平成19年度卒業論文
幾何学とサッカー：シュートコースに関する考察

広島大学理学部数学科
B034381　与儀　勉
指導教官　田丸博士准教授

平成20 年2 月7 日

目 次

1　はじめに

私は平面図形や高校数学で習った公式をを用いて身近な問題である『サッカーにおけるシュートコース』ついて論文を書いた。

私は中学時代にキーパーをしており、その際、キーパーの動きはシュートに対して垂直に取りに行き、位置取りについてはゴールネットの中心とシューターを結ぶ直線上にいるように指導されたが、それが幾何学的に正しいかを調べることにした。また、この結果を使い、キーパーが最適位置にいると仮定したとき、シューターの位置とシュートの決めやすさの関係はどのようになっているかを調べた。

具体的には、ゴールキーパー、シューター、ボールを点で、シュートは直線、これらを平面で考え、キーパーがキャッチする点に到着するまでの時間、ボールがキャッチされる点に到着するまでの時間の比でキーパーの取りやすさ、シュートの決めやすさを定義している。問題を解くにあたり、厳密には三次元で考えたり、シュートの軌跡は曲線だったりと論文内の条件設定とは異なる点が多々あるが、数学的に考察しやすいよう定めていることを考慮して頂きたい。

先に結論を述べると、

・キーパーはシュートに対して垂直に取りに行くのでなく、キーパーとシューターを結ぶ直線に垂直に取りに行くほうがよい。
・キーパーの最適位置はゴールポストとシューターのつくる角の二等分線上である。
・キーパーが最適位置にいるとき、ゴールポストとシューターの三点を通る円周上ならどの位置からシュートしても決めやすさは変わらない。
・シューターの決めやすさが一定なら、ゴールポストとシューターのつくる角の二等分線とゴールの直角二等分線との交点を中心にキーパーは動くので中学時代に指導された位置取りについてはおおまかにいえば合っている。

という結果が得られた。

2　問題設定

[**問題**]

サッカーにおいて

(1). キーパーがボールを取るための最適な動きは？

(2). シューターに対し、キーパーの最適位置はどこか？

(3). シューターの位置とシュートの決めやすさの関係はどのようになっているか？

問題を解くにあたって、次のように条件を定める。

[**条件**]

・高さは考えず二次元平面で考察する。

・シュートされたボールの軌跡は直線で考える。

・シュートされたボールの速度とキーパーの動く速度は一定。

これらの問題を幾何学的に考察するにあたり、最初に次のように定めておく。

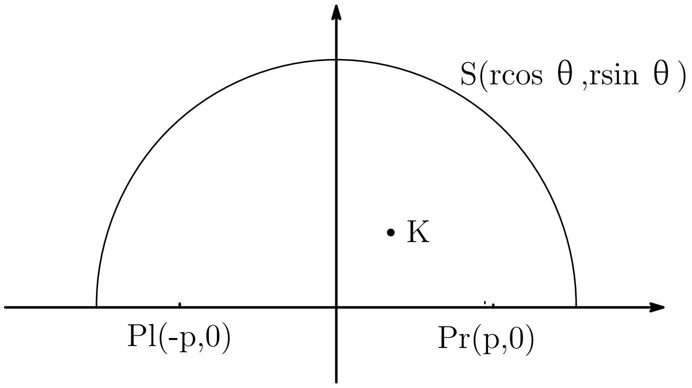
キーパーの動く速さを v_k、シュートされたボールの速さを v_s とし、キーパーがキャッチする点に到着するまでの時間を T_k、ボールがキャッチされる点に到着するまでの時間 T_S とする。

ゴールの中心は O とし、ゴールラインを x 軸、ゴールの中心を通るように y 軸をとり、ゴールの右隅を P_r、左隅を P_l、キーパーを K、シューターを S、ボールをキャッチする点を C、$|OP_r|$=$|OP_l| = p$、$\angle P_rOS = \theta$ $(0 < \theta < \pi)$、$|OS|$= r とする。

従って、

$$P_r(p, 0)\ ,\ P_l(-p, 0)\ ,\ S(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

ただし、このとき、K は S の内側にいるものとする。



問題の考え方

シューター、キーパー、ボールを点とみなし、T_k,T_s の比を調べ、キーパーがキャッチする最適な動き、キーパーの最適位置、シューターの位置と決めやすさの関係を求める。

