第 4 章

位相空間

この章では, 位相空間を定義し, 閉集合・コンパクト集合・連続写像などの概念を定義し調べていく．位相とは, 開集合系のことである（もう少し詳しく述べると, 集合の上に位相を定めることは, その集合の部分集合が開集合であるかどうかを定める, ということと同じ）．距離空間の開集合系は, 位相の典型的な例である.

4.1 定義

以前に見たように, 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ やユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に対して自然に距離が定まり, その距離を用いて, 様々な性質を定義し調べることが出来た．そして実は, そもそもの集合が $\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^n$ でなくとも,「距離」さえあれば同じようなことが出来る, ということも見てきた．これが距離空間の定義の動機であった．この章では,「実は距離がなくても, 開集合さえあれば同じようなことが出来る」ということを調べていく.

定義 4.1. X を集合, $\mathfrak{B}(X)$ を巾集合とする． 集合族 $\mathcal{O} \subset \mathfrak{B}(X)$ が X の **位相**（**topology**）とは, 次を満たすこと:

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$.
(2) $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}$, $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.
(3) $\forall O_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$.

集合 X と位相 $\mathcal{O}$ の組 $(X, \mathcal{O})$ を **位相空間**（**topological space**）と呼ぶ.

例 4.2. 距離空間 (X, d) に対して, その開集合全体の成す集合族 $\mathcal{O}$ は, X の位相.

位相の定義に於いて, 無限個の開集合の共通部分が開集合と成るとは限らない．実際に開集合とならない例は, 距離空間を考えれば見付かるであろう．勿論, ユークリッド空間ではない距離空間が数多くあったように, 距離空間ではない位相空間も数多く存在する.

例 4.3. 集合 X に対して, 次は位相である:

(1) $\mathcal{O} := \mathfrak{P}(X)$ （これを **離散位相** と呼ぶ）.

(2) $\mathcal{O} := \{\emptyset, X\}$ （これを **密着位相** と呼ぶ）.

離散位相は, 離散距離 d_∞ から決まる位相に他ならない. 密着位相は, 距離からは決まらない（詳しくは後述）.

例 4.4. 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ に対して, $\mathcal{O} := \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ は $\mathbb{R}$ の位相.

命題 4.5. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, $A \subset X$ とする. このとき $\mathcal{O}_A := \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}\}$ は A の位相（これを **相対位相** と呼ぶ）.

当然ながら $\mathcal{O}_A = \{O' \subset A \mid \exists O \in \mathcal{O} : O' = O \cap A\}$ である. この命題の証明は, 集合論の演習問題.

問題 4.6. (X, d) を距離空間, $A \subset X$ とし, d_A を部分距離とする. このとき, X の距離 d から決まる位相を $\mathcal{O}(X, d)$, この位相から決まる A の相対位相を $\mathcal{O}(X, d)_A$ とすると, 次が成立: $\mathcal{O}(A, d_A) = \mathcal{O}(X, d)_A$.

4.2 近傍系

距離空間において ε-近傍が重要であった. 位相空間では, 一般には距離が無いので ε-近傍という概念は定義できないが, 「近傍」の概念が定義できる.

定義 4.7. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, $x \in X$, $U \subset X$ とする. U が x の **開近傍** とは, 次が成り立つこと: $x \in U \in \mathcal{O}$.

当然ながら, 距離空間 (X, d) における ε-近傍 $U(a; \varepsilon)$ は, 位相空間 $(X, \mathcal{O}_d)$ における開近傍である.

定義 4.8. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, $x \in X$ とする. $\mathfrak{N}_x := \{U \in \mathcal{O} \mid x \in U\}$ を x における **開近傍系** と呼ぶ.

開近傍系とは, x の開近傍全体の成す集合族のこと.

問題 4.9. 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ に, 次のような位相を考える: 離散位相, 密着位相, 例 4.4 の位相. それぞれの位相に対して, 0 の開近傍系を求めよ.

距離空間の場合には, ε-近傍を用いて, 集合の内部・内点が定義された. 位相空間の場合にも, 同様に, 近傍を用いて集合の内部・内点が定義できる.

定義 4.10. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, $A \subset X$ とする.

(1) $x \in X$ が A の **内点** とは次が成り立つこと: $\exists U \in \mathfrak{N}_x : U \subset A$.

(2) A の内部を次で定義する: $A^\circ := \{x \in X \mid x$ は A の内点 $\}$.

定義から直ちに $A^\circ \subset A$ が成り立つことが分かる. 距離空間の場合には, $A = A^\circ$ によって開集合を定義していた. 位相空間の場合には, $A \in \mathcal{O}$ によって開集合は既に定義されていることに注意する.

定理 4.11. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, $A \subset X$ とする. このとき, A が X の開集合であるための必要十分条件は, $A = A^\circ$ となること.

距離空間の場合と同様に, 与えられた集合の内部を求めることは, 良い練習になる.

例 4.12. $(X, \mathcal{O})$ を密着位相を入れた空間とする. このとき $A \subsetneq X$ に対して, $A^\circ = \emptyset$.

問題 4.13. 実数 $\mathbb{R}$ に例 4.4 の位相を入れた空間を考える. このとき, 次の集合の内部を求めよ: $(0, 1)$, $[0, 1]$, $(0, +\infty)$, $[0, +\infty)$, $(-\infty, 0)$, $(-\infty, 0]$.

4.3 閉集合

距離空間では, ε-近傍を用いて触点, 閉包, 閉集合が定義されたことを思い出そう. 全く同様にして位相空間の閉集合を定義する.

定義 4.14. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ および $A \subset X$ に対して,

(1) $x \in X$ が A の **触点** とは次が成り立つこと: $\forall U \in \mathfrak{N}_x, U \cap A \neq \emptyset$.

