

平成 20 年度卒業論文
回転面におけるガウス曲率と平均曲率

理学部数学科
B 0 5 4 1 8 1 高橋 正
指導教員 田丸 博士

平成 21 年 2 月 8 日

目次

1	はじめに	2
2	曲面論からの準備	3
2.1	助変数表示された曲線	3
2.2	曲線における弧長パラメータについて	3
2.3	曲率について	4
2.4	助変数表示された曲面	5
2.5	第一基本形式	5
2.6	第二基本形式	6
2.7	ガウス曲率と平均曲率	8
2.8	具体例 (楕円面)	9
3	回転面	10
3.1	回転面のガウス曲率と平均曲率	10
3.2	具体例 (楕円面)	12
4	特別な回転面	13
4.1	ガウス曲率が恒等的に 0 になる回転面	13
4.2	ガウス曲率一定の回転面	14
4.3	平均曲率が恒等的に 0 になる回転面	15
4.4	平均曲率一定の回転面	17
5	おわりに	18
6	参考文献	18

1 はじめに

曲面の曲がり方を表すものとして、ガウス曲率と平均曲率がある。しかし、その2つの曲率を求める式はあまりに複雑である。そこで今回、回転面の定義をもとにどの程度簡単にこの2つの曲率を表すことができるかを疑問に思い卒業論文に取り組んだ。そんな卒業論文の大きなテーマは以下の二つである。

1. 回転面におけるガウス曲率と平均曲率をワンパラメーターで表す。
2. ワンパラメーターで表された式をもとにいろいろな回転面について示す。

具体的には、はじめに曲面論における助変数表示、弧長パラメータ、曲率、第一基本形式、第二基本形式、ガウス曲率と平均曲率を復習した。そのあとに回転面を定義し、回転面におけるガウス曲率及び平均曲率をワンパラメーターで表した。その表した式をもとに、以下のことを示した。

1. ガウス曲率が恒等的に0になる曲面は円柱面、円錐面、平面のどれかに局所的に合同である。
2. ガウス曲率が0以外の値で一定となる曲面は球面か擬球面のどちらかに局所的に合同である。
3. 懸垂面は平均曲率が恒等的に0になる回転面である。
4. アンデュロイドは、平均曲率が0以外の値で一定となる回転面である。

さらに、擬球面、懸垂面、アンデュロイドについては図を記載した。

2 曲面論からの準備

2.1 助変数表示された曲線

平面上を動く点を考え、その時刻 t における点の位置を $(x(t), y(t))$ とすればこの動点の軌跡は曲線を表している。このような表し方を**助変数表示**という。今回は2つの関数 $x(t), y(t)$ の組

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

で曲線を表すことにする。また動点 $\gamma(t)$ を車にたとえると、助変数の選び方は走行法に対応している。つまり助変数の取り方は何通りも存在する。

また助変数で表示された曲線 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ に対して、

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \quad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \dot{y} = \frac{dy}{dt} \right)$$

は、時刻 t における動点の**速度ベクトル**を表している。

2.2 曲線における弧長パラメータについて

先ほど与えられた曲線を助変数で表示する方法は一通りではない。そのうちでもっとも自然な助変数は何だろうか。それは弧長パラメータとよばれるものである。そのため弧長パラメータを定義する。以後曲線の助変数表示は速度ベクトルが零ベクトルにならない場合のみを考えるとする。

助変数で表示された曲線 $\gamma(t) (a \leq t \leq b)$ に対して、

$$s(t) = \int_a^t |\dot{\gamma}(u)| du$$

によって曲線 $\gamma(t)$ の区間 $[a, t]$ に対応する部分の長さが与えられる。この式を $\dot{\gamma} \neq 0$ に注意し微分すると、

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{\gamma}(t)| > 0$$

となる。よって、区間 $[a, b]$ 間の曲線 $\gamma(t)$ の長さを l とすると、 $s(t)$ は閉区間 $[a, b]$ から $[0, l]$ への単調増加関数なので、逆関数定理 $t = t(s) : [0, l] \rightarrow [a, b]$ が存在する。逆関数定理よりこの逆関数 $t(s)$ も s で微分可能であるから、これを用いて

$$\gamma(s) := \gamma(t(s)) \quad (0 \leq s \leq l)$$

のように曲線を新しい助変数 s で表示することができる。この s を曲線の**弧長パラメータ**という。

弧長パラメータ s に関する微分は他の助変数と区別するため, $'$ (ダッシュ) で表すことにする. 合成関数の微分公式より

$$\dot{\gamma}(s) = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$$

であるので, 弧長パラメータによる曲線の速さは常に 1 であることがわかる.