ここで、ボールが C に到着する時間よりキーパーが C に到着する時間が短ければ、キーパーはボールを取りやすいといえるので次を定義する。

定義

$\frac{T_k}{T_s}$ をボールの取りやすさと定義。

この条件のもとで問題の (1)〜(3) を考察していく。

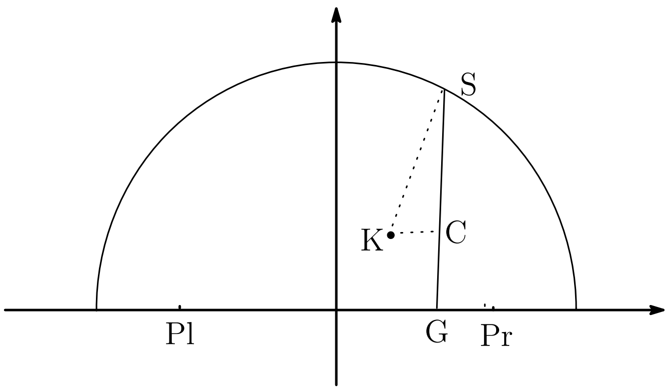
3　キーパーがボールを取るための最適な動きは？

定理

キーパーはシュートに対し垂直に取りに行くのではなく、キーパーはある程度前にいるとすると、SK 軸に垂直に動いてボールを取りに行くのがキーパーの最適な動きである。

[証明]

この問題を解くにあたって、S と K を固定して考える。
シューターが適当にシュートをうち、ゴールに入る点を $G(g, 0)$ とし固定（ただし $-p \leq g \leq p$ とする）。
このとき、SG 上でキーパーがボールを取る位置を C とし、C が動いたときの $\frac{T_k}{T_s}$ を調べる。



定義より、$\frac{T_k}{T_s}$ が小さいほどキーパーはボールを取りやすいので、$\frac{T_k}{T_s}$ が最小のときキーパーがボールを取る最適な動きといえる。
ここで、

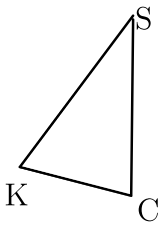
$$T_s = \frac{SC}{v_s}\ ,\ T_k = \frac{KC}{v_k}$$

より、計算すると、

$$\frac{T_k}{T_s} = \frac{\frac{KC}{v_k}}{\frac{SC}{v_s}} = \frac{v_s}{v_k}\frac{KC}{SC}$$

となる。
また、$\frac{v_s}{v_k}$ は一定なので、$\frac{T_k}{T_s}$ が最小となるのは、$\frac{KC}{SC}$ が最小のときである。

ここで $\triangle SKC$ を考えると正弦定理より、



$$\frac{KC}{SC} = \frac{\sin \angle S}{\sin \angle K}$$

がいえ、$\angle S$ は固定なので、$\sin \angle S$ は一定。つまり $\frac{KC}{SC}$ が最小となるのは $\sin \angle K$ が最大のときとなる。ここでキーパーがある程度前にいるとすると、$\sin \angle K$ が最大となるのは $\angle K = \frac{\pi}{2}$ となる。

よって、キーパーはシュートに対し垂直に取りに行くのではなく、キーパーはある程度前にいるとすると、SK 軸に垂直に動いてボールを取りに行くのがキーパーの最適な動きということが証明できた。$\square$

注 ; ある程度前にいない場合、キーパーが SK 軸に垂直に動いてボールを取りに行くと、ゴールの中でボールをとることになるので、キーパーはある程度前にいるものとする。

4　シューターに対し、キーパーの最適位置はどこか？

キーパーは最適な動き、つまり SK 軸に垂直にボールを取りに行くとする。

このとき、ゴールの両隅に蹴られたボールの取りやすさが等しい場所がキーパーの最適な位置だと考えられるので、次を定義する。

定義

S を固定、K はある程度前にいるとすると、$\frac{T_{kr}}{T_{sr}} = \frac{T_{kl}}{T_{sl}}$ となるような K の位置がキーパーの最適位置である。