(2) A の **閉包** を次で定義する: $\overline{A} := \{x \in X \mid x$ は A の触点 $\}$.

(3) A が **閉集合** とは, 次が成り立つこと: $A = \overline{A}$.

当然ながら, 距離空間 (X, d) の閉集合は, 位相空間 $(X, \mathcal{O}_d)$ の閉集合になる. また, $A \subset \overline{A}$ が（距離空間の場合と同様に）成り立つことに注意.

補題 4.15. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$, $A \subset X$ および $x \in X$ に対して, 次が成り立つ: x が A の触点でない $\Leftrightarrow$ x は $X - A$ の内点.

この補題を用いると, 距離空間の場合と全く同様の性質が成り立つ.

定理 4.16. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, $A \subset X$ とする. A が X の閉集合であるための必要十分条件は, $X - A$ が X の開集合となること.

閉集合の典型的な例としては, ユークリッド空間や距離空間の閉集合を思い浮かべるのが良い. しかし, 変な位相を考えた方が, 練習になるかも知れない.

例 4.17. $(X, \mathcal{O})$ を密着位相を入れた空間とする. $\emptyset \neq A \subset X$ に対して, $\overline{A} = X$.

問題 4.18. 実数 $\mathbb{R}$ に例 4.4 の位相を入れた空間を考える. このとき, 次の集合の閉包を求めよ: $(0,1)$, $[0,1]$, $(0,+\infty)$, $[0,+\infty)$, $(-\infty,0)$, $(-\infty,0]$.

4.4　連続写像

関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の連続性は, まず最初の段階では所謂「$\varepsilon - \delta$ 論法」を用いて定義されていた. 距離空間から距離空間への写像 $f : X \to Y$ の連続性も, 実数の場合と同様の考えの下に（ε-近傍を用いて）定義された. これらの定義は一見煩雑なものであったが, 「開集合」という概念を導入することにより, 連続性の概念は一気に簡潔な形になる: 連続であるための必要十分条件は, 全ての開集合の逆像が開集合となること. 位相空間論では, 開集合が与えられたところから出発している. そこで, 次のように定義することは自然であろう.

定義 4.19. 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ に対して, 写像 $f : X \to Y$ が **連続**（**continuous**）であるとは, 次が成り立つこと: $\forall U \in \mathcal{O}_Y$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$.

次は, 定義から容易に示される.

命題 4.20. $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$, $(Z, \mathcal{O}_Z)$ を位相空間, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を連続写像とする. このとき, 合成写像 $g \circ f$ も連続.

位相空間の定義は開集合系によって与えられていたが, これは開近傍系を与えることと同値である. すなわち, 開近傍系のみを使って, 連続写像を特徴付けることができるはず.

命題 4.21. 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ に対して, 写像 $f : X \to Y$ が連続であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall a \in X$, $\forall U \in \mathfrak{N}_{f(a)}$, $f^{-1}(U) \in \mathfrak{N}_a$.

我々は $\mathfrak{N}_a$ を（通常の近傍系ではなく）開近傍系として定義している. そのため, 「$\forall U \in \mathfrak{N}_{f(a)}$, $f^{-1}(U) \in \mathfrak{N}_a$」という条件と「$f$ は点 a で連続」という条件は, 同値でないことに注意する.

位相空間の定義は開集合系によって与えられていたが, これは閉集合系を与えることと同値である. すなわち, 閉集合のみを使って, 連続写像を特徴付けることができるはず.

命題 4.22. 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ に対して, それぞれの閉集合全体の成す集合族を $\mathcal{A}_X$, $\mathcal{A}_Y$ で表す. このとき, 写像 $f : X \to Y$ が連続であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall F \in \mathcal{A}_Y$, $f^{-1}(F) \in \mathcal{A}_X$.

次に, 連続写像と相対位相の関係について考える. A を X の部分集合とする. このとき, 写像 $i : A \to X : a \mapsto a$ を **包含写像** と呼ぶ. また, 写像 $f : X \to Y$ に対して, $f|_A : A \to Y : a \mapsto f(a)$ を f の A への **制限** と呼ぶ.

命題 4.23. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, $A \subset X$ を部分集合, $\mathcal{O}_A$ を A の相対位相とすると,

(1) 包含写像 $i : A \to X$ は連続である,
(2) 連続写像 $f : X \to Y$ の制限 $f|_A : A \to Y$ は連続である.

最後に, 連続写像を用いて, 2 つの位相空間が同じとはどういうことかを定義する.

定義 4.24. 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が **同相**（**位相同型**, **homeomorphic**）とは, 次が成り立つこと: $\exists f : X \to Y$ s.t. 全単射, 連続, かつ f^{-1} も連続.

問題 4.25. 写像 f が全単射かつ連続だからと言って, 逆写像も連続とは限らない. 反例を挙げよ（できるだけ簡単な反例を考えよ）.

これから我々は位相空間の性質を調べていくが, それらは全て「同相で不変」な性質を調べる. ここで, ある性質が同相で不変であるとは, 次が成り立つこと: $(X, \mathcal{O}_X)$ がその性質を満たしていて, $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が同相ならば, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ もその性質を満たす. 例えば（中学校で習う平面内の）三角形を考えよう. 「面積が 1」という性質は, 合同で不変な性質であるが, 相似で不変な性質ではない.

4.5 コンパクト空間

距離空間の場合と全く同様に, 位相空間に対してもコンパクトの概念が定義される.

定義 4.26. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ および $\mathfrak{U} \subset \mathcal{O}$ に対して, $\mathfrak{U}$ が **開被覆**（**open cover**）であるとは, 次が成り立つこと: $X = \bigcup \mathfrak{U}$.