曲線を道路にたとえて, 道路を走る車の時刻 t における位置が曲線の助変数表示を与える, と考えると, 一般の助変数表示は速さを変更して走る車を表し, 弧長パラメータによる表示は常に速さ 1 で前進する車を表す.

弧長パラメータとして $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ と表示すると,

$$\mathbf{e}(s) := \dot{\gamma}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s))$$

は曲線の $\gamma(s)$ における進行方向の**単位接ベクトル**となり,

$$\mathbf{n}(s) := (-\dot{y}(s), \dot{x}(s))$$

は $\mathbf{e}(s)$ に直交し, $\mathbf{e}(s)$ 方向に対して左向きの単位ベクトルを与える. これを曲線上の点 $\gamma(s)$ における, 進行方向に対して左向きの**単位法線ベクトル**とよぶ.

2.3 曲率について

$\gamma(s) = (x(s), y(s))$ を弧長パラメータによる曲線の助変数表示とすると, 速度ベクトルの大きさは, 先ほど考えた通り 1 になる. すなわち,

$$\dot{\gamma}(s) \cdot \dot{\gamma}(s) = |\dot{\gamma}(s)|^2 = 1$$

である. ここで $(\cdot)$ は平面ベクトルの内積を表す. この両辺を s で微分すると,

$$2\dot{\gamma}''(s) \cdot \dot{\gamma}'(s) = 0$$

となるから, 加速度ベクトル $\gamma''(s)$ は $\gamma'(s)$ に直交する. これは $\gamma''(s)$ が単位法線ベクトル $\mathbf{n}(s)$ に比例していることを意味する. この比例定数を $\kappa(s)$ と書き, 曲線 $\gamma(s)$ の**曲率**という. すなわち

$$\gamma''(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$$

である. 曲率 $\kappa(s)$ が正であれば曲線は $\gamma(s)$ の近くで左曲がりであり, 負であれば右曲がりである.

つまり, 曲率とは曲線の「曲がり具合」を表す量である.

2.4 助変数表示された曲面

3つの2変数関数の組 $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ は、各 (u, v) に対して空間 R^3 の点 (x, y, z) を与える。変数 (u, v) が uv 平面上の領域 D を動くとき、この軌跡は曲面を描く。今回2変数関数を3つひとまとめにして、曲面を位置ベクトルの形

$$p(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

で表すことにする。このとき

$$p_u = \frac{\partial p}{\partial u} = (x_u, y_u, z_u) \quad , \quad p_v = \frac{\partial p}{\partial v} = (x_v, y_v, z_v)$$

が一次独立でない点の近くでは $p(u, v)$ がなめらかな曲面を表さない場合がある。

そこで、以下では (u, v) が uv 平面の領域 D を動くとき

各 $(u, v) \in D$ で $p_u(u, v)$ と $p_v(u, v)$ は一次独立

であるような $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ を曲率の助変数表示とよび、 D をこの助変数表示が定める領域と呼ぶ。

また、点 $p(u, v)$ で曲面に接するベクトルは、 $p_u(u, v)$ と $p_v(u, v)$ の一次結合で表すことができる。つまり、点 $p(u, v)$ を通りこれらの接ベクトル $p_u(u, v), p_v(u, v)$ に平行な平面

$$\{p(u, v) + sp_u(u, v) + tp_v(u, v) | s, t \in R\}$$

が曲面の接平面となり、 $p_u(u, v)$ と $p_v(u, v)$ の両方に直交し、次の式で定義される向きの単位ベクトル

$$\nu := \frac{p_u(u, v) \times p_v(u, v)}{|p_u(u, v) \times p_v(u, v)|}$$

が曲面の単位法線ベクトルとなる。ここでの $(\times)$ はベクトル積を表す。これを $\nu = (a, b, c)$ と成分表示すると、曲面上の点 (x_o, y_o, z_o) における曲面の接平面の方程式

$$a(x - x_o) + b(y - y_o) + c(z - z_o) = 0$$

を得る。

2.5 第一基本形式

曲面 $p(u, v)$ 上の2点 $p(u, v)$ と点 $p(u + \Delta u, v + \Delta v)$ の距離 Δs の2乗は、 $\Delta u, \Delta v$ が十分小さいときはテイラーの定理より、次のように近似される：