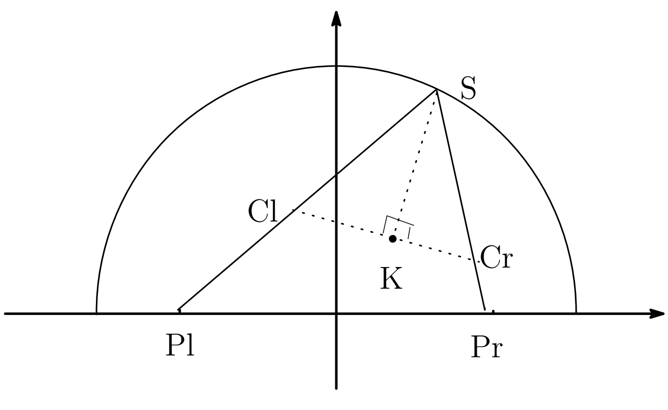
このことから次が示せる。

定理

キーパーはゴール隅とシューターを結ぶ角の二等分線上がキーパーの最適位置である。

[証明]

ここで、SP_r 上でボールをキャッチする点を C_r、SP_l 上でボールをキャッチする点を C_l とし、キーパーが K から C_r に到着するまでの時間を T_{kr}、C_l に到着するまでの時間を T_{kl} とし、シュートされたボールが S から C_r に到着するまでの時間を T_{sr}、C_l に到着するまでの時間を T_{sl} とする。



　このとき、

$$\frac{T_{kr}}{T_{sr}} = \frac{\frac{KC_r}{v_k}}{\frac{SC_r}{v_s}} = \frac{v_s}{v_k}\frac{KC_r}{SC_r},$$
$$\frac{T_{kl}}{T_{sl}} = \frac{\frac{KC_l}{v_k}}{\frac{SC_l}{v_s}} = \frac{v_s}{v_k}\frac{KC_l}{SC_l}$$

であるので、

$$\begin{aligned} \frac{T_{kl}}{T_{sl}} = \frac{T_{kl}}{T_{sl}} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{v_s}{v_k}\frac{KC_r}{SC_r} = \frac{v_s}{v_k}\frac{KC_l}{SC_l} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{KC_r}{SC_r} = \frac{KC_l}{SC_l} \end{aligned}$$

となる。
ここで、$SK \perp C_r C_L$ より、

$$\frac{KC_r}{SC_r} = \frac{KC_l}{SC_l} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\angle KSC_r = \sin\angle KSC_l$$

となる。
　よって、キーパーの最適位置はゴール隅とシューターを結ぶ角の二等分線上であることが証明された。$\square$

5　シューターの位置とシュート決めやすさの関係はどのようになっているか？

定理

シューターの決めやすさは P_lSP_r の角度によって決まり、P_lSP_r を通る円周上では決めやすさは一定。

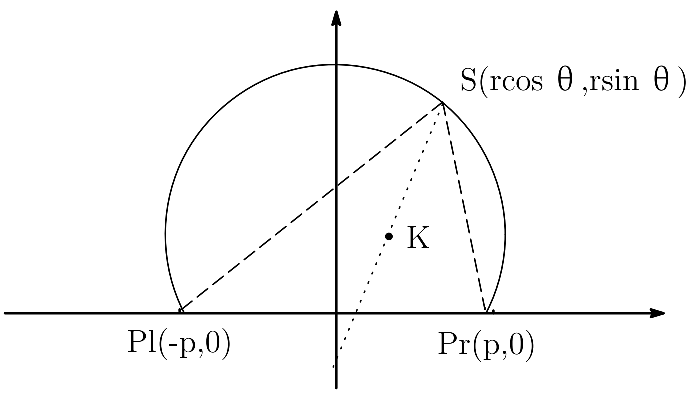
[証明]

キーパーにとって $\frac{T_k}{T_s}$ によりボールの取りやすさが決まるので、シューターは $\frac{T_k}{T_s}$ が大きいほどシュートを決めやすい。

ここで、キーパーはある程度前で、最適位置におり、最適な動きをするものとする。$\frac{T_{kr}}{T_{sr}}$ と $\frac{T_{kl}}{T_{sl}}$ は等しいので右隅にシュートをうった $\frac{T_{kr}}{T_{sr}}$ だけを考え、シューターの位置と $\frac{T_{kr}}{T_{sr}}$ の関係を調べる。

$$\frac{T_{kr}}{T_{sr}} = \frac{v_s}{v_k}\frac{KC_r}{SC_r} = \frac{v_s}{v_k}\sin\angle KSP_r$$