ここで, $\mathfrak{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に対して, $\bigcup \mathfrak{U} := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ と定義している.

定義 4.27. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が **コンパクト**（**compact**）であるとは, 次が成り立つこと: $\forall \mathfrak{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$: 開被覆, $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ s.t. $X = \bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i}$.

勿論, 距離空間 (X, d) がコンパクトならば, 距離から定まる位相 $\mathcal{O}_d$ に関して, 位相空間 $(X, \mathcal{O}_d)$ はコンパクトである.

問題 4.28. X を集合とする. 次を示せ.

(1) X が離散位相に関してコンパクトであるための必要十分条件は, X が有限集合となることである.

(2) X は密着位相に関しては常にコンパクトである.

位相空間の定義は開集合系によって与えられていたが, これは閉集合系を与えることと同値である. すなわち, 閉集合のみを使って, コンパクトを特徴付けることができるはず.

定理 4.29. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ がコンパクトであるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall \mathcal{F} = \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{A}$, "$(\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda, \bigcap_{i=1}^{n} F_{\lambda_i} \neq \emptyset) \Rightarrow \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$".

ここで $\mathcal{A}$ は閉集合全体の成す集合族である. この定理の条件を簡潔に言うと, 閉集合族に対して, 「任意の有限部分族が交わるならば, その閉集合族も交わる」という意味（交わるというのは, 共通部分があるという意味）. この性質を **有限交叉性** と呼ぶ.

例 4.30. $X := [0, +\infty)$ に標準的な位相を入れた空間は, 有限交叉性を持たない（すなわち, コンパクトでない）.

次に, コンパクトと連続写像の関係を調べる.

定理 4.31. $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間, $f : X \to Y$ を連続写像とする. $(X, \mathcal{O}_X)$ がコンパクトならば, $(f(X), \mathcal{O})$ はコンパクト（ただし $\mathcal{O}$ は $\mathcal{O}_Y$ から決まる相対位相）.

この定理の証明は, 距離空間の場合と全く同様.

系 4.32. $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間, $f : X \to Y$ を同相写像とする. このとき, $(X, \mathcal{O}_X)$ がコンパクトであるための必要十分条件は, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ がコンパクトであること.

このことから, コンパクトという性質は同相で不変である, すなわち, 位相空間の性質であると言える.

系 4.33. 自然な位相に関して, $(0, 1)$ と $[0, 1]$ は同相ではない.

理由は, 一方がコンパクトで他方がコンパクトでないから. 同相でないことを定義に従って証明することは, 一般には非常に難しい. 同相でないことの証明には, このような「同相で不変な性質」を利用するのが普通である. ちなみに, 同相で不変ではない性質（例えば「有界」など）は, 利用価値が無いので通常は考えない.

問題 4.34. $(X, \mathcal{O})$ をコンパクト位相空間, A を X の閉集合とする. このとき, $(A, \mathcal{O}_A)$ はコンパクトであることを示せ（ただし $\mathcal{O}_A$ は相対位相）.

証明は距離空間の場合と全く同様である.

4.6 連結空間

位相空間が連結であるとは, 直感的には, 空間が「一つに繋がっている」ことである.

定義 4.35. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が **非連結**（**disconnected**）とは, 次が成り立つこと: $\exists O_1, O_2 \in \mathcal{O} : O_1, O_2 \neq \emptyset, O_1 \cap O_2 = \emptyset, O_1 \cup O_2 = X$.

すなわち, X が非連結とは, 二つの開集合に分解できる, ということ. 非連結でない位相空間を **連結**（**connected**）であるという.

例 4.36. $X := (0,1) \cup [2,3]$ は（標準的な位相に関して）非連結.

実数の場合に, 連結が「繋がっている」というイメージと合致することは, 次から言える.

命題 4.37. $X (\subset \mathbb{R})$ が標準的な位相に関して連結であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall a, b \in X, [a, b] \subset X$.

勿論, 標準的ではない位相を考えると, 上記のような直感は通用しない.

問題 4.38. $X := (0,1) \cup [2,3]$ が, 密着位相, 離散位相, 例 4.4 の位相に関して, 連結であるかどうかを予想してそれを示せ.

次に, 連結の特徴付けを行う. 証明の都合上, 非連結の方が扱いやすいので, そちらの言葉で書くことにする.

定理 4.39. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して, 次は互いに同値:

(1) 非連結,
(2) $\exists A$: 開かつ閉集合 s.t. $\emptyset \neq A \neq X$,
(3) $\exists f : X \to \{1, 2\}$: 連続 s.t. $f(X) = \{1, 2\}$.

問題 4.40. 連結の概念を, 閉集合だけを用いて特徴付けせよ.

次に, 今までと同様に, 連結と連続写像の関係を調べる.

定理 4.41. $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間, $f : X \to Y$ を連続写像とする. $(X, \mathcal{O}_X)$ が連結ならば, $(f(X), \mathcal{O})$ は連結（ただし $\mathcal{O}$ は $\mathcal{O}_Y$ から決まる相対位相）.

証明は, 定義に従って直接証明することもできるし, 定理 4.39 の特徴付けを用いて示すこともできる. 定理 4.41 を用いて, 中間値の定理の簡潔な証明が与えられる.

系 4.42 (中間値の定理). $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ を連続写像とし, $f(a) < f(b)$ とする. このとき次が成立: $\forall l \in (f(a), f(b)), \exists c \in [a,b] : l = f(c)$.

また, 今までと同様に, 定理 4.41 の重要な応用の一つは, 連結という性質は同相で不変となることである.

系 4.43. $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間, $f : X \to Y$ を同相写像とする. このとき, $(X, \mathcal{O}_X)$ が連結であるための必要十分条件は, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が連結であること.