$$(\Delta s)^2 = |p(u + \Delta u, v + \Delta v) - p(u, v)|^2 \quad .$$

このとき, 接ベクトル $p_u(u, v)$ と $p_v(u, v)$ の内積で与えられる 3 つの (u, v) の関数

$$E = p_u \cdot p_u, F = p_u \cdot p_v, G = p_v \cdot p_v$$

を**第一基本量**とよび, 形式的な和

$$ds^2 = E du^2 + 2F dudv + G dv^2$$

を**第一基本形式**とよぶ. 形式的ではあるが, 第一基本形式を

$$ds^2 = \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

と行列の積の形に表すことができる. ここで行列

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

を**第一基本行列**とよぶ.

では, 第一基本形式を求めることで曲面の何が求まるのだろうか?
実は, 第一基本形式を求めることで曲面の面積を求めることができる.
曲面の助変数表示 $p(u, v)$ が与えられたとき, ラグランジュの恒等式により,

$$|p_u \times p_v|^2 = (p_u \cdot p_u)(p_v \cdot p_v) - (p_u \cdot p_v)^2 = EG - F^2$$

が成り立つ. のことから曲面の面積要素は

$$dA = \sqrt{EG - F^2} dudv$$

と表すことができる.

2.6 第二基本形式

次に第二基本形式について定義する.
曲面の助変数表示 $p(u, v)$ が与えられたとき,

$$II = -dp \cdot \nu = -(p_u du + p_v dv) \cdot (\nu_u du + \nu_v dv)$$

を**第二基本形式**という. ただし $\nu = \nu(u, v)$ は曲面 $p(u, v)$ の単位法線ベクトルである. 先ほどの式を展開すると

$$II = (-p_u \cdot \nu_u) du^2 + (-p_u \cdot \nu_v - p_v \cdot \nu_u) dudv + (-p_v \cdot \nu_v) dv^2$$

という表示を得る. ところで接ベクトル p_u, p_v と単位法線ベクトル ν は直交するから, $p_u \cdot \nu = 0, p_v \cdot \nu = 0$ である. さらにこの両辺を u, v で偏微分すれば

$$p_{uu} \cdot \nu = -p_u \cdot \nu_u, \quad p_{uv} \cdot \nu = -p_v \cdot \nu_u, \quad p_{vv} \cdot \nu = -p_v \cdot \nu_v$$

となるので, 第二基本形式は

$$II = L du^2 + 2 M dudv + N dv^2$$

と表すことができる. ただし, L, M, N は

$$\begin{aligned} L &= -p_u \cdot \nu_u = p_{uu} \cdot \nu \\ M &= -p_u \cdot \nu_v = -p_v \cdot \nu_u = p_{uv} \cdot \nu \\ N &= -p_v \cdot \nu_v = p_{vv} \cdot \nu \end{aligned}$$

で与えられる 2 変数関数である. この L, M, N を**第二基本量**とよぶ.

この第二基本形式が $p(u_0, v_0)$ において正値二次形式になるとすると関数 f は (u_0, v_0) において上に凹となる. また II が $p(u_0, v_0)$ において負値二次形式になるとすると関数 f は (u_0, v_0) において凸となる.

第二基本形式 II が曲面の曲がり方に, もう少し定量的にどう関係するのかを調べてみる.

$(u(s), v(s))$ で与えられる曲線を空間曲線 $p(s) = p(u(s), v(s))$ と考えて, その曲率 κ を計算する. $|dp/ds| = 1$ となるパラメータ s が入っているとすると, ベクトル $p''(s)$ の長さを曲線 $p(s)$ の曲率と定義している. $p'(s)$ は曲線 $p(s)$ の接ベクトルであるから曲面 $p(u, v)$ に接している. しかし $p''(s)$ は一般には曲面 $p(u, v)$ に接していない. つまり,

$$p''(s) = k_g + k_n$$

というように曲面の接ベクトル k_g と法ベクトル k_n に分解できる. k_n は法ベクトルであるから単位法ベクトル e を使うと

$$k_n = \kappa_n e$$

と書ける. ここで κ_n を曲面上の**法曲率**と呼ぶ.

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \kappa_n e \cdot e \\ &= (p'' - k_g) \cdot e \\ &= p'' \cdot e \\ &= -p' \cdot e' \\ &= -(p_u \frac{du}{ds} + p_v \frac{dv}{ds}) \cdot (e_u \frac{du}{ds} + e_v \frac{dv}{ds}) \\ &= L \frac{du}{ds} \frac{du}{ds} + 2 M \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + N \frac{dv}{ds} \frac{dv}{ds} \end{aligned}$$

を得る. この式により $\kappa_n(s)$ は曲面 $p(s)$ そのものでなく, ベクトル $p'(s)$ のみでできる.

