標準的な距離以外にも, 距離の候補はいくらでも考えられる. 特に, 次のような非常に特殊な距離もありえる. ユークリッド空間では成立するけど一般の距離空間では成立しない, というような命題を検証するには, このような例を考えると良い.

**例 3.4.** 集合 $X$ に対して, 次の $d_\infty$ は距離（これを **離散距離** と呼ぶ）:

$$d_\infty(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = y, \\ 1 & \text{if } x \neq y. \end{cases}$$

距離空間の部分集合には, 自然に距離が定義される. このことによって, 距離空間の例を無数に作ることができる.

**命題 3.5.** $(X, d)$ を距離空間とし, $A \subset X$ とする. このとき次で定義される $d_A$ は $A$ の距離になる: $d_A(x, y) := d(x, y)$.

このような距離 $d_A$ を **部分距離**, 距離空間 $(A, d_A)$ を **部分距離空間** と呼ぶ. 要するに, $A$ の 2 点間の距離を, $X$ の距離を使って測っているだけ.

この命題により, $\mathbb{R}$ の中の区間や半直線, $\mathbb{R}^2$ の中の曲線, $\mathbb{R}^3$ の中の曲面, などは全て距離空間となる. また, $(n, n)$-行列全体の集合 $M_n(\mathbb{R})$ は（自然に $\mathbb{R}^{n^2}$ と同一視することによって）距離空間となるので, その部分集合, 例えば $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, なども距離空間となる.

## 3.2 開集合

ユークリッド空間の場合と同様に, 開集合を定義する. 距離を取り替えると, 何が開集合になるかが変わる. それは, $\varepsilon$-近傍の形が変わるからである.

**定義 3.6.** 距離空間 $(X, d)$ および $a \in X$, $\varepsilon > 0$ に対して, $a$ の **$\varepsilon$-近傍** を次で定義する: $U(a; \varepsilon) := \{x \in X \mid d(a, x) < \varepsilon\}$.

距離が違うと, $\varepsilon$-近傍は形が全く異なってくる.

**例 3.7.** $\mathbb{R}^2$ に対して,

(1) 標準的な距離 $d_{\mathrm{st}}$ に関する $\varepsilon$-近傍は, 次のような円の内部である:

$$U_{\mathrm{st}}(a; \varepsilon) = \{x \in X \mid (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < \varepsilon^2\}.$$

(2) $d_{\max}$ に関する $\varepsilon$-近傍は, 次のような正方形の内部である:

$$U_{\max}(a; \varepsilon) = \{x \in X \mid |x_1 - a_1| < \varepsilon,\ |x_2 - a_2| < \varepsilon\}.$$

(3) 離散距離 $d_\infty$ に関する $\varepsilon$-近傍は,

$$U_\infty(a;\varepsilon) = \begin{cases} \{a\} & (\text{if } \varepsilon \leq 1), \\ \mathbb{R}^2 & (\text{if } \varepsilon > 1). \end{cases}$$

**定義 3.8.** 距離空間 $(X,d)$ および $A \subset X$ に対して,

(1) $x \in X$ が $A$ の **内点** とは次が成り立つこと: $\exists \varepsilon > 0 : U(x;\varepsilon) \subset A$.

(2) $A$ の **内部** を次で定義する: $A^\circ := \{x \in X \mid x$ は $A$ の内点 $\}$.

(3) $A$ が **開集合** とは, 次が成り立つこと: $\forall a \in A, \exists \varepsilon > 0 : U(x;\varepsilon) \subset A$.

定義はユークリッド空間の場合と全く同じである.

**命題 3.9.** 距離空間の $\varepsilon$-近傍 $U(a;\varepsilon)$ は開集合.

しかしながら, 距離が変わると, 何が開集合であるかが変わる. 例えば, 次のような極端なことが起こる.

**例 3.10.** 離散距離空間 $(X, d_\infty)$ に対して, 全ての部分集合 $A \subset X$ は開集合である.

また, 距離が変わっても開集合は変わらない, ということもある. 距離空間 $(X,d)$ の開集合全体のなす集合族を $\mathcal{O}(X,d)$ で表すことにする.

**命題 3.11.** $\mathbb{R}^n$ に対して, $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{st}}) = \mathcal{O}(\mathbb{R}^n, d_{\max})$.

すなわち, $d_{\mathrm{st}}$ に関する開集合と, $d_{\max}$ に関する開集合は, 全く同じ.