このことを用いると, 例えば, $(0,1)$ と $(0,1) \cup (2,3)$ が同相でないことが示される. 勿論, 2 つの位相空間が共に連結だったとしても, 同相になるとは限らない. その判定には, 例えば次が有用である.

補題 4.44. $f : X \to Y$ を同相写像, $x_0 \in X$ とすると, $X - \{x_0\}$ と $Y - \{f(x_0)\}$ は同相.

証明は, $f|_{X-\{x_0\}} : X - \{x_0\} \to Y - \{f(x_0)\}$ が同相写像となることを示せば良い.

問題 4.45. 以下の集合にはいずれも標準的な位相を入れて考える. 次を示せ.

(1) 閉区間 $[0,1]$ と円周 S^1 は同相でない,

(2) 閉区間 $[0,1]$ と区間 $[0,1)$ は同相でない,

(3) $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^2$ は同相でない.

4.7 弧状連結

一般に, 与えられた位相空間が連結であることを定義に従って証明することは, 非常に困難である. そこで本章では, 連結と類似の概念であるが, より扱いやすい, 弧状連結を紹介する.

定義 4.46. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が **弧状連結**（**path-connected**）とは, 次が成り立つこと: $\forall x, y \in X, \exists c : [0,1] \to X$: 連続 s.t. $c(0) = x$, $c(1) = y$.

上記のような, $c(0) = x$, $c(1) = y$ を満たす連続写像 $c : [0,1] \to X$ のことを, x と y を結ぶ **曲線** あるいは **道** と呼ぶ.

問題 4.47. 次を定義に従って示せ:

(1) $\mathbb{R}$ の開区間 (a,b) や閉区間 $[a,b]$ は弧状連結,

(2) $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ は弧状連結.

今までと同様に, 弧状連結と連続写像の関係を調べる.

定理 4.48. $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間, $f : X \to Y$ を連続写像とする. $(X, \mathcal{O}_X)$ が弧状連結ならば, $(f(X), \mathcal{O})$ は弧状連結（ただし $\mathcal{O}$ は $\mathcal{O}_Y$ から決まる相対位相）.

定理 4.48 から, 弧状連結という性質は同相で不変であることが従う.

系 4.49. $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間, $f : X \to Y$ を同相写像とする. このとき, $(X, \mathcal{O}_X)$ が弧状連結であるための必要十分条件は, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が弧状連結であること.

最後に, 弧状連結と連結の関係について述べる.

定理 4.50. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が弧状連結であるならば, 連結である.

逆に, 連結ならば弧状連結であるとは言えない. 反例がある.

4.8 開基と積位相

積位相とは, 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ があったときに, 直積集合 $X \times Y$ の上に自然に定義される位相である. これによって, 既に知っている位相空間から, 新しい位相空間を得ることができる（トーラスが典型的な例）. 安直に考えると $\mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y$ によって位相を定義すると良さそうだが, これは一般には位相にはならない. そこで「$\mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y$ を開基とする位相」という概念を導入する.

定義 4.51. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して, $\mathcal{O} \supset \mathcal{O}^*$ が **位相 $\mathcal{O}$ の開基** であるとは, 次が成り立つこと: $\forall O \in \mathcal{O}, \exists V_\lambda \in \mathcal{O}^*\ (\lambda \in \Lambda) : O = \bigcup V_\lambda$.

問題 4.52. 次が開基であることを示せ:

(1) $\mathbb{R}$ の標準的な位相 $\mathcal{O}$ に対して, $\mathcal{O}^* := \{(a, b) \subset \mathbb{R} \mid a < b\}$.

(2) 距離空間 (X, d) の自然な位相 $\mathcal{O}_d$ に対して, $\mathcal{O}_d^* := \{U(a; \varepsilon) \mid a \in X, \varepsilon > 0\}$.

直感的には, 開基とは, 位相の「基底」である. 例えば, 距離空間を開集合を考える時に, ε-近傍だけを考えれば十分, と考えるのは自然であろう. 実際, 位相空間の位相は, 開基があればそこから復元できる.

定義 4.53. 集合 X の部分集合族 $\mathcal{O}^*$ に対して, $\mathcal{O}^*$ で **生成される集合族** を次で定義する: $\langle \mathcal{O}^* \rangle := \{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \mid V_\lambda \in \mathcal{O}^*\}$.

命題 4.54. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, $\mathcal{O}^*$ を位相 $\mathcal{O}$ の開基とすると, $\mathcal{O} = \langle \mathcal{O}^* \rangle$.

逆に, 部分集合族 $\mathcal{O}^*$ を先に与えて, そこから位相を作ることを考える. 生成される集合族 $\langle \mathcal{O}^* \rangle$ は, 常に位相になるとは限らない. 位相になるための条件を次で与える.

定義 4.55. 集合 X の部分集合族 $\mathcal{O}^*$ が **開基** とは, 次を満たすこと:

(1) $\bigcup \mathcal{O}^* = X$,

(2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{O}^*$, $\forall x \in B_1 \cap B_2$, $\exists V \in \mathcal{O}^* : x \in V \subset B_1 \cap B_2$.

定理 4.56. $\mathcal{O}^*$ が集合 X の開基であるならば, $\langle \mathcal{O}^* \rangle$ は X の位相である.

この開基の考え方を用いて, 積位相を定義する.

補題 4.57. 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ に対して, $\mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y$ は直積集合 $X \times Y$ の開基.

定義 4.58. 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ に対して, $\langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle$ を **積位相**, $X \times Y$ に積位相を入れた空間を **積空間** と呼ぶ.