したがって, 曲面上の 1 点 $p_0 = p(u_0, v_0)$ での単位接ベクトル

$$\omega = \xi p_u(u_0, v_0) + \eta p_v(u_0, v_0)$$

に対して

$$II(\omega, \omega) = L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2$$

を考える.

$$\kappa_n(s) = II(p'(s), p'(s))$$

と書ける. $II(\omega, \omega)$ において ω を p_0 で接平面内の単位円上を動かすときの最大, 最小を求めてみる. これは

$$|\omega|^2 = E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2 = 1$$

という条件のもとで, $II(\omega, \omega)$ の最大, 最小を求めることであるが先ほどの条件の代わりに $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$ という条件のもとで, 関数

$$\lambda = \frac{L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2}{E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2}$$

の最大, 最小を求めてもよい.

$$L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2 - \lambda(E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2) = 0$$

として, ξ および η で偏微分し $\partial\lambda/\partial\xi = \partial\lambda/\partial\eta = 0$ とおくと

$$(L - \lambda E)\xi + (M - \lambda F)\eta = 0$$

$$(M - \lambda F)\xi + (N - \lambda G)\eta = 0$$

となる. $(\xi, \eta) \neq 0$ なる解があるような λ を探すということにすると,

$$(EG - F^2)\lambda^2 - (EN + GL - 2FM)\lambda + LN - M^2 = 0$$

その解を $\lambda = \kappa_1, \kappa_2$ とすると解と係数の関係から

$$\kappa_1\kappa_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)}$$

となる. ここで

$$K = \kappa_1\kappa_2, \quad H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$$

とかき, K を**ガウス曲率**, H を**平均曲率**と呼ぶ.

2.7 ガウス曲率と平均曲率

先ほどガウス曲率 K について求めたが K の値によって曲面はどう変化するのか?

実は, 曲面上のガウス曲率 K が正となる点を楕円点, 0 になる点を放物点, 負になる点を双曲点という. これらの点の近くでは凸になり, 負になる点の近くでは曲面は鞍状になる.

さらに, ガウス曲率 K , 平均曲率 H が全ての点で零であるなら, 第二基本量 L, M, N も恒等的に 0 となり, このような曲面は平面の一部になる.

K がすべての点で零になる曲面は, 局所的に伸び縮みなしに平面上に正確な地図をかくことができる.

2.8 具体例 (楕円面)

楕円面におけるガウス曲率と平均曲率を実際に計算してみる.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

をパラメータ表示であらわす.

$$x = a \cos u \cos v, \quad y = b \cos u \sin v, \quad z = c \sin u$$

とする. つまり,

$$p(u, v) = (a \cos u \cos v, b \cos u \sin v, c \sin u) \quad .$$

すると,

$$\begin{aligned} p_u &= (-a \sin u \cos v, -b \sin u \sin v, c \cos u) \quad , \\ p_v &= (-a \cos u \sin v, b \cos u \cos v, 0) \quad , \\ p_{uu} &= (-a \cos u \cos v, -b \cos u \sin v, -c \sin u) \quad , \\ p_{uv} &= (a \sin u \sin v, -b \sin u \cos v, 0) \quad , \\ p_{vv} &= (-a \cos u \cos v, -b \cos u \sin v, 0), \\ e &= \frac{1}{\Delta} (-bc \cos u \cos v, -ca \cos u \sin v, -ab \sin u) \quad . \end{aligned}$$

ただし $\Delta = \sqrt{b^2 c^2 \cos^2 u \cos^2 v + c^2 a^2 \cos^2 u \sin^2 v + a^2 b^2 \sin^2 u}$ である.

$$\begin{aligned} E &= a^2 \sin^2 u \cos^2 v + b^2 \sin^2 u \sin^2 v + c^2 \cos^2 u \quad , \\ F &= (a^2 - b^2) \sin u \cos u \sin v \cos v \quad , \\ G &= a^2 \cos^2 u \sin^2 v + b^2 \cos^2 u \cos^2 v \quad , \\ L &= \frac{abc}{\Delta} \quad , \\ M &= 0 \quad , \\ N &= \frac{a^2 b^2 c^2 \cos^2 u}{\Delta} \quad . \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} K &= \frac{a^2 b^2 c^2}{\Delta^4} \quad , \\ H &= \frac{abc[(a^2 + b^2 + c^2) - (a^2 \cos^2 u \cos^2 v + b^2 \cos^2 u \sin^2 v + c^2 \sin^2 u)]}{2\Delta^3} \quad . \end{aligned}$$

3 回転面

前項で述べた曲面論についてを, 今回回転面という曲面に絞り, より深く議論する. この節の目的は, 回転面の特徴を生かし, ガウス曲率及び平均曲率をワン・パラメーターで表すことである.

