

対称空間入門

田丸 博士* (広島大学 大学院理学研究科)

概要

本稿では、リーマン対称空間の基礎的な概念や理論を紹介する。証明を厳密に行うことはせず、具体例を通して対称空間や関連する概念の感覚を掴む、ということを目指す。本稿は、幾何学 C・多様幾何基礎講義 A (2008 年度, 広島大学) の講義資料である。

1 対称空間の定義と例

本章では、対称空間の定義と、その簡単な例を紹介する。

定義 1.1. リーマン多様体 (M, g) が リーマン対称空間 (Riemannian symmetric space) であるとは、次が成り立つこと: $\forall p \in M, \exists s_p : M \rightarrow M$: 点対称.

対称空間とは、各点で点対称が定義されるリーマン多様体である。リーマン多様体を知らない場合は、距離空間のことだと思って構わない。本稿では、リーマンではない対称空間は登場しないので、以下では単に 対称空間 と呼ぶことにする (他には例えば、疑リーマン対称空間とかアフィン対称空間などがある)。いずれにせよ、対称空間の定義のためには、点対称を定義する必要がある。

定義 1.2. リーマン多様体 (M, g) および $p \in M$ に対して、写像 $s_p : M \rightarrow M$ が p における 点対称 とは、次を満たすこと:

- (1) p は s_p の孤立固定点,
- (2) $s_p^2 = \text{id}$ (ただし id は恒等写像),
- (3) s_p は等長変換 (距離を保つ写像).

孤立固定点であるとは、 p は固定点 (すなわち $s_p(p) = p$) であって、かつ、

$$\text{Fix}(s_p, M) := \{x \in M \mid s_p(x) = x\}$$

の中で $\{p\}$ が開集合であること。これは、 p の非常に近くの点は s_p で固定されない、という意味。

例 1.3. 平面 \mathbb{R}^2 に標準的なリーマン計量 (または標準的な距離) を入れた空間は、対称空間である。点 p に関する点対称 s_p は次のように書ける: $s_p(x) = 2p - x$.

* tamaru @ math.sci.hiroshima-u.ac.jp

点対称の条件 (1) より, ”線対称” は点対称とは呼ばない. 例えば $0 \in \mathbb{R}^2$ での点対称として, x -軸に関する折り返し $s(x, y) := (x, -y)$ を指定することは出来ない. 何故なら, $\text{Fix}(s, M)$ は x -軸なので, $\{0\}$ は孤立固定点ではないから.

例 1.4. 球面 $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$ に標準的なリーマン計量を入れた空間は, 対称空間である. 点 p に関する点対称 s_p は次のように書ける: $s_p(x) = -x + 2\langle x, p \rangle p$.

球面 S^n における点対称 s_p は, 原点 0 と点 p を通る直線に関する折り返しに他ならない.

例 1.5. コンパクトリー群 G は対称空間である. 点 p に関する点対称 s_p は次のように書ける: $s_p(x) = px^{-1}p$.

リー群のことを知らない場合は, 細かいところは無視して単なる群だと思っても良い. この点対称の定義の意味は次の通りである. まず, 単位元 e における点対称は $s_e(x) = x^{-1}$ で定義する. そしてそれ以外の点 p における点対称は, 左移動 $L_g : G \rightarrow G : x \mapsto gx$ を使って, p を e に移して点対称を施してまた元に戻す, という手順で定義されたものである:

$$s_p(x) = L_p \circ s_e \circ L_{p^{-1}}(x) = px^{-1}p.$$

ちなみにコンパクト性は, 上の点対称が等長変換であるために必要な条件 (逆に言うと, 点対称で不変リーマン計量が存在するための条件) である.

2 リー群の対称対

本章では, 対称空間 (M, g) と, リーマン対称対と呼ばれるリー群とその部分群の組 (G, K) が対応することを述べる. これにより, 対称空間のことを調べる問題は, 群と部分群の組を調べる問題に帰着される.

2.1 等質空間

対称空間と対称対の間の対応は, 対称空間が等質空間であることから与えられる. そこでまずは等質空間に関する事柄を紹介する. 以下では, M を集合, G を群とする. また,

$$\text{Aut}(M) := \{f : M \rightarrow M : \text{全単射}\},$$

と定義する. 明らかに, $\text{Aut}(M)$ は写像の合成に関して群となる.

定義 2.1. 群準同型写像 $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(M) : g \mapsto \varphi_g$ のことを G の M への 作用 (action) と呼び, 記号 $G \curvearrowright M$ で表す.

ちなみに, M がリーマン多様体, G がリー群で, $\text{Aut}(M)$ の代わりに等長変換群 $\text{Isom}(M)$ を考えたものを, 等長的作用と呼ぶ.

例 2.2. 直交群 $O(n)$ は行列の積によって球面 S^n に作用する: $\varphi_g(x) := gx$.

このような行列の積によって定義される作用が一般的であるが、そうではない作用もある。

例 2.3. 特殊線型群 $SL_2(\mathbb{R})$ は次によって上半平面 $\mathbb{RH}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ に作用する:

$$g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{に対して,} \quad \varphi_g(z) := \frac{az + b}{cz + d}.$$

上記の作用を 一次分数変換 と呼ぶ。この作用は、 \mathbb{RH}^2 の双曲計量に関して等長的な作用である。

定義 2.4. G の M への作用 φ が 推移的 (transitive) とは、次が成り立つこと: $\forall p, q \in M, \exists g \in G : \varphi_g(p) = q$.