命題 4.59. $\mathbb{R}^2$ において, 標準的な位相 $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^2}$ と $\mathbb{R}$ の標準的な位相の積位相 $\langle \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \rangle$ は一致する.

上の命題の証明には次を用いると便利.

補題 4.60. X を集合, $\mathcal{O}_1^*$ と $\mathcal{O}_2^*$ を X の開基とする. このとき, 次が成立:

$$「\forall U \in \mathcal{O}_1^*, \forall x \in U, \exists V_2 \in \mathcal{O}_2^* : x \in V_2 \subset U」 \Rightarrow \langle \mathcal{O}_1^* \rangle \subset \langle \mathcal{O}_2^* \rangle.$$

次に, 積位相の特徴付け (積位相とは, ある条件の下で「最も弱い位相」である, という定理) を紹介する. こちらを定義として採用する場合もある. また, 無限個の直積を考える場合には, こちらの考え方の方が都合が良い.

定義 4.61. $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ を X の位相とする. $\mathcal{O}_1$ が $\mathcal{O}_2$ より **弱い** とは, 次が成り立つこと: $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$.

容易に分かるように, $\mathcal{O}_1$ が $\mathcal{O}_2$ より弱いための必要十分条件は, 次の写像が連続となること: $\mathrm{id.} : (X, \mathcal{O}_2) \to (X, \mathcal{O}_1)$ (恒等写像).

定理 4.62. $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする. $X \times Y$ 上の積位相 $\mathcal{O}$ は, π_X, π_Y が連続となる最も弱い位相である.

ここで, π_X, π_Y は自然な射影を表す. すなわち, 次で定義される写像:

$$\pi_X : X \times Y \to X : (x, y) \mapsto x, \quad \pi_Y : X \times Y \to Y : (x, y) \mapsto y.$$

また, 最も弱い位相であるということを正確に書くと, 次のようになる:

$\forall \mathcal{O}'$: 位相 (π_X, π_Y は連続), $\mathcal{O}$ は $\mathcal{O}'$ より弱い.

次に, 積位相の性質を調べる. まずは, 連続写像との関係.

命題 4.63. $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし, その積位相を $\mathcal{O}$ とする.

(1) 射影 π_X は開写像である, すなわち次が成立: $\forall U \in \mathcal{O}$, $\pi_X(U) \in \mathcal{O}_X$,

(2) $\forall y \in Y$, 次は同相写像: $\pi_X|_{X \times \{y\}} : X \times \{y\} \to X$.

この命題を用いて次が示される.

定理 4.64. 積空間に対して次が成立する:

(1) 連結空間と連結空間の積空間は連結である,

(2) コンパクト空間とコンパクト空間の積空間はコンパクトである.

4.9 商位相

積位相とは, 直積集合の上に定義される位相であった. ここで扱う商位相は, 商集合の上に定義される位相である. 商位相や商空間ではなく, 等化位相や等化空間と呼ばれることもある.

定義 4.65. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, $f : X \to Y$ を全射とする. 次で定義される Y の位相 $\mathcal{O}^f$ を **f から誘導される位相** または **商位相** と呼ぶ: $\mathcal{O}^f := \{O \subset Y \mid f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X\}$.

集合 Y に商位相 $\mathcal{O}^f$ を入れた位相空間を **商空間** と呼ぶ.

問題 4.66. 上で定義された $\mathcal{O}^f$ が位相であることを示せ.

上の設定に於いて, Y に商位相を入れた場合, 写像 f は明らかに連続である. さらに, 次が成立する.

命題 4.67. 商位相 $\mathcal{O}^f$ は, 全射 $f : X \to Y$ を連続とする最も強い位相である.

また, 今までに調べてきた性質から, 次は明らか.

定理 4.68. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, $f : X \to Y$ を全射とする.

(1) $(X, \mathcal{O}_X)$ がコンパクトならば, 商空間 $(Y, \mathcal{O}^f)$ もコンパクトである.

(2) $(X, \mathcal{O}_X)$ が連結ならば, 商空間 $(Y, \mathcal{O}^f)$ も連結である.

(3) $(X, \mathcal{O}_X)$ が弧状連結ならば, 商空間 $(Y, \mathcal{O}^f)$ も弧状連結である.

商位相の定義には, 商集合は表には出てこない. しかし, 商集合を念頭において定義されたものである. 以下は商集合の復習.

定義 4.69. 集合 X に同値関係 $\sim$ が定義されているとする. このとき $x \in X$ に対して,

(1) $C(x) := \{y \in X \mid y \sim x\}$ を x を含む **同値類** と呼ぶ.
(2) $X/\sim := \{C(x) \mid x \in X\}$ を X の $\sim$ による **商集合** と呼ぶ.
(3) 写像 $\pi : X \to X/\sim : x \mapsto C(x)$ を **自然な射影** と呼ぶ.

同値類 $C(x)$ は, $\overline{x}$ や $[x]$ と書かれることも多い.

例 4.70. 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ を, 同値関係 $m \sim n \Leftrightarrow m - n \in 2\mathbb{Z}$ で割って得られる商集合を $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} := \mathbb{Z}/\sim$ と表す. このとき次が成立: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}\}$.

商集合に対して, 自然な射影 π は全射である.

定義 4.71. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, $X/\sim$ を同値関係による商集合とする. 自然な射影 $\pi : X \to X/\sim$ によって誘導される位相 $\mathcal{O}^\pi$ を $X/\sim$ 上の **商位相** と呼ぶ. また $(Y, \mathcal{O}^\pi)$ を **商空間** と呼ぶ.

命題 4.72. 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ に, 次の同値関係を考える: $s \sim t \Leftrightarrow s - t \in \mathbb{Z}$. これによる商空間 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は, 円周 S^1 と同相.