定義 3.1. xz 平面上で考えたとき, xz 平面上の z 軸と交わらない曲線を z 軸の周りに回転して得られる曲面を回転面という.

xz 平面上の z 軸と交わらない曲線を

$$(x, z) = (f(u), g(u))$$

とすると, それを z 軸の周りに回転して得られる回転面は,

$$(x, y, z) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

という式で与えられる.

3.1 回転面のガウス曲率と平均曲率

前章で行った方法をもとに回転面におけるガウス曲率と平均曲率を求めていく.

$$p(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

という一般の回転面を考える.

はじめに第一基本量から考えていく.

$$\begin{aligned} E &= p_u \cdot p_u \\ &= (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, g'(u)) \cdot (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, g'(u)) \\ &= f'(u)^2 + g'(u)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= p_u \cdot p_v \\ &= (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, g'(u)) \cdot (-f(u) \sin v, f'(u) \cos v, 0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= p_v \cdot p_v \\ &= (-f(u) \sin v, f'(u) \cos v, 0) \cdot (-f(u) \sin v, f'(u) \cos v, 0) \\ &= f(u)^2. \end{aligned}$$

次に第二基本量をもとめるために単位法線ベクトル e を求める.

$$e = \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|}$$

であるから

$$\begin{aligned} e &= \frac{f(u)(-g'(u) \cos v, -g'(u)f(u) \sin v, f'(u))}{f(u)\sqrt{f'(u)^2 + g'(u)^2}} \\ &= \frac{(-g'(u) \cos v, -g'(u)f(u) \sin v, f'(u))}{\sqrt{f'(u)^2 + g'(u)^2}}. \end{aligned}$$

よって第二基本量を求めることができる.

$$\begin{aligned} L &= p_{uu} \cdot e \\ &= (f''(u) \cos v, f''(u) \sin v, g''(u)) \cdot \frac{(-g'(u) \cos v, -g'(u)f(u) \sin v, f'(u))}{\sqrt{f'(u)^2 + g'(u)^2}} \\ &= \frac{f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)}{\sqrt{f'(u)^2 + g'(u)^2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= p_{uv} \cdot e \\ &= (-f'(u) \sin v, f'(u) \cos v, 0) \cdot \frac{(-g'(u) \cos v, -g'(u)f(u) \sin v, f'(u))}{\sqrt{f'(u)^2 + g'(u)^2}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N &= p_{vv} \cdot e \\ &= (-f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, 0) \cdot \frac{(-g'(u) \cos v, -g'(u)f(u) \sin v, f'(u))}{\sqrt{f'(u)^2 + g'(u)^2}} \\ &= \frac{f(u)g'(u)}{\sqrt{f'(u)^2 + g'(u)^2}}, \end{aligned}$$

これで第二基本量も求まったので, 最後にガウス曲率と平均曲率を求める.

$$\begin{aligned} K &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \\ &= \frac{g'(u)(f'(u)g''(u) - g'(u)f''(u))}{f(u)(f'(u)^2 + g'(u)^2)^2}, \\ H &= \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{g'(u)}{f(u)(f'(u)^2 + g'(u)^2)^{1/2}} + \frac{f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)}{(f'(u)^2 + g'(u)^2)^{3/2}} \right). \end{aligned}$$

さらに u が弧長パラメーターであるなら,

$$f'(u)^2 + g'(u)^2 = 1$$

となる. この両辺を微分し,

$$f'(u)f''(u) + g'(u)g''(u) = 0$$

となる. これより

$$\begin{aligned} (f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u))g'(u) &= f'(u)g''(u)g'(u) - f''(u)g'(u)g'(u) \\ &\quad - f'(u)f'(u)f''(u) - f''(u)(1 - f'(u)f'(u)) \\ &= -f''(u) \quad . \end{aligned}$$

これよりガウス曲率と平均曲率は次のように表される.