推移的な群作用を持つ集合を 等質空間 (homogeneous space) と呼ぶ。等長的かつ推移的な作用を持つリーマン多様体を、リーマン等質空間と呼ぶ (これは明らかに、等長変換群が推移的に作用することと同値)。

例 2.5. 例 2.2 および 2.3 の作用は、推移的である。

定義 2.6. G を群, K をその部分群とする。このとき G 上の同値関係を次で定める: $g \sim h \Leftrightarrow g^{-1}h \in K$ 。この同値関係による商集合 G/\sim を G の K による 商空間 と呼び、 G/K で表す。

等質空間と商空間は、同値な概念である。すなわち、等質空間は商空間として表すことができ、逆に商空間は等質空間である。

定理 2.7. G を群, M を集合とする。このとき、

- (1) G が作用 φ によって M に推移的に作用していると仮定する。このとき、 $p \in M$ に対して、 $G_p := \{g \in G \mid \varphi_g(p) = p\}$ とおくと、 $M = G/G_p$ (全単射が存在)。
- (2) M が G の商空間であると仮定する (すなわち、 $M = G/K$)。このとき、次によって G は M に推移的に作用する: $\varphi_g([h]) := [gh]$ 。

定理に登場した部分群 G_p を、 p での 固定部分群 (isotropy subgroup) と呼ぶ。固定部分群は、どの点で考えても本質的に同じである。正確に述べると、次が成り立つ: $\forall p, q \in M, \exists g \in G : g^{-1}G_p g = G_q$ (すなわち、 G_p と G_q は共役)。

例 2.8. 球面は次のように商空間として表示できる: $S^n = O(n+1)/O(n)$ 。

商空間としての表示は一意的ではない。実際、球面は $S^n = SO(n+1)/SO(n)$ と表示することもできる (これ以外の表示方法もある)。

例 2.9. 上半平面は次のように商空間として表示できる: $\mathbb{RH}^2 = SL_2(\mathbb{R})/SO(2)$ 。

固定部分群はどの点で考えても良いので、できるだけ簡単な点を選ぶと良い。

例 2.10. 実射影空間は次のように商空間として表示できる: $\mathbb{RP}^n = O(n+1)/O(1) \times O(n)$.

ここで, 実射影空間 とは, $\mathbb{RP}^n := \{\ell \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid \ell \text{ は } 0 \text{ を通る直線}\}$ のことである. これは, $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ を次の同値関係で割った商集合と言っても良い: $v \sim w \Leftrightarrow \exists c \neq 0 : v = cw$. すなわち,

$$\mathbb{RP}^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim = S^n / \sim.$$

2.2 対称空間から対称対へ

ここでは, 対称空間は等質空間であることを示す. また, 自然に得られる等質空間表示 $M = G/K$ は, 対称対と呼ばれる所定の性質を持つことを示す. 以下では対称空間は連結なもののみを考える.

命題 2.11. 連結な対称空間 (M, g) に対し, $G := \text{Isom}(M, g)^0$ は M に推移的に作用する. ただしここで, $\text{Isom}(M, g)^0$ は $\text{Isom}(M, g)$ の単位元を含む連結成分.

例えば $M = \mathbb{R}^n$ の場合には, 任意の 2 点 p, q に対して, その中点での点対称は, p を q に移す. 例えば円周 $M = S^1$ の場合には, 任意の 2 点 p, q に対して, 弧 pq の中点での点対称は, p を q に移す. 一般の場合にも, 同様に考えて証明できる: 任意の 2 点 p, q をとる. その 2 点を結ぶ測地線を取り, p と q の中点 m を選ぶ (このような測地線の存在を示すためには, 事前に完備性を示す必要がある). すると, m での点対称 s_m は p を q に移す. 点対称は等長変換なので, $\text{Isom}(M, g)$ が M に推移的に作用する. 対称空間 M の連結性から, G も推移的に作用する.

上の命題より, 連結な対称空間 (M, g) は等質空間であり, $M = G/K$ と商空間表示することが従う. ただしここで, K はある点 $o \in M$ での固定部分群 (すなわち, $K = G_o$). この G と K は, 次の性質を満たすことになる.

定義 2.12. G を連結リー群, K を G の閉部分群とする. これらの組 (G, K) が リーマン対称対 (Riemannian symmetric pair) とは, 次が成り立つこと:

- (1) 次を満たす対合 $\sigma : G \rightarrow G$ が存在する: $\text{Fix}(\sigma, G)^0 \subset K \subset \text{Fix}(\sigma, G)$.
- (2) K はコンパクト.

ここで σ が 対合 (involution) とは, 準同型写像であって $\sigma^2 = \text{id}$ を満たすことである. この対合のことを カルタン対合 (Cartan involution) と呼ぶ. ちなみに, 部分群 K のコンパクト性は, リーマン計量の存在のために必要な条件である. リーマンでない対称空間を考える場合には, この条件は他の条件に代わる.

定理 2.13. 連結な対称空間 (M, g) に対して, $G := \text{Isom}(M, g)^0$ とし, K を任意の点での固定部分群とすると, 組 (G, K) はリーマン対称対である.