証明の方針: 写像 $f : \mathbb{R} \to S^1 : t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ を考える. これから写像 $\overline{f} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1 : [t] \mapsto f(t)$ を誘導する（well-defined を示す必要がある）. この写像 $\overline{f}$ が同型写像であることを示せば良い. ちなみに, 元の写像 f が開写像であることを用いる必要がある.

同様に, $\mathbb{R}^2$ （または $[0,1] \times [0,1]$ でも良い）に適当な同値関係を入れることにより, 円柱, トーラス, メビウスの帯が商集合として得られる.

4.10 分離公理

我々は位相空間を扱って来たが, 実際に幾何の研究を行うためには, もう少し強い仮定が必要になることが多い. 本章で扱う分離公理は, そのような仮定の名前である. 大雑把に言うと, 分離公理とは「位相が弱すぎない」ための条件である.

定義 4.73. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して, 次の条件を **分離公理** と呼ぶ:

(T_1) $\forall x, y \in X \ (x \neq y)$, $\exists O \in \mathcal{O} : x \in O$, $y \notin O$.
(T_2) $\forall x, y \in X \ (x \neq y)$, $\exists O_1, O_2 \in \mathcal{O} : x \in O_1$, $y \in O_2$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.
(T_3) $\forall F \in \mathcal{A}$, $\forall x \notin F$, $\exists O_1, O_2 \in \mathcal{O} : x \in O_1$, $F \subset O_2$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.
(T_4) $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{A} \ (F_1 \cap F_2 = \emptyset)$, $\exists O_1, O_2 \in \mathcal{O} : F_1 \subset O_1$, $F \subset O_2$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

これらの条件は, 自動的に満たされる訳ではないことに注意. これらの条件を直感的に言うと次のようになる:

(T_2) 2 点を, 開集合で分離できる.

(T_3) 点と閉集合を, 開集合で分離できる.

(T_4) 2 つの閉集合を, 開集合で分離できる.

例 4.74. 実数 $\mathbb{R}$ に対して,

(1) 標準的な位相と離散位相は, (T_1), (T_2), (T_3), (T_4) を全て満たす.

(2) 密着位相と位相 $\{(a, +\infty)\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ は, (T_1), (T_2), (T_3), (T_4) を全て満たさない.

定義 4.75. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して,

(1) $(X, \mathcal{O})$ が **ハウスドルフ空間** であるとは, (T_2) を満たすこと.

(2) $(X, \mathcal{O})$ が **正則空間** であるとは, (T_1) と (T_3) を満たすこと.

(3) $(X, \mathcal{O})$ が **正規空間** であるとは, (T_1) と (T_4) を満たすこと.

今後（来年度以降）の幾何学で扱う場合には, 位相空間はハウスドルフであると仮定して話を進める場合が多い.

補題 4.76. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が (T_1) であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall x \in X$, $\{x\} \in \mathcal{A}$.

すなわち, (T_1) であるための必要十分条件は, 一点集合が閉集合であること. このことを用いると, 次が示される.

定理 4.77. 位相空間に対して, 次が成立: 正規 $\Rightarrow$ 正則 $\Rightarrow$ ハウスドルフ $\Rightarrow$ (T_1).

最後に, 位相空間の位相が, 距離から決まっているかどうか, という問題を考えよう.

定義 4.78. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が **距離化可能** とは次が成り立つこと: $\exists d$: 距離 : $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$.

定理 4.79. (X, d) を距離空間, $\mathcal{O}_d$ を距離から決まる位相とすると, $(X, \mathcal{O}_d)$ は正規空間.

このことから逆に, 位相空間が正規でないならば距離空間には成り得ないことが分かる. 例えば, $\mathbb{R}$ の密着位相などは距離化不可能. ではどういう位相空間ならば距離化可能であるか, というのは自然な問題である.

定義 4.80. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して, 次を **第二可算公理** と呼ぶ: $\exists \mathcal{O}^*$: 可算開基.

第二可算公理は, 分離公理とは逆に「開集合が強過ぎない」ための条件である.

定理 4.81. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が正規かつ第二可算公理を満たすならば, 距離化可能である.

第 5 章

単体的複体

本章の目的は, 「不変量」と呼ばれる概念を紹介することである. この不変量という概念は, 数学のあらゆる場面で登場する重要なものである. 位相空間 X に対して, ある「量」$\alpha(X)$ が（同相に関する）不変量であるとは, 次が成り立つこと: X と Y が同相ならば $\alpha(X) = \alpha(Y)$. 例えば, 三角形の面積やベクトル空間の次元は, 不変量の典型的な例である. ここでは, 単体的複体と呼ばれる特別な（扱いやすい）位相空間に対して, ホモロジーやオイラー数といった不変量を定義し, 簡単な場合に実際にそれらを計算して求める.

5.1 単体

単体とは, 直感的には, 多角形で囲まれた面や多面体で囲まれた領域, あるいはその高次元のものである.

定義 5.1. V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする.

(1) $V \supset C$ が **凸** (**convex**) とは, 次が成り立つこと: $\forall c_1, c_2 \in C$, $\forall t \in [0,1]$, $tc_1 + (1-t)c_2 \in C$.

(2) $V \supset \{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ が **凸独立** とは, $\{v_1 - v_0, v_2 - v_0, \ldots, v_k - v_0\}$ が一次独立となること.

凸集合とは, 直感的に言うと「へこみがない」集合である.

命題 5.2. $V \supset \{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ が凸独立のとき, $\exists C \subset V : C$ は $\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ を含む最小の凸集合.