$$\begin{aligned} K &= \frac{g'(u)(f'(u)g''(u) - g'(u)f''(u))}{f(u)(f'(u)^2 + g'(u)^2)^2} \\ &= -\frac{f''(u)}{f(u)} \quad . \\ H &= \frac{1}{2} \left(\frac{g'(u)}{f(u)(f'(u)^2 + g'(u)^2)^{1/2}} + \frac{f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)}{(f'(u)^2 + g'(u)^2)^{3/2}} \right) \\ &= \frac{g'(u)}{2f(u)} - \frac{f''(u)}{2g'(u)} \quad . \end{aligned}$$

3.2 具体例 (楕円面)

前節で楕円面を定義にしたがって, 楕円面におけるガウス曲率及び平均曲率を求めた. 今回は上記のとおり, 回転面のガウス曲率と平均曲率はワンパラメータで表されることが分かったので, 上記の式を使って簡単に回転面となる楕円面のガウス曲率と平均曲率を示したいと思う.

z 軸を回転軸とする楕円面の生成曲線は

$$\left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \mid a \neq 0, b \neq 0 \right\}$$

この式にパラメーター変換すると,

$$(x, z) = (f(u), g(u)) = (a \cos u, b \sin u)$$

である. すると回転面の式は, $p(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$ であるので, 楕円面 $p(u, v)$ は

$$p(u, v) = (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, b \sin u)$$

すると楕円面のガウス曲率 K と平均曲率 H は,

$$\begin{aligned} K &= \frac{g'(u)(f'(u)g''(u) - g'(u)f''(u))}{f(u)(f'(u)^2 + g'(u)^2)^2} \\ &= \frac{b^2}{(a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u)^2} \\ H &= \frac{g'(u)}{f(u)(f'(u)^2 + g'(u)^2)^{1/2}} + \frac{f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)}{(f'(u)^2 + g'(u)^2)^{3/2}} \\ &= \frac{b}{a(a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u)^{1/2}} + \frac{ab}{(a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u)^{3/2}} \end{aligned}$$

となり, 前節の楕円面のガウス曲率及び平均曲率の値の b, c を $(b = a), (c = b)$ とすれば一致することがわかる.

4 特別な回転面

この節では前節で求めた回転面におけるガウス曲率と平均曲率を表す式をもとに, ガウス曲率と平均曲率がそれぞれ恒等的に 0 になる回転面, 0 以外の値で一定になる回転面について示した.

4.1 ガウス曲率が恒等的に 0 になる回転面

定理 4.1. ガウス曲率が恒等的に 0 になる回転面は円柱面, 円錐面, 平面のどれかに局所的に合同である.

証明

ガウス曲率が恒等的に 0 になる回転面について調べているので $K = 0$ とし, u を弧長パラメーターとすると,

$$K = -\frac{f''(u)}{f(u)} = 0$$

となるから

$$f''(u) = 0$$

となる. $f'(u)^2 + g'(u)^2 = 1$ と合わせて

$$\begin{aligned} x &= f(u) = au + b \\ z &= g(u) = \pm u\sqrt{1 - a^2} + c \quad (a, b, c \text{ は定数で, } |a| \leq 1) \end{aligned}$$

ただし, $g(u) = -u\sqrt{1-a^2} + c$ を $\pi/2$ だけ回転させると, $g(u) = u\sqrt{1-a^2} + c$ と一致する.

また, $g(u) = u\sqrt{1-a^2}$ を c だけ平行移動すると, $g(u) = u\sqrt{1-a^2} + c$ と一致するので,

$z = g(u) = u\sqrt{1-a^2}$ として考えてもよい.

このとき $a = 0$ のときは得られる回転面は

$$(x, z) = (f(u), g(u)) = (b, u)$$

となり, **円柱面**となる.

また $0 < a < 1$ のときは得られる回転面は

$$(x, z) = (f(u), g(u)) = (au + b, u\sqrt{1-a^2})$$

となり, **円錐面**となる. さらに $a = 1$ のときは得られる回転面は

$$(x, z) = (f(u), g(u)) = (u + b, 0)$$

となり, **平面**となる.

4.2 ガウス曲率一定の回転面

定理 4.2. ガウス曲率が 0 以外の値で一定となる回転面は球面か擬球面のどちらかに局所的に合同である.