**例 3.12.** $X := [0,1) \subset \mathbb{R}$ とし, $X$ 上の距離 $d$ を $d_{\mathrm{st}}$ の部分距離として定義する. このとき, $[0,1/2) \in \mathcal{O}(X,d)$.

区間 $[0,1/2)$ は $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}})$ の開集合ではないが, $(X,d)$ の開集合になる. 開集合であるかどうかは, どこの中の開集合か, ということを気にしなくてはならない.

**定理 3.13.** 距離空間 $(X,d)$ と部分距離空間 $(A, d_A)$ を考える. このとき, 次が成り立つ: $U \in \mathcal{O}(A, d_A) \Leftrightarrow \exists O \in \mathcal{O}(X,d) : U = O \cap A$.

すなわち, $A$ の開集合とは, $X$ の開集合と $A$ の共通部分のことである.

**定理 3.14.** 距離空間 $(X,d)$ に対して, $\mathcal{O} := \mathcal{O}(X,d)$ とすると, 次が成り立つ:

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$.

(2) $O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{O} \Rightarrow \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{O}$,

(3) $\forall \lambda \in \Lambda,\, O_\lambda \in \mathcal{O} \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$.

今までと同様に, 「有限個の開集合の共通部分は開集合」「開集合の和集合は開集合」. が成り立つ.

余談, というか先の話. 距離空間をさらに抽象化したものとして位相空間というものがある. 距離空間とは集合に距離が与えられたものであったが, 位相空間とは集合に「開集合系」が定義されたものである. 距離であるためにはいくつかの条件を満たしていなくてはならなかったが, 開集合系であるためにもいくつかの条件が必要となる. その条件は, 定理 3.14 で確かめた条件に他ならない.

## 3.3 閉集合

閉集合を定義する. 定義の方法はユークリッド空間の場合と全く同様. しかし, 開集合の場合と同様に, 距離が変わると $\varepsilon$-近傍が変わり, $\varepsilon$-近傍が変わると何が閉集合になるかも大きく変わる.

**定義 3.15.** 距離空間 $(X, d)$ および $A \subset X$ に対して,

(1) $x \in X$ が $A$ の **触点** とは次が成り立つこと: $\forall \varepsilon > 0, U(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.
(2) $A$ の **閉包** を次で定義する: $\overline{A} := \{x \in X \mid x$ は $A$ の触点 $\}$.
(3) $A$ が **閉集合** とは, 次が成り立つこと: $A = \overline{A}$.

ユークリッド空間の場合と全く同様に, 次が成り立つ.

**命題 3.16.** 距離空間 $(X, d)$ および $A \subset X$ に対して,

(1) $A \subset \overline{A}$.
(2) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

開集合の場合と同様に, 距離が変わると閉集合も変わる.

**例 3.17.** 区間 $(0, 1)$ は, 離散距離空間 $(\mathbb{R}, d_\infty)$ の閉集合.

次は, 閉集合に関する最も基本的な定理.

**定理 3.18.** 距離空間 $(X, d)$ および $A \subset X$ を考える. $A$ が閉集合であるための必要十分条件は, $X - A$ が開集合となること.

証明は実数やユークリッド空間の場合と全く同様である. この定理によって, 開集合のことが良く分かっていれば, 閉集合のことも自動的に良く分かることになる. 前章で挙げた開集合の例の補集合を考えれば, それが閉集合の例となっている.

**系 3.19.** 離散距離空間 $(X, d_\infty)$ に対して, 全ての部分集合 $A \subset X$ は閉集合である.

最後に, 離散という言葉の意味を表している例を紹介する.

**問題 3.20.** 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ に $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}})$ の部分距離によって距離 $d$ を定める. このとき, 全ての部分集合 $A \subset \mathbb{Z}$ は $(\mathbb{Z}, d)$ の開集合であることを示せ.

$\mathbb{Z}$ の元は, $\mathbb{R}$ の中にバラバラに入っている. このような状態を離散的と言う（開区間 $(0,1)$ などは「べったり」と入っている; そういう場合は連続的と言う）. このバラバラである状態を開集合の言葉で述べると, 「全ての部分集合が開集合」(必然的に, 全ての部分集合は閉集合）となる訳である. 離散距離 $d_\infty$ は, そういう状態になるような距離である.