C が $\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ を含む最小の凸集合であることを正確に述べると, 次のようになる:「$\forall C' : \{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ を含む凸集合, $C \subset C'$」. 証明には, C として「$\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$

を含む全ての凸集合の共通部分」を取れば良い．$\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ を含む最小の凸集合を k**-単体** (k**-simplex**) と呼び, $[v_0, v_1, \ldots, v_k]$ で表す．また k のことを単体の **次元** と呼ぶ.

例 5.3. 次元が 3 以下の単体に対して, 次が成り立つ:

(1) 0-単体 $[v_0]$ は, 一点集合（$[v_0] = \{v_0\}$）.

(2) 1-単体 $[v_0, v_1]$ は, v_0 と v_1 の間の線分（$[v_0, v_1] = \{tv_0 + (1-t)v_1 \mid 0 \leq t \leq 1\}$）.

(3) 2-単体 $[v_0, v_1, v_2]$ は, v_0, v_1, v_2 で囲まれた三角形（内部を含む）.

(4) 3-単体 $[v_0, v_1, v_2, v_3]$ は, v_0, v_1, v_2, v_3 で囲まれた三角錐（内部を含む）.

定理 5.4. k-単体 $C := [v_0, v_1, \ldots, v_k]$ に対し, $C = \{\sum_{i=0}^{k} a_i v_i \mid a_i \geq 0,\ \sum_{i=0}^{k} a_i = 1\}$.

このように, 単体とは「多面体とその内部」であると思って差し支えない．単体は（V の自然な位相からの相対位相により）位相空間となる.

5.2　単体的複体

単体的複体とは, いくつかの単体の集まりで所定の性質を満たすもの, として定義される．まずは具体例を通して直感的なイメージを掴むことが重要（頂点や辺や面と深く関係することを感じて欲しい）．また, 数学的にきちんと扱うことも大事であるが, その時, ユークリッド空間の部分集合と部分集合族の区別に注意する必要がある.

定義 5.5. k-単体 $[s] := [v_0, v_1, \ldots, v_k]$ に対し, 次を **開単体** と呼ぶ:

$$(s) := (v_0, v_1, \ldots, v_k) := \{\sum_{i=0}^{k} a_i v_i \in [s] \mid a_i > 0\}$$

開単体と区別する為に, $[s]$ を **閉単体** と呼ぶこともある.

定義 5.6. k-単体 $[s] := [v_0, v_1, \ldots, v_k]$ に対して,

(1) $v_0, v_1, \ldots, v_k$ を $[s]$ の **頂点** と呼ぶ.

(2) $\{j_0, \ldots, j_h\} \subset \{0, \ldots, k\}$ に対し, $(v_{j_0}, v_{j_1}, \ldots, v_{j_h})$ を $[s]$ の **開辺単体** と呼ぶ.

開辺単体であることを記号で $(v_{j_0}, v_{j_1}, \ldots, v_{j_h}) \prec [s]$ のように表す.

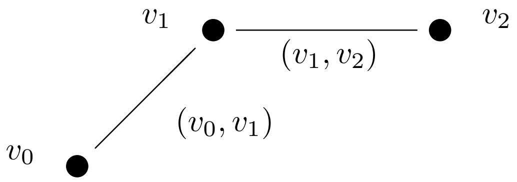
定義 5.7. 開単体 (s_i) $(i = 1, \ldots, m)$ に対し, 集合族 $K := \{(s_i) \mid i = 1, \ldots, m\}$ が **単体的複体** であるとは, 次が成立すること:

(1) $\forall (s) \in K,\ \ \forall (s') \prec (s),\ \ (s') \in K,$

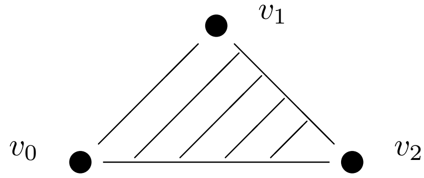
(2) $\forall (s_1), (s_2) \in K,$ 「$(s_1) \cap (s_2) \neq \emptyset \Rightarrow (s_1) = (s_2)$」.

単体的複体 K の **次元** を, K に属する単体の次元のうち最大のものとして定義する．すなわち, $\dim K := \max_{(s)\in K} \dim\,(s)$. 典型的な例は, 次のようなものである:

1 次元単体的複体の例



2 次元単体的複体の例



上の図で表された単体的複体を式で書くと, 左のものは $\{(v_0), (v_1), (v_2), (v_0, v_1), (v_1, v_2)\}$ であり, 右のものは $\{(v_0), (v_1), (v_2), (v_0, v_1), (v_1, v_2), (v_1, v_2), (v_0, v_1, v_2)\}$ である．これらは集合族であることに注意（平面上の点の集合ではない）．一般に, 次が成り立つ.

命題 5.8. $[s]$ を単体とすると, $K := \{(s') \mid (s') \prec [s]\}$ は単体的複体.

単体的複体 $K = \{(s_i)\}$ に対して, $[K] := \bigcup (s_i)$ と定義する．この $[K]$ は, ベクトル空間 V の部分集合であるので, V からの相対位相によって自然に位相空間となる.

5.3　オイラー数

単体的複体 K に対して, オイラー数を定義する．オイラー数は, 位相空間 $[K]$ の位相不変量となっている．不変量は, 「同相でないこと」を証明する時の強力な道具となる.

定義 5.9. K を単体的複体, α_l を K に含まれる l-単体の数とする．このとき, K のオイラー数 $\chi(K)$ を次で定義する: $\chi(K) := \sum (-1)^l \alpha_l$.

オイラー数は, $[K]$ の頂点の数, 辺の数, 面の数, ... を数えて, それを符号を付けて足し合わせたものである．すなわち, 多面体のオイラー数を一般化したものである．多面体のオイラー数は全て 2 であったが, それは次の理由による.