であり、シューターの決めやすさは $\sin\angle KSP_r$ に依存。
よって、$\angle KSP_r$ が大きければ大きいほどシュートを決めやすく、$\angle KSP_r$ が等しければシュートの決めやすさは変わらない。
また、K は $\angle P_lSP_r$ の角の二等分線上にいるので、$\angle KSP_r$ が等しいということは、$\angle P_lSP_r$ が等しいので、円周角が変わらない P_lSP_r の三点を通る円周上では決めやすさは一定であることが証明できた。



$S(r\cos\theta, r\sin\theta)$ と P_l、P_r の三点を通る円は各辺の直角二等分線の交点を中心とする円なので、中心は SP_r の直角二等分線と y 軸の交点。

直線 SC_r は

$$(r\cos\theta - p)y = r\sin\theta(x-p)$$

なので、中心は

$$r\sin\theta(y - \frac{r\sin\theta}{2}) = (p - r\cos\theta)(x - \frac{r\cos\theta}{2})$$

$$y = 0$$

の交点である、$(0, \frac{r^2-p^2}{2r\sin\theta})$ を中心とし、半径 $\frac{\sqrt{r^4+p^4-2p^2r^2\cos\theta^2}}{2r\sin\theta}$ の円周上、つまり、

$$x^2 + (y - \frac{r^2-p^2}{2r\sin\theta})^2 = (\frac{\sqrt{r^4+p^4-2p^2r^2\cos\theta^2}}{2r\sin\theta})^2$$

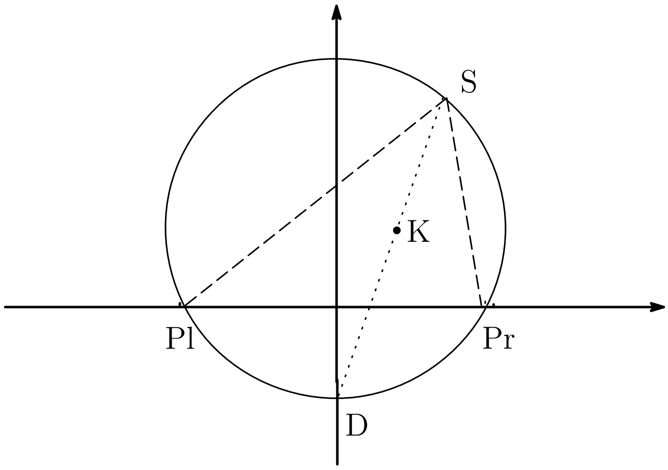
上ではどの点でも決めやすさは一定。$\square$

命題

シューターの決めやすさが一定なら、キーパーはゴールの中心と $\angle P_lSP_r$ の角の二等分線の交点を中心に動く。

[証明]

シューターの決めやすさが一定ならば、$\angle KSP_r$ も一定。K は $\angle P_lSP_r$ の角の二等分線上より、$\angle KSP_r = \angle KSP_l$ なので、直線 SK と円の交点を D とすると、$DP_r = DP_l$ となる。ここで、シューターが $S'(\neq S)$ にいるとする。このとき、$\angle P_lSP_r = \angle P_lS'P_l$ で、円の性質より $\angle DSP_r = \angle DSP_l = \angle DS'P_r = \angle DS'P_l$ がいえる。よって、$S'D$ は $\angle P_lS'P_r$ の角の二等分線なので、K は D を中心に動く。また D から C_rC_l に垂直を引くと C_rC_l の中心 O を通る。
以上より、シューターの決めやすさが一定なら、キーパーはゴールの中心と $\angle C_lSC_r$ の角の二等分線の交点を中心に動くことが示せた。$\square$



この結果より、中学時代、キーパーはゴールネットの中心とシューターを結ぶ直線上にいるよう指導されたことはおおまかにいえば合っていたことがわかった。

6　終わりに

最後になりましたが、この場を借りて、多くの助言を下さった田丸博士准教授、その他いろいろ助けていただいた先輩方に感謝を述べさせて頂きます。