証明は, K の固定する点を o としたとき, 対合 $\sigma : G \rightarrow G$ を次のように定義すれば良い: $\sigma(g) := s_o g s_o$. 条件を確かめるためには, 点対称が一意的であることを使う.

例 2.14. 組 $(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathrm{SO}(n))$ は対称対である. カルタン対合は $\sigma(g) = {}^t g^{-1}$.

このリーマン対称対の $n = 2$ の場合が, 上半平面 $\mathbb{RH}^2 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$ である.

例 2.15. 組 $(\mathrm{SO}(n+1), \mathrm{SO}(n))$ および $(\mathrm{SO}(n+1), \mathrm{S}(\mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(n)))$ は対称対である. カルタン対合は $\sigma(g) = I_{1,n} g I_{1,n}$, ただし $I_{1,n} := \mathrm{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ (対角行列).

ちなみに上記の対称対はそれぞれ球面と射影空間に対応する: $S^n = \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$, $\mathbb{RP}^n = \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{S}(\mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(n))$.

例 2.16. 組 $(\mathrm{SU}(n+1), \mathrm{S}(\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(n)))$ は対称対である. カルタン対合は $\sigma(g) = I_{1,n} g I_{1,n}$.

対応する対称空間は 複素射影空間 である: $\mathbb{C}P^n := \{\ell \subset \mathbb{C}^{n+1} \mid \ell \text{ は複素 } 1 \text{ 次元部分空間}\}$. これは, $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ を次の同値関係で割った商集合と同じ: $v \sim w \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{C}^\times : v = cw$. すなわち,

$$\mathbb{C}P^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim = \mathrm{SU}(n+1) / \mathrm{S}(\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(n)).$$

2.3 対称対から対称空間へ

前節とは逆に, リーマン対称対からリーマン対称空間が構成できる.

定理 2.17. 組 (G, K) をリーマン対称対とする. このとき $M := G/K$ は, G -不変なリーマン計量に関して, 対称空間となる.

証明の方針は以下の通り. まず, 対称対の定義より, カルタン対合 $\sigma : G \rightarrow G$ が存在する. これを使って, 原点 $o := [e]$ での点対称を次のように定義する:

$$s_o : M \rightarrow M : [g] \mapsto [\sigma(g)].$$

このとき, $s_o(o) = o$ および $s_o^2 = \mathrm{id}$ は容易. 一般の点 $p \in M$ での点対称は, リー群上の点対称の決め方 (例 1.5) と同様の方針で定義する. 定理 2.7 より, G は自然に $M = G/K$ に推移的に作用する. この作用 φ を用いて, $p = [g] \in M$ での点対称を次で定義すれば良い:

$$s_p := \varphi_g \circ s_o \circ \varphi_{g^{-1}}.$$

例 2.18. 円周 $S^1 = \mathrm{SO}(2)/\mathrm{SO}(1) = \mathrm{SO}(2)/\{e\}$ に対して, 例 2.15 のカルタン対合から決まる $o := (1, 0)$ での点対称は, $s_o(x, y) = (x, -y)$.

この点対称は, 例 1.4 で与えた点対称と勿論一致する.

例 2.19. コンパクトリー群 G に対して, $(G \times G, \mathrm{diag}(G))$ は対称対である. ただしここで, $\mathrm{diag}(G) := \{(g, g) \mid g \in G\}$ であり, カルタン対合は $\sigma(g, h) := (h, g)$ で与えられる.

ここで $G \times G$ は次によって G に作用する: $\varphi_{(g,h)}(x) := gxh^{-1}$. この作用により, $G = G \times G / \mathrm{diag}(G)$ と表示できる. すなわちこれは, コンパクトリー群が対称空間である (例 1.5) ことの別証明である. 勿論, 上記のカルタン対合から得られる点対称は, 例 1.5 のものと一致する.

例 2.20. 組 $(SO(n), SO(k) \times SO(n-k))$ および $(SO(n), S(O(k) \times O(n-k)))$ は対称対である. カルタン対合は $\sigma(g) = I_{k,n-k}gI_{k,n-k}$, ただし $I_{k,n-k} := \text{diag}(-1_k, 1_{n-k})$.

対称対 $(SO(n), S(O(k) \times O(n-k)))$ に対応する対称空間は, グラスマン多様体 である:

$$G_k(\mathbb{R}^n) := \{V \subset \mathbb{R}^n \mid V \text{ は } k \text{ 次元部分空間}\}.$$

定義より $G_1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{RP}^{n-1}$. また, 対称対 $(SO(n), SO(k) \times SO(n-k))$ に対応する対称空間は, 向き付けられたグラスマン多様体と呼ばれるものである.

3 リー代数の対称対

リー群の対称対を考えることと, リー代数の対称対を考えることが殆ど同値になる. その説明のためには, リー群とリー代数の対応が必要である.

3.1 多様体

まずは必要となる多様体の言葉を復習する. 多様体とは, 位相空間 M であって, その上の関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ の微分を考えることができるようなものである. ある点で f の微分を定義するためには, その点の近傍がユークリッド空間の開集合と同じであれば良い.

定義 3.1. ハウスドルフ位相空間 M が 多様体 (manifold) であるとは, 次を満たす $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ が存在すること:

- (1) $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$,
- (2) $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ が同相,
- (3) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ のとき, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ は C^∞ .