定理 5.10. 単体的複体 K, K' に対し, $[K]$ と $[K']$ が同相ならば, $\chi(K) = \chi(K')$.

このような性質を満たすものを **位相不変量** と呼ぶ．任意の多面体は同相であることから, 次が示される.

系 5.11. 任意の多面体のオイラー数は 2 である.

位相不変量の最も顕著な特徴は, 位相空間が同相でないことの証明に使える点である．位相不変量であることの条件の対偶は, 「オイラー数が等しくないならば同相でない」．よって, 同相でないことを示すためには, オイラー数が等しくないことを言えば良い.

例 5.12. 閉区間 $[0,1]$ と円周 S^1 は位相同型でない.

閉区間 $[0,1]$ は, 単体的複体 $K=\{(v_0),(v_1),(V_0,v_1)\}$ を考えると, $[0,1]\cong[K]$. 一方で円周 S^1 は, 単体的複体 $K'=\{(V_0),(v_1),(v_2),(v_0,v_1),(v_1,v_2),(v_2,v_0)\}$ を考えると, $S^1\cong[K']$. ところが $\chi(K)=1\neq 0-\chi(K')$ なので, $[K]$ と $[K']$ は位相同型でない. また, 全く同様に, 球面 S^2 とトーラス T^2 が位相同型でないことも証明できる. 勿論, ホモロジー群やオイラー数が等しいからと言って同型とは限らないことに注意.

5.4　基本群

オイラー数は, 位相空間に対して整数を対応される不変量であったが, 整数ではなく「群」を対応させる不変量がある. その代表的なものが, ここで扱う基本群である. 基本群は, 直感的には, 位相空間の「穴の数」を表す.

基本群の定義には, 道を用いる. ここで, 位相空間 X の道とは, 連続写像 $\alpha:[0,1]\to X$ のことであった. 始点と終点を明記する場合には, $\alpha(0)$ と $\alpha(1)$ を結ぶ道, と呼ぶ.

定義 5.13. X を位相空間とし, $x,y\in X$ とする. x_0 と x_1 を結ぶ道 α,β が **ホモトピック** であるとは, 次が成り立つこと: $\exists F:[0,1]\times[0,1]\to X$: 連続 s.t.

(1) $\forall t\in[0,1]$, $F(t,0)=\alpha(t)$, $F(t,1)=\beta(t)$.

(2) $\forall s\in[0,1]$, $F(0,s)=x_0$, $F(1,s)=x_1$.

道 α,β がホモトピックであることを, 記号 $\alpha\simeq\beta$ で表す. ホモトピックとは, 直感的に言うと, 両端を固定しながら α を β に連続的に変形できることである. 例えば, $X=\mathbb{R}^2$ なら, 両端が同じ道は常にホモトピックである. しかし, もし α と β の囲む領域に穴が空いていたら, α と β はホモトピックでない.

命題 5.14. ホモトピックという関係は, 同値関係である.

定義 5.15. $x_0\in X$ とする. このとき, 次を x_0 を基点とする X の **基本群** と呼ぶ:

$$\pi_1(X,x_0):=\{\alpha: x_0 \text{ から } x_0 \text{ への道 }\}/\simeq .$$

注意. 定義に登場するような, 始点と終点が同じ道のことを, 閉じた道, あるいはループと呼ぶ. 定義の右辺は, 同値関係 $\simeq$ による商集合.

命題 5.16. 基本群 $\pi_1(X,x_0)$ には, 次によって群構造が入る.

(1) α, β を x_0 を基点とするループに対して, その積 $\alpha\beta$ を次で定義する:

$$(\alpha\beta)(t):=\begin{cases}\alpha(2t) & (t\in[0,1/2]),\\ \beta(2t-1) & (t\in[1/2,1]).\end{cases}$$

(2) $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$ に対して, $[\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha\beta] \in \pi_1(X, x_0)$.

基本群は, 一般には基点 x_0 の取り方に依存するが, 特別な場合には基点の取り方に依らない.

定理 5.17. X が弧状連結のとき, $\forall x_0, x_1 \in X$, $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$（群として同型）.

弧状連結の時, x_0 と x_1 を結ぶ道 c が存在する．これを用いると定理は証明できる．弧状連結の場合,（適当な点を基点とする）基本群を $\pi_1(X)$ で表すことにする.

例 5.18. $\pi_1(\mathbb{R}^2) = 0$（単位元だけの群）, $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$（加法群）.

$\mathbb{R}^2$ の場合には, 例えば基点として原点 o を取ると,「全てのループは自明なループとホモトピック」ということを主張している．ここで自明なループとは, $\alpha(t) = o$ $(\forall t \in [0, 1])$ のこと．円周 S^1 の場合には, 円周に沿って n 周するループを考えれば良い．位相空間の穴の数が増えると,「それぞれの穴の周りを何周するか」によってホモトピックでないループが作られる．よって, 基本群は, 直感的には穴の数を表している, と言って良い.

定理 5.19. X, Y が弧状連結とする．このとき, X と Y が同相ならば, $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$.

すなわち, 基本群は位相不変量である．これを用いて, 例えば閉区間と円周が同相でないことが証明できる．いろいろな位相空間（あるいは単体的複体）に対して, 基本群を調べることによって, 同相の判定をすることが出来る．勿論, 基本群が同じだからと言って同相とは言えない.

5.5 単体的複体のホモロジー群

ホモロジー群とは, オイラー数の親玉に相当する不変量である．大雑把に言うと, ホモロジー群の次元からオイラー数が決まる（すなわち, ホモロジー群が位相不変量であることが言えれば, その系としてオイラー数が位相不変量であることが従う）．しかしながら, この講義ではホモロジーの解説は省略する.