## 3.4　コンパクト集合

距離空間に関して, 開被覆を用いてコンパクトの概念を定義する. 当然ながら, ユークリッド空間の中のコンパクト集合の概念の一般化になっている. 一般には, コンパクトと有界閉集合は同値ではないことに注意.

**定義 3.21.** 距離空間 $(X, d)$ に対して, 集合族 $\mathfrak{U} = \{U_\lambda \subset X \mid \lambda \in \Lambda\}$ が $A$ の <u>**開被覆**</u>（<u>**open cover**</u>）とは, 次が成り立つこと:

(1) $\forall \lambda \in \Lambda$, $U_\lambda \in \mathcal{O}(X, d)$.

(2) $X = \displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$.

条件 (2) の右辺の集合を, $\bigcup \mathfrak{U}$ と書くことが多い. ユークリッド空間の場合と比較すると, $X \subset \bigcup \mathfrak{U}$ ではなく $X = \bigcup \mathfrak{U}$ と書かれている部分が違う. それは, 全てを $X$ の中で考えているので, $X \supset \bigcup \mathfrak{U}$ は自動的に成立するから.

**問題 3.22.** $X := (0, 2]$ の距離 $d$ を, $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}})$ からの部分距離で定義する. このとき, 次は $(X, d)$ の開被覆であることを示せ: $\mathfrak{U} = \{(1/n, 2] \mid n \in \mathbb{N}\}$.

距離空間 $(X, d)$ の開被覆を作るためには, $X$ の開集合を取らなくてはならない. $X$ の開集合と $\mathbb{R}$ の開集合の違いに注意.

**定義 3.23.** 距離空間 $(X, d)$ が <u>**コンパクト**</u>（<u>**compact**</u>）とは, 次が成り立つこと:

$$\forall \mathfrak{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \ (X \text{ の開被覆}), \ \exists U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_n} \in \mathfrak{U} : X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}.$$

コンパクトの定義を言葉で述べると, 「任意の開被覆に対して, 上手く選べば有限個で被覆できる」. 言葉だけ考えると, 実数およびユークリッド空間の場合と全く同様である. しかし, ユークリッド空間の場合と全く一致させようとすると, 距離空間の部分集合がコンパクトであるという概念を定義しなくてはならない.

**定義 3.24.** 距離空間 $(X,d)$ および部分集合 $A \subset X$ を考える.

(1) $\mathfrak{U} \subset \mathcal{O}(X,d)$ が $A$ の **開被覆** とは, 次が成り立つこと: $A \subset \bigcup \mathfrak{U}$.

(2) $A$ が $(X,d)$ の **コンパクト部分集合** とは, 次が成り立つこと:

$$\forall \mathfrak{U}\ (A \text{ の開被覆}),\ \exists U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_n} \in \mathfrak{U} : X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}.$$

すなわち, ユークリッド空間の場合に扱ったコンパクト集合とは, 距離空間 $(\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{st}})$ のコンパクト部分集合のことである. この概念と, 距離空間がコンパクトであるととが, 実は一致する.

**定理 3.25.** 距離空間 $(X,d)$ および部分集合 $A \subset X$ を考える. 部分距離空間 $(A, d_A)$ がコンパクトであるための必要十分条件は, $A$ が $(X,d)$ のコンパクト部分集合であること.

この定理によって, 実数およびユークリッド空間で調べたコンパクト集合の例から, コンパクト距離空間の例が多く作られる. また, この定理は, 次のことも主張する: コンパクトという概念は（開集合や閉集合という概念とは違って）どの距離空間の中で考えても変わらない. 例えば, $[0,1)$ は, $\mathbb{R}$ の中で考えれば開集合ではないが, $[0,+\infty)$ の中で考えれば開集合である. 一方で $[0,1)$ は, $\mathbb{R}$ の中で考えても $[0,+\infty)$ の中で考えても, コンパクト部分集合にはならない. このことから, コンパクトという概念は, その集合の性質をより強く反映している, と言える.

**定義 3.26.** 距離空間 $(X,d)$ が **有界** とは, 次が成り立つこと: $\exists x \in X,\ \exists \delta > 0 : X = U(x;\delta)$.

ユークリッド空間の場合と同様に, コンパクトと有界閉集合には関係がある（しかし必要十分とはならない）.

**定理 3.27.** 距離空間 $(X,d)$ のコンパクト部分集合 $K$ は閉集合である.

**問題 3.28.** コンパクト距離空間は有界であることを示せ.

すなわち, コンパクトならば有界閉集合というのは, 正しい.