この定義の条件を満たす $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ を 局所座標系 と呼ぶ. また条件 (2) の n のことを多様体の 次元 と呼ぶ. 条件 (1), (2) より, 全ての点 $p \in M$ に対して, ユークリッド空間の開集合と同様な近傍 U_α を取ることができる. これを用いて微分可能性が定義できる.

定義 3.2. M を多様体, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ を連続写像とする. f が $p \in M$ で 微分可能 とは, 次が成り立つこと: $\forall U_\alpha (p \in U_\alpha), f \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}$ は $\varphi_\alpha(p)$ において微分可能.

多様体から多様体への写像 $f: M \rightarrow N$ の微分可能性も, 同様に定義できる. 定義 3.1 の条件 (3) は, 近傍 U_α の取り方によって微分可能になったり微分不可能になったりしない, という条件である. すなわち, 微分可能性は, 一つの U_α について確かめれば十分である.

例 3.3. 円周 S^1 は 1 次元多様体である.

証明のためには, 例えば $x > 0, x < 0, y > 0, y < 0$ のような 4 つの開集合に分ければ良い. これは, S^1 が 4 つの関数のグラフ $y = \pm\sqrt{1-x^2}, x = \pm\sqrt{1-y^2}$ をなめらかに繋ぎ合わせたものである, ということを意味する. 高次元でも同様に考えることができる.

例 3.4. 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ と C^∞ -写像 $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ に対して, $M := \{(x, y) \in U \times \mathbb{R}^m \mid y = f(x)\}$ は n 次元多様体である.

この場合の局所座標系は, 一つの開集合から成る: $\varphi : M \rightarrow U : (x, y) \mapsto x$. 上記の集合 M を写像 f の グラフ と呼ぶ. このようなグラフをなめらかに繋ぎ合わせて多様体を作ることができる.

定理 3.5. 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ と C^∞ -写像 $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ に対して, $M := \{p \in U \mid F(p) = 0\}$ とおく. もし $\forall p \in M, \text{rank}(JF)_p = k$ ならば, M は $n - k$ 次元多様体である.

重要なのは $\text{rank}(JF)_x$ が一定ということである. 証明は, 陰関数定理より従う. 陰関数定理とは, 陰関数表示 ($F(p) = 0$) された集合が, 陽関数表示 ($y = f(x)$) される, すなわちグラフとして書ける, というための条件を与える定理である (最も簡単な例は, 直線 $F(x, y) = ax + by + c$ の場合なので, 確かめてみると良い).

3.2 リー群

リー群とは, 多様体かつ群となるものである.

定義 3.6. 次を満たす G を リー群 (Lie group) と呼ぶ:

- (1) G は群,
- (2) G は多様体,
- (3) 積 $G \times G \rightarrow G : (g, h) \mapsto gh$ および逆元 $G \rightarrow G : g \mapsto g^{-1}$ を取る写像が C^∞ .

例 3.7. $GL_n(\mathbb{R})$ は n^2 次元リー群である.

$GL_n(\mathbb{R})$ は群であり, さらに $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ の開集合であるので n^2 次元多様体である. 積および逆元は, 成分の有理式で書くことができるので, C^∞ である.

例 3.8. 次で定義される G はリー群である (3 次元の Heisenberg リー群 と呼ぶ):

$$G := \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

この群は多様体としては \mathbb{R}^3 と同じである. これら以外の群, 例えば直交群などの場合, リー群であることを上の定義に従って直接証明することは困難である. そこで, 定理 3.5 と同様の陰関数表示を用いる方法を紹介する.

定理 3.9. C^∞ -写像 $F : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^m$ に対して, $G := \{g \in GL_n(\mathbb{R}) \mid F(g) = 0\}$ は群であるとする. もし $\forall g \in G, \dim \ker(dF)_g = k$ ならば, G は k 次元リー群である.

ここで写像 F の微分の定義を思い出す:

$$(dF)_g : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^m : X \mapsto \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (F(g + tX) - F(g)).$$

特に $n = m = 1$ のときは通常の微分に他ならない. この X に標準的な基底を入れたものが偏微分係数である. また, $(dF)_g$ は線型写像であり, これを標準的な基底に関して行列表示したものが, Jacobi 行列 $(JF)_g$ である. 線型写像の次元に関する定理より,

$$\text{rank}(JF)_g = \dim \text{Image}(dF)_g = n^2 - \dim \ker(dF)_g.$$

このことから, 定理 3.5 を適用することができ, G が多様体であることが分かる.

例 3.10. 直交群 $O(n)$ は $n(n-1)/2$ 次元リー群である.

証明には, $O(n)$ の定義方程式 $F(g) = {}^tgg - I_n$ の微分を求めれば良い. 特に次が成り立つ:

$$\ker(dF)_e = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid X + {}^tX = 0\}.$$

3.3 リー代数

リー代数の定義と例を述べる. 特に, リー群からリー代数が構成される.

定義 3.11. ベクトル空間 \mathfrak{g} とその上の積 $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ の組が リー代数 (Lie algebra) とは, 次を満たすこと:

- (1) 積 $[\cdot, \cdot]$ は双線型写像,
- (2) 積は交代 (すなわち, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}, [X, Y] = -[Y, X]$),
- (3) 積は Jacobi 律を満たす (すなわち, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}, [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$).

例 3.12. 任意のベクトル空間 \mathfrak{g} は, $[X, Y] := 0$ で定義される積によってリー代数になる (これを 可換リー代数 と呼ぶ).

