2007 年度数学通論 II・同演習 中間試験問題

担当: 田丸・木幡・大和

注意

証明問題の解答においては, **まず最初に証明すべきことを明確に記述すること**. この試験では, 証明を正確に正しい順序で書くことができることを要請しています. そのことを意識して答案を書くようにして下さい.

定義

解答する時には, 以下の定義を参考にしても良い. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して,

- $x \in X$ の開近傍系を次で定義: $\mathfrak{N}_x := \{O \in \mathcal{O} \mid x \in O\}$.
- $A \subset X$ の内部を次で定義: $A^\circ := \{x \in X \mid \exists O \in \mathfrak{N}_x : O \subset A\}$.
- $A \subset X$ の閉包を次で定義: $\overline{A} := \{x \in X \mid \forall O \in \mathfrak{N}_x, O \cap A \neq \emptyset\}$.
- $A \subset X$ の相対位相を次で定義: $\mathcal{O}_A := \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}\}$.

また, 次を参考にして良い:

- X の離散位相 := 冪集合 $\mathfrak{P}(X)$.
- X の密着位相 := $\{\emptyset, X\}$.
- 位相空間がコンパクト :⇔ 任意の開被覆に対して有限部分被覆が存在.
- 位相空間が連結 :⇔ 交わらない開集合の和集合として表せない.
- 位相空間が弧状連結 :⇔ 任意の 2 点が連続な曲線で結べる.
- 写像が連続 :⇔ 開集合の逆像が開集合.
- 写像が開写像 :⇔ 開集合の像が開集合.
- 部分集合族 $\mathcal{O}^*$ に対して, $\langle \mathcal{O}^* \rangle := \{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \mid \forall \lambda \in \Lambda, U_\lambda \in \mathcal{O}^*\}$.
- $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ の積位相 := $\langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle$.
- 位相空間がハウスドルフ :⇔ 任意の 2 点が開集合で分離できる.

問題

[1] X を集合, A をその部分集合で, $\emptyset \neq A \neq X$ を満たすものとする. 次に答えよ (証明は不要). (計 20 点, 当てずっぽうは減点)

(1) X の離散位相に関して, A の内部と閉包を書け.

(2) X の密着位相に関して, A の内部と閉包を書け.

[2] 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ に対して, $\mathcal{O}$ を標準的な位相, $\mathcal{O}' = \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ とする. $\mathbb{R}$ の部分集合 A に対し, $\mathcal{O}_A$, $\mathcal{O}'_A$ を, それぞれ $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ からの相対位相とする. 次に答えよ (証明は不要). (各 10 点, 計 20 点)

(1) $(A, \mathcal{O}_A)$ はコンパクトでないが $(A, \mathcal{O}'_A)$ はコンパクトとなる A の例を挙げよ.

(2) $(A, \mathcal{O}_A)$ は連結でないが $(A, \mathcal{O}'_A)$ は連結となる A の例を挙げよ.

[3] $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間, $f : X \to Y$ を連続写像とし, $A \subset X$ を考える. このとき f の A への制限 $f|_A : A \to Y$ は, 相対位相に関して連続であることを示せ. (20 点)

[4] 集合 X の位相 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ に対し, $\mathcal{O}_1$ が $\mathcal{O}_2$ より弱いとする (すなわち $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$). このとき, $(X, \mathcal{O}_2)$ が弧状連結ならば, $(X, \mathcal{O}_1)$ も弧状連結であることを示せ. (20 点)

[5] $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間, $(X \times Y, \mathcal{O})$ をその積空間とする. このとき, 自然な射影 $\pi_X : X \times Y \to X : (x, y) \mapsto x$ が開写像であることを示せ. (20 点)

[6] 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が同相であるとする. このとき, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ がハウスドルフ空間ならば, $(X, \mathcal{O}_X)$ もハウスドルフ空間であることを示せ. (20 点)

[7] 自由問題. 自分で考えた問題 (1 題) とその解答を書け. (最大 20 点)

追加

[8] 講義に関する意見・感想・コメント・要望がありましたら答案に書いて下さい.