証明

曲面 $p(u, v)$ に対して, それを c 倍に拡大した曲面 $cp(u, v)$ のガウス曲率, 平均曲率はもとの曲面のガウス曲率, 平均曲率のそれぞれ $1/c^2$ 倍, $1/c$ 倍になる. というのも, $\tilde{p}(u, v) = cp(u, v)$ とすると, $\tilde{p}_u = cp_u, \tilde{p}_v = cp_v$ なので $\tilde{p}$ の第一基本量は p の第一基本量の c^2 倍になる. また p と $\tilde{p}$ の (u, v) における単位法線ベクトルは一致し $\tilde{p}_{uu} = cp_{uu} \cdots$ が成り立つから, $\tilde{p}$ の第二基本量は p の第二基本量の c 倍になるためである. であるから, ガウス曲率が $-1, 1$ の場合を考える.

ガウス曲率 $K = 1$ のときは, $f'' = -f$ となる. この微分方程式を解くと,

$$\begin{aligned} x &= f(u) \\ &= \alpha \cos u + \beta \sin u \quad (\alpha, \beta \text{ は定数}) \\ &= a \cos(u - \delta) \quad (a = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \delta = \arctan(\frac{\beta}{\alpha})) \end{aligned}$$

と書けるが, これは周期関数なので, $f(u) = a \cos u$ ($a > 0$) として一般性を失わない. これと $(f')^2 + (g')^2 = 1$ より

$$\begin{aligned} z &= g(u) \\ &= \pm \int_0^u \sqrt{1 - a^2 \sin^2 t} dt \end{aligned}$$

今回も, ガウス曲率が恒等的に 0 になる回転面を求めたときと同様に,

$$z = g(u) = \int_0^u \sqrt{1 - a^2 \sin^2 t} dt$$

として考えてもよい.

とくに, $a = 1$ のときは**球面**が得られる.

ガウス曲率 $K = -1$ のときのときは, $f'' = f$ となる. この微分方程式を解くと

$$x = f(u) = ae^u + be^{-u} \quad (a, b \text{ は定数})$$

である. これと, $(f')^2 + (g')^2 = 1$ より

$$\begin{aligned} z &= g(u) \\ &= \pm \int_0^u \sqrt{1 - (ae^t + be^{-t})^2} dt \end{aligned}$$

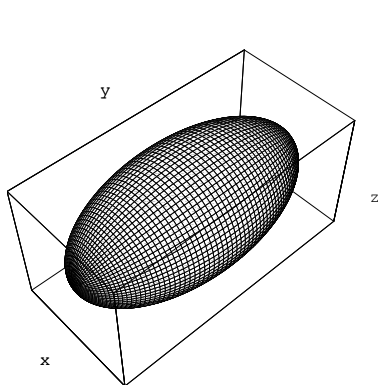
ここでもガウス曲率が恒等的に 0 の場合と同様にして考えてよい. つまり,

$$z = \int_0^u \sqrt{1 - (ae^t + be^{-t})^2} dt$$

としてよい. とくに $a = 0$ で $b = 1$ のとき

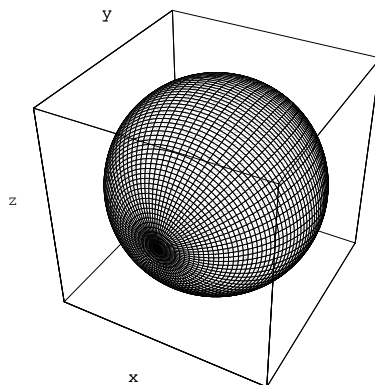
$$x(u) = e^{-u}, \quad z(u) = \int_0^u \sqrt{1 - (e^{-2t})} dt$$

から得られる回転面を**擬球面**という.



$$K = 1, a < 1$$

図 4. 1



$$K = 1, a = 1$$

図 4. 2

4.3 平均曲率が恒等的に 0 になる回転面

今, 平均曲率が恒等的に 0 になる回転面について調べているので $H = 0$ とし, u を弧長パラメーターとすると,

$$H = \frac{g'(u)}{2f(u)} - \frac{f''(u)}{2g'(u)} = 0$$

であるから

$$f(u)f''(u) = g'(u)^2 = 1 - f'(u)^2$$

したがって

$$(f(u)f'(u))' = f'(u)^2 + f(u)f''(u) = 1$$

となり, 両辺を積分すると

$$\frac{1}{2}(f(u)^2)' = f(u)f'(u) = u + c$$

ただし, c は積分定数. さらにもう一度積分して

$$f(u)^2 = u^2 + 2cu + d$$

ただし, d は積分定数. よって

$$f(u) = \sqrt{u^2 + 2cu + d}$$

となる. よって

$$\begin{aligned} g'(u) &= \pm \sqrt{1 - f'(u)^2} \\ &= \pm \sqrt{\frac{d - c^2}{u^2 + 2cu + d}} \end{aligned}$$