例 3.13. $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) := M_n(\mathbb{R})$ に積 $[X, Y] := XY - YX$ を入れたものはリー代数である (これを 一般線型リー代数 と呼ぶ).

証明には, Jacobi 律を地道に確かめれば良い. 一般線型リー代数は, 一般線型群 $GL_n(\mathbb{R})$ と対応している. 他のリー代数の例を挙げるために, 次を使うと便利:

定義 3.14. リー代数 \mathfrak{g} の部分ベクトル空間 \mathfrak{h} が 部分リー代数 とは, 次が成り立つこと: $\forall X, Y \in \mathfrak{h}, [X, Y] \in \mathfrak{h}$.

容易に分かるように, 部分リー代数は (積を制限で定義することによって) リー代数になる.

例 3.15. 次は $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ の部分リー代数である:

- (1) $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) := \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(X) = 0\}$ (特殊線型リー代数),
- (2) $\mathfrak{o}(n) := \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid X + {}^tX = 0\}$ (直交リー代数).

これらは勿論、 $SL_n(\mathbb{R})$ および $O(n)$ と対応するものである。実際のリーク群とリー代数の対応は次で与えられる:

定理 3.16. G をリーク群とする。このとき G の単位元での接空間 $T_e G$ はリー代数の構造を持つ。

リー代数の積 $[\cdot, \cdot]$ の決め方には深入りしない。多様体の接空間の定義を思い出す:

定義 3.17. M を多様体とし、 $p \in M$ を考える。このとき、

- (1) 曲線 $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M: C^\infty$ が $c(0) = p$ となるとき、 $\dot{c}(0)$ を p での 接ベクトル と呼ぶ。
- (2) M の p での 接空間 を次で定義する: $T_p M := \{\dot{c}(0) \mid c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M: C^\infty, c(0) = p\}$ 。

このとき、 $T_p M$ はベクトル空間であり、 $\dim T_p M = \dim M$ が成り立つ。以下では、今までに紹介したリーク群のリー代数を求める。求める方法は二通りあり、一つは、行列の指数写像を用いる方法である。ここで行列の指数写像とは、次で定義されるもの:

$$\exp(X) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} = I_n + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \dots$$

例 3.18. $T_e O(n) = \mathfrak{o}(n)$.

証明は、 $X \in \mathfrak{o}(n)$ に対して、曲線を $c(t) := \exp(tX)$ と定めれば良い。この c は $O(n)$ の曲線であり、 $\dot{c}(0) = X$ を満たす。また、 $\det(\exp(X)) = e^{\text{tr}(X)}$ であることを用いると、次を示すこともできる:

例 3.19. $T_e SL_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$.

リー代数を求める方法の二つ目は、陰関数表示 F を用いる方法である。一般に次が成り立つ:

命題 3.20. 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ と C^∞ -写像 $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ に対して、 $M = \{x \in U \mid F(x) = 0\}$ が多様体であるとする。このとき次が成立: $T_p M = \ker(dF)_p$.

例えば直交群の場合、 $F(g) = {}^t g g - I_n$ であり、 $(dF)_e(X) = {}^t X + X$ であった (例 3.10 参照)。このことからリー代数を容易に求めることができる。

例 3.21. ユニタリ群 $U(n) := \{g \in GL_n(\mathbb{C}) \mid {}^t \bar{g} g = I_n\}$ のリー代数は、次で与えられる: $\mathfrak{u}(n) := \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid {}^t \bar{X} + X = 0\}$.

ユニタリ群の場合は、指数写像を使う方法でも、陰関数表示を使う方法でも、どちらを使ってもリー代数の決定は比較的容易。

例 3.22. Heisenberg 群のリー代数は次で与えられる:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

3.4 リー代数の対称対

リー群の対称対から、リー代数の対称対が決まる.

定義 3.23. リー代数と部分リー代数の組 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ が リー代数の対称対 とは、次が成り立つこと:

- (1) 次を満たす準同型 $\theta: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ が存在する: $\theta^2 = \text{id.}$, $\mathfrak{k} = \text{Fix}(\theta, \mathfrak{g})$.
- (2) \mathfrak{k} はコンパクト.

ここで θ がリー代数の準同型とは、線型かつ bracket 積を保つ (i.e., $\theta([X, Y]) = [\theta(X), \theta(Y)]$) こと. 上記の θ をリー代数の対称対の カルタン対合 と呼ぶ. リー代数 \mathfrak{k} がコンパクトとは、対応するリー群 K がコンパクトであること.

例 3.24. 組 $(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}), \mathfrak{o}(n))$ はリー代数の対称対. カルタン対合は $\theta(X) = -{}^t X$.

もちろんこの対称対は、リー群の対称対 $(\text{SL}_n(\mathbb{R}), \text{SO}(n))$ と対応する.

例 3.25. 組 $(\mathfrak{o}(n+1), \mathfrak{o}(n))$ はリー代数の対称対. カルタン対合は $\theta(X) = I_{1,n} X I_{1,n}$, ただし $I_{1,n} := \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ (対角行列).

対応するリー群の対称対は、 $(\text{SO}(n+1), \text{SO}(n))$ あるいは $(\text{SO}(n+1), \text{S}(\text{O}(1) \times \text{O}(n)))$ である. リー代数の対称対では、これらは区別されない. その理由は、リー代数は (接空間で定義されるので) 局所的な情報だけで決まるからである.