**問題 3.29.** 離散距離空間 $(\mathbb{R}, d_\infty)$ に対して次を示せ:

(1) 有界であることを示せ.

(2) コンパクトでないことを示せ.

よってこの場合, $\mathbb{R}$ 自身は, $(\mathbb{R}, d_\infty)$ の有界閉集合であるがコンパクトではない. しかしながら, 次は成立する.

**定理 3.30.** コンパクト距離空間 $(X,d)$ の閉集合 $K$ はコンパクト部分集合である.

## 3.5 連続写像

距離空間から距離空間への写像が連続であることを定義する．ユークリッド空間の場合に比べて議論は寧ろ簡潔である．

**定義 3.31.** 距離空間 $(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$ に対して, 写像 $f : X \to Y$ を考える．

(1) $f$ が $a \in X$ で **連続** とは, 次が成り立つこと: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : f(U_X(a; \delta)) \subset U_Y(f(a); \varepsilon)$.

(2) $f$ が **連続** とは次が成り立つこと: $\forall a \in X$, $f$ は $a$ で連続.

この場合, 定義より $U_X(a; \delta) \subset X$ が成り立つので, 実数やユークリッド空間の時のように $f(U_X(a; \delta) \cap X)$ とする必要はない.

**定理 3.32.** 距離空間 $(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$ に対して, 写像 $f : X \to Y$ が連続であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall U \in \mathcal{O}(Y, d_Y)$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}(X, d_X)$.

すなわち, 連続であるための必要十分条件は, 開集合の逆像が開集合となること．実数 $\mathbb{R}$ の場合には, $A \subset \mathbb{R}$ に対して, $f : A \to \mathbb{R}$ が連続であるための必要十分条件は次が成り立つことであった: $\forall U \in \mathcal{O}(\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}})$, $\exists O \in \mathcal{O}(\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}}) : f^{-1}(U) = O \cap A$. この「$\exists O \in \mathcal{O}(\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}}) : f^{-1}(U) = O \cap A$」の部分は, 「$f^{-1}(U) \in \mathcal{O}(A, d_A)$」と同値である.

**問題 3.33.** 連続写像と連続写像の合成写像は連続であることを示せ.

実数の場合と比べて証明は遥かに容易である.

**命題 3.34.** $(X, d_X)$ をコンパクト距離空間, $(Y, d_Y)$ を距離空間とする．写像 $f : X \to Y$ が連続ならば, $f(X)$ は $Y$ のコンパクト部分集合である.

すなわち, コンパクトの連続写像による像はコンパクト.

**定義 3.35.** 距離空間 $(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$ に対して, 写像 $f : X \to Y$ が **同相写像** とは, 次が成り立つこと:

(1) $f$ は全単射,

(2) $f$ と $f^{-1}$ が共に連続.

同相写像 $f : X \to Y$ が存在するときに, 距離空間 $X$ と $Y$ は **同相** であるという．同相ということは, 互いの開集合が移りあうということなので, 開集合で特徴付けられるような性質（閉集合, コンパクト集合, $\ldots$）は, 全て同じになる.

**問題 3.36.** 2 つの距離空間が同相であるとき, 一方がコンパクトならば他方もコンパクトであることを示せ.

注意. 同相写像の定義のうち「$f^{-1}$ が連続」という条件を忘れてはいけない. 全単射かつ連続というだけでは, 逆写像が連続かどうかは分からない.

**問題 3.37.** 写像 $f : (\mathbb{R}, d_\infty) \to (\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}})$ を, $f(x) = x$ で定義する. このとき次を示せ: $f$ が全単射かつ連続だが, $f^{-1}$ は連続ではない.

余談. ベクトル空間における線型同型写像の定義は, 全単射かつ線型な写像であった. この場合には, 逆写像は自動的に線型写像になる（線型代数の演習問題）. そのために,「逆写像も線型写像」という条件は, 線型同型写像の定義に登場しなかったのである. これは寧ろ特別なことであって, 一般には, 逆写像に関する性質にも言及する必要がある.

この同相写像のような「全単射」かつ「構造を保つ」ような写像（同型写像）を考えることは, 数学のどの分野でも登場する. 同型写像で移りあうものは同じものだと考えて（正確に言うと同型という同値関係による同値類を考えて）, その性質を調べる, という手順は, 定石である. この考え方については, この後の位相空間論で, もう少し詳しく登場する予定である.