

2007年度数学通論 II・同演習 期末試験問題

実施日: 2008/01/29 担当: 田丸・木幡・大和

注意

採点の手間を減らすため、解答用紙の使い方を以下のように指定します: 解答用紙は、横長にして使い、左上に学生番号と氏名と得点記入欄を(十分に余白を取って)書いて下さい。解答用紙の2枚目を使うのは、1枚目の表裏を使ってからにして下さい。

証明問題の解答においては、まず最初に証明すべきことを明確に記述すること。この試験では、証明を正確に正しい順序で書くことができることを要請しています。そのことを意識して答案を書くようにして下さい。

成績に関する注意: 合格ラインのボーダー付近の学生には、レポートを課す場合がある。掲示等に注意しておくように。

定義

- 距離 d から決まる位相 $\mathcal{O}_d :=$ 距離空間の開集合全体の成す集合族。
- 位相空間がハウスドルフ $:\Leftrightarrow$ 任意の2点が開集合で分離できる。
- X の密着位相 $:= \{\emptyset, X\}$ 。
- X の離散位相 $:=$ 冪集合 $\mathfrak{P}(X)$ 。
- $A \subset X$ の相対位相 $\mathcal{O}_A := \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}_X\}$ 。
- 位相空間が連結 $:\Leftrightarrow$ 交わらない開集合の和集合として表せない。
- 写像が連続 $:\Leftrightarrow$ 開集合の逆像が開集合。
- 同相 (位相同型) $:\Leftrightarrow$ 全単射、連続、逆も連続な写像が存在。
- 位相空間がコンパクト $:\Leftrightarrow$ 任意の開被覆に対して有限部分被覆が存在。
- 写像が開写像 $:\Leftrightarrow$ 開集合の像が開集合。
- 部分集合族 \mathcal{O}^* に対して、 $\langle \mathcal{O}^* \rangle := \{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \mid \forall \lambda \in \Lambda, U_\lambda \in \mathcal{O}^*\}$ 。
- (X, \mathcal{O}_X) と (Y, \mathcal{O}_Y) の積位相 $:= \langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle$ 。
- 位相 \mathcal{O}_1 が \mathcal{O}_2 より強い $:\Leftrightarrow \mathcal{O}_1 \supset \mathcal{O}_2$ 。

問題

[1] 次の主張の逆は成立しない。反例を挙げよ。(証明不要, 各 10 点)

- (1) 連結な位相空間の、連続写像による像は連結である。
- (2) コンパクトな位相空間の、連続写像による像はコンパクトである。

[2] 集合 X は一点集合でないとする。次を示せ。(各 10 点)

- (1) \mathcal{O}_d を X の距離 d から決まる位相とすると、 (X, \mathcal{O}_d) はハウスドルフ空間。
- (2) X の密着位相 \mathcal{O} は、距離から決まる位相ではない。

[3] X を集合、 \mathcal{O} を X の離散位相とし、 (X, \mathcal{O}) はコンパクトであると仮定する。このとき X は有限集合であることを示せ。(20 点)

[4] $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間、 $(X \times Y, \mathcal{O})$ をその積空間とする。このとき、自然な射影 $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y : (x, y) \mapsto y$ が開写像であることを示せ。(20 点)

[5] 位相空間 (X, \mathcal{O}_X) 、集合 Y 、全射 $f : X \rightarrow Y$ に対して、 Y の商位相を次で定義する: $\mathcal{O}^f := \{O \subset Y \mid f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X\}$ 。このとき、商位相に関して f は連続であり、さらに、商位相は f を連続にする最も強い位相であることを示せ。(20 点)

[6] 円板 $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ と一点穴あき円板 $D' := D \setminus \{(0, 0)\}$ が同相でないことを説明せよ(オイラー数や基本群の位相不変性を用いて良い)。(20 点)

[7] 自由問題。自分で考えた問題(1題)とその解答を書け。ただし、中間試験の自由問題解答例(講義中に紹介したもの)は避けること。(20 点)

追加

[8] 講義に関する意見・感想・コメント・要望がありましたら答案に書いて下さい。