定理 3.26. 組 (G, K) をリー群の対称対とする. このとき、それぞれに対応するリー代数を $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ とすると、組 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ はリー代数の対称対.

組 (G, K) のカルタン対合を σ としたとき、 $\theta = (d\sigma)_e$ が $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ のカルタン対合を与える. ここで $(d\sigma)_e$ は、 σ の単位元 e での微分. 一般に、多様体間の C^∞ -写像 $f: M \rightarrow N$ に対して、 f の $x \in M$ の微分とは、次で定義される線型写像である:

$$(df)_x: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N: \dot{c}(0) \mapsto \frac{d}{dt}(f \circ c)(0).$$

例 3.27. 例 3.24, 3.25 のカルタン対合 θ は、対応するリー群の対称対のカルタン対合 σ から来る.

3.5 カルタン分解

リー代数の対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ を与えることと、リー代数 \mathfrak{g} に所定の分解を与えることが、同等になる.

定義 3.28. リー代数 \mathfrak{g} に対して、ベクトル空間としての直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ が カルタン分解 とは、次が成立すること:

- (1) $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$. (2) \mathfrak{k} はコンパクトな部分リー代数.

定理 3.29. リー代数の対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ に対して, カルタン対合 θ の (-1) -固有空間を \mathfrak{p} とすると, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ はカルタン分解である. 逆に, カルタン分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ に対して, 組 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ はリー代数の対称対である.

対称対からカルタン分解が得られることは容易. カルタン分解から対称対を得るためには, カルタン対合を $\theta(X) = X_{\mathfrak{k}} - X_{\mathfrak{p}}$ で定義すれば良い. ここで $X_{\mathfrak{k}}$ と $X_{\mathfrak{p}}$ は, それぞれ X の \mathfrak{k} -成分と \mathfrak{p} -成分を表す.

例 3.30. 対称対 $(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}), \mathfrak{o}(n))$ のカルタン対合は $\theta(X) = -{}^tX$ であるので, 対応するカルタン分解は $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{o}(n) \oplus \{X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tX = X\}$.

この分解は, 行列を交代行列と対称行列の和で書いたものに他ならない.

例 3.31. 対称対 $(\mathfrak{o}(n+m), \mathfrak{o}(n) \oplus \mathfrak{o}(m))$ のカルタン対合は $\theta(X) = I_{n,m}X I_{n,m}$ であるので, 対応するカルタン分解は

$$\mathfrak{o}(n+m) = (\mathfrak{o}(n) \oplus \mathfrak{o}(m)) \oplus \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & -{}^tC \\ \hline C & 0 \end{array} \right) \mid C \in M_{n,m}(\mathbb{R}) \right\}.$$

同様の分解を考えると, $(\mathfrak{o}(n+m+l), \mathfrak{o}(n) \oplus \mathfrak{o}(m) \oplus \mathfrak{o}(l))$ は対称対ではないことが分かる (きちんと証明するためには準備が必要だが).

例 3.32. 対称対 $(\mathfrak{su}(n), \mathfrak{o}(n))$ のカルタン対合は $\theta(X) = \overline{X}$ (複素共役) であるので, 対応するカルタン分解は $\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{o}(n) \oplus \{X \in \mathfrak{su}(n) \mid \overline{X} = -X\}$.

ここで $\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{u}(n) \mid \text{tr}(X) = 0\}$ である (特殊ユニタリリー代数と呼ぶ). ここで, $X \in \mathfrak{u}(n)$ であるので, $\overline{X} = -X \Leftrightarrow {}^tX = X$ に注意する.

4 発展的な話題

前章までに, 対称空間と対称対の関連について述べてきた. 本章では, 対称空間の構造に関することと, その応用について, 簡単に触れる.

4.1 対称空間の双対

リー代数 \mathfrak{g} に対して, その複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ を考える. これは, ベクトル空間としては $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus \sqrt{-1}\mathfrak{g}$ であり, bracket 積は, \mathfrak{g} の積を複素双線型になるように拡張して定めたものである.

命題 4.1. カルタン分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ に対して, $\mathfrak{g}' := \mathfrak{k} \oplus \sqrt{-1}\mathfrak{p}$ とおく. このとき \mathfrak{g}' は $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の部分リー代数であり, 上の分解はカルタン分解である.

証明は, カルタン分解の bracket 積の関係 (特に $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$) から従う. 逆に, もし $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \not\subset \mathfrak{k}$ ならば, 上の \mathfrak{g}' はリー代数にならない. この方法で得られた新しい対称対 $(\mathfrak{g}', \mathfrak{k})$ を, 元の対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ の 双対 と呼ぶ. 定義から明らかに, 双対の双対は, 最初の対称対と一致する.

例 4.2. 対称対 $(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}), \mathfrak{o}(n))$ の双対は $(\mathfrak{su}(n), \mathfrak{o}(n))$.

双対は, リー代数によって与えられているので, 局所的なものである. 大域的な性質は, 一般に全く異なる. 例えば上の例で対応する対称空間を考えると, $SL_n(\mathbb{R})/SO(n)$ は非コンパクトだが, $SU(n)/SO(n)$ はコンパクトである (一般に双対は, コンパクトと非コンパクトを移し合う).

4.2 線型イソトロピー表現

対称空間に対して, 線型イソトロピー表現と呼ばれる K の \mathfrak{p} への線型な作用 (表現) が定義される. この表現の軌道は, 興味深い部分多様体の例を供給する.

定義 4.3. (G, K) を対称対, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を付随するカルタン分解とする. このとき,

$$\varphi : K \rightarrow GL(\mathfrak{p}) : g \mapsto \varphi_g := (dI_g)_e|_{\mathfrak{p}}$$

を 線型イソトロピー表現 と呼ぶ. ただしここで, $I_g : G \rightarrow G : h \mapsto ghg^{-1}$.

注意. $I_g(e) = e$ および $T_e G = \mathfrak{g}$ であるので, I_g の微分は $(dI_g)_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ という線型写像を与える. これを \mathfrak{p} に制限したものが φ_g である. ただしここで, $(dI_g)_e(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}$ であることは示す必要がある ($g \in K$ から従う). また φ は群準同型である.

定義 4.4. 群 K とベクトル空間 V に対して, 群準同型写像 $\varphi : K \rightarrow GL(V)$ のことを 線型表現, あるいは単に 表現 と呼ぶ. 各 $v \in V$ に対して, $K.v := \{\varphi_g(v) \in V \mid g \in K\}$ を v を通る K の軌道 と呼ぶ.

表現とは, K の各元に対して線型写像を対応させるものである. V の基底を選ぶと, 線型写像は行列表示できる. すなわち, K を行列で「表現」することができる.

例 4.5. 自然な単射 $SO(n) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ は表現である (これを 自然な表現 と呼ぶ). この表現による $v \in \mathbb{R}^n$ を通る軌道は, 半径 $|v|$ の球面.

今までに紹介したリー群は, そもそも行列表示されていたので, 上と同様に自然な表現が存在する. もちろん自然な表現以外にも表現は存在する.

定義 4.6. 2 つの表現 $\varphi_i : K \rightarrow GL(V_i)$ (ただし $i = 1, 2$) が 同値 とは, 次が成り立つこと: $\exists F : V_1 \rightarrow V_2 : \text{線型同型 s.t. } \forall g \in K, F \circ (\varphi_1)_g = (\varphi_2)_g \circ F$.

定義より明らかに, 表現が同値ならば軌道は一致する.

例 4.7. $S^n = SO(n+1)/SO(n)$ の線型イソトロピー表現は, 自然な表現 $SO(n) \curvearrowright \mathbb{R}^n$ と同値.

よってその軌道として球面 $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ が現れる.

例 4.8. カルタン分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ に対応する線形イソトロピー表現は, 双対 $\mathfrak{g}' = \mathfrak{k} \oplus \sqrt{-1}\mathfrak{p}$ の線型イソトロピー表現と同値.

例 4.9. 対称空間 $SL_n(\mathbb{R})/SO(n)$ の線型イソトロピー表現 $\varphi : SO(n) \rightarrow GL(\mathfrak{p})$ は次で与えられる: $\varphi_g(X) = gXg^{-1}$. ただしここで, $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tX = X\}$. 特に $n = 3$ のとき,

- (1) $X = \text{diag}(2, -1, -1)$ ならば $SO(3).X = SO(3)/S(O(1) \times O(2)) = \mathbb{RP}^2$.
- (2) $X = \text{diag}(1, 0, -1)$ ならば $SO(3).X = SO(3)/S(O(1) \times O(1) \times O(1))$.

この例の (1) は, 射影平面の埋め込み $\mathbb{RP}^2 \subset \mathbb{R}^5$ を与える. また, $SO(n)$ の作用は \mathfrak{p} の標準的な内積を保つので, 長さ 1 のベクトルを通る軌道は単位球面に含まれる. すなわち, $\mathbb{RP}^2 \subset S^4$ という埋め込みが得られる. これは Veronese 曲面 と呼ばれている.

4.3 対称空間の階数

以下では \mathfrak{g} は半単純リー代数とする. カルタン分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を考える.

定義 4.10. 線型部分空間 $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ が 極大可換 (maximal abelian) とは, 次が成り立つこと:

- (1) $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = 0$,
- (2) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}' \subset \mathfrak{p}$ かつ $[\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'] = 0$ ならば $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$.

極大可換部分空間の非常に重要な性質は, 次に挙げる共役性である. ここで \mathfrak{p} の部分空間 V_1, V_2 が共役であるとは, 線型イソトロピー表現 φ で移りあうこと, すなわち, $\exists g \in K : \varphi_g(V_1) = V_2$. 極大可換部分空間 \mathfrak{a} と共役な部分空間は, 明らかに極大可換である. その逆が成り立つ.

定理 4.11. \mathfrak{p} の全ての極大可換部分空間は共役である.

定義 4.12. \mathfrak{p} の極大可換部分空間の次元を, 対称空間の 階数 (rank) と呼ぶ.

例 4.13. 対称対 $(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}), \mathfrak{o}(n))$ に対して, $\mathfrak{a} := \{\text{diag}(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 + \dots + a_n = 0\}$ は \mathfrak{p} の極大可換部分空間である. よって階数は $n - 1$.

例 4.14. 対称対 $(\mathfrak{o}(n+1), \mathfrak{o}(n))$ の階数は 1 である.

定理 4.11 より, 線型イソトロピー表現の軌道を調べるときには, \mathfrak{a} の元を通る軌道だけを調べれば良いことが分かる. すなわち,

命題 4.15. 線型イソトロピー表現 φ および極大可換部分空間 $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ に対して, 次が成立する: $\forall X \in \mathfrak{p}, \exists H \in \mathfrak{a} : K.X = K.H$ (同じ軌道).

これは, $(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}), \mathfrak{o}(n))$ の場合には, 「対称行列は直交行列で対角化できる」ことを意味する.

4.4 制限ルート

話を簡単にするために, \mathfrak{g} を非コンパクト単純リー代数とし, この場合に制限ルートを定義する. 制限ルートを用いることによって, 線型イソトロピー表現の軌道を調べることができる. $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a}$ をカルタン分解, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ を極大可換部分空間とする.

定義 4.16. 線型写像 $\alpha : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, $\mathfrak{g}_\alpha := \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall H \in \mathfrak{a}, [H, X] = \alpha(H)X\}$ と定める. このとき, α が \mathfrak{a} に関する 制限ルート とは, $\alpha \neq 0$ かつ $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$ が成り立つこと. また α がルートの時に \mathfrak{g}_α を ルート空間 と呼ぶ.

ルート空間 \mathfrak{g}_α とは, 線型写像 $\text{Ad}_H : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} : X \mapsto [H, X]$ (ただし $H \in \mathfrak{a}$) の同時固有空間に他ならない. ルートとは, 各 $H \in \mathfrak{a}$ に対して, Ad_H の固有値を対応させる写像のこと. 記号 $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ によって \mathfrak{a} に関する制限ルート全体の集合を表し, これを 制限ルート系 と呼ぶ.

定理 4.17. (1) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, (2) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$ (これを ルート空間分解 という).

例 4.18. $(\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}), \mathfrak{o}(3))$ に対して, 例 4.13 と同じ \mathfrak{a} を取り, $\varepsilon_i : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{R} : \text{diag}(a_1, a_2, a_3) \mapsto a_i$ ($i = 1, 2, 3$) とおく. このとき \mathfrak{a} に関する制限ルート系は $\Delta = \{\pm(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \pm(\varepsilon_2 - \varepsilon_3), \pm(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)\}$.

カルタン分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ に対しても, \mathfrak{k} および \mathfrak{p} を “ルート空間分解” することができる.

命題 4.19. θ をカルタン対合とし, $\mathfrak{k}_\alpha := \{X + \theta X \mid X \in \mathfrak{g}_\alpha\}$ および $\mathfrak{p}_\alpha := \{X - \theta X \mid X \in \mathfrak{g}_\alpha\}$ と定義する. このとき,

- (1) $\theta(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$ である. よって特に $\mathfrak{k}_\alpha = \mathfrak{k}_{-\alpha}$, $\mathfrak{p}_\alpha = \mathfrak{p}_{-\alpha}$.
- (2) $\mathfrak{k}_\alpha = \mathfrak{k} \cap (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha})$, $\mathfrak{p}_\alpha = \mathfrak{p} \cap (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha})$.
- (3) $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 \oplus \sum_{\alpha > 0} \mathfrak{k}_\alpha$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \oplus \sum_{\alpha > 0} \mathfrak{p}_\alpha$.
- (4) $\dim \mathfrak{k}_\alpha = \dim \mathfrak{p}_\alpha$.

これらを用いると, 線型イソトロピー表現の軌道が記述できる.

命題 4.20. リー代数 \mathfrak{k}_H を, 線型イソトロピー表現による $H \in \mathfrak{a}$ での固定部分群のリー代数とする. このとき, 次が成り立つ: $\mathfrak{k}_H = \mathfrak{k}_0 \oplus \sum_{\alpha(H)=0} \mathfrak{k}_\alpha$.

証明のためには, $\mathfrak{k}_H = \{X \in \mathfrak{k} \mid [X, H] = 0\}$ を示せば良い.

例 4.21. $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) = \mathfrak{o}(3) \oplus \mathfrak{p}$ の線型イソトロピー表現に対して,

- (1) $H = \text{diag}(2, -1, -1)$ ならば, $\mathfrak{k}_H = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{k}_{\varepsilon_2 - \varepsilon_3} \oplus \mathfrak{k}_{-\varepsilon_2 + \varepsilon_3}$.
- (2) $H = \text{diag}(1, 0, -1)$ ならば, $\mathfrak{k}_H = \mathfrak{k}_0$.

定理 4.22. $H \in \mathfrak{a}$ に関する以下の 3 つの条件は同値:

- (1) $\forall \alpha \in \Delta, \alpha(H) \neq 0$.
- (2) $K.H$ が最大次元の軌道.
- (3) $\dim K.H = \dim \mathfrak{p} - \dim \mathfrak{a}$.

すなわち, 階数 2 対称空間の線型イソトロピー表現の最大次元の軌道を考えると, ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n = \mathfrak{p}$ の中の余次元 2 の等質部分多様体が得られる. さらに, 線型イソトロピー表現は (所定の) 内積を保つので, その軌道は単位球面 S^{n-1} の中の余次元 1 の等質部分多様体を与える. このことは, 対称空間論の部分多様体への応用として, 特に有名なものである. ちなみに, 球面内の余次元 1 の等質部分多様体は全てこの方法で得られる, ということが知られている.