となる. 簡単のため $c = 0, d = a^2$ ($a > 0$) とすると

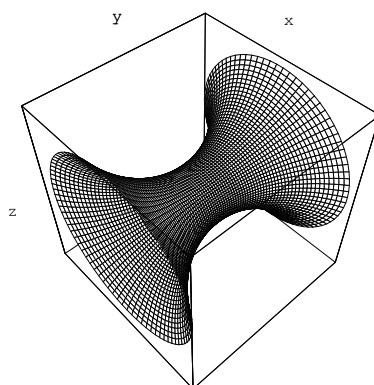
$$\begin{aligned} x = f(u) &= \sqrt{u^2 + a^2} \\ z = g(u) &= \pm \int_0^u \frac{a}{\sqrt{t^2 + a^2}} = \pm a \sinh^{-1} \frac{u}{a} \end{aligned}$$

となりそこから u を削除すると,

$$x = a \cosh \frac{z}{a}$$

となり, この曲線 (懸垂線と呼ばれる曲線) を z 軸で回転させると平均曲率は 0 となる. この回転面を**懸垂面**とよばれている.

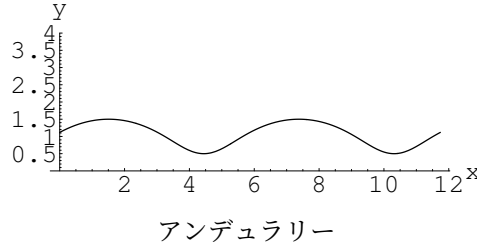
平均曲率が 0 になる回転面は他にも**常螺旋面**などが存在するが, 今回は平均曲率が 0 になる回転面の一例として懸垂面をあげた。



懸垂面

4.4 平均曲率一定の回転面

平均曲率が 0 以外の値で一定となる回転面として**アンデュロイド**の例をあげる. アンデュロイドとは, 楕円を定直線上で滑らないように転がしたときの焦点の軌跡として得られるアンデュラリーとよばれる曲線を定直線のまわりに回転して得られる回転面のことである.



はじめに, xy 平面の極座標 (r, θ) を用いて

$$r = r(\theta) = \frac{a}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (a > 0, 0 < \epsilon < 1)$$

で表される曲線は原点 O を 1 つの焦点とする楕円で, ϵ はその離心率となる. この楕円を助変数表示すると,

$$\gamma(\theta) := r(\theta)(\cos \theta, \sin \theta)$$

となり, その $P = \gamma(\theta)$ における接ベクトルは,

$$\gamma'(\theta) = \left(\frac{-a \sin \theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2}, \frac{\epsilon + a \cos \theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2} \right)^2$$

となる. ベクトル $\overrightarrow{PO}$ と P における楕円の接線とのなす角を ξ とすれば,

$$\cos \xi = \frac{-\epsilon \sin \theta}{\sqrt{1 + 2\epsilon \cos t + \epsilon^2}}, \quad \sin \xi = \frac{1 + \epsilon \cos \theta}{\sqrt{1 + 2\epsilon \cos t + \epsilon^2}}$$

が成り立つ. この楕円を x 軸上に回転させる.

楕円が 1 つの焦点のまわりに角度 θ だけ回転したとき, x 軸との接線の移動距離 $s(\theta)$ は曲線 $\gamma(\theta)$ の弧長となるので,

$$s(\theta) = \int_0^\theta \frac{a \sqrt{1 + 2\epsilon \cos t + \epsilon^2}}{(1 + \epsilon \cos t)^2} dt$$

となる. このとき, 楕円の焦点の座標は

$$\begin{aligned} (x, y) &= (x(\theta), y(\theta)) \\ &= (s(\theta) + r(\theta) \cos \xi(\theta), r(\theta) \sin \xi(\theta)) \end{aligned}$$

となる. 曲線 $(x(\theta), y(\theta))$ を x 軸のまわりに回転させてできる回転面の平均曲率は,

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{x''y' - x'y''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} + \frac{x'}{y(x'^2 + y'^2)^{1/2}} \right)$$

となる. ここで, $\Delta = \sqrt{1 + 2\epsilon \cos \theta + \epsilon^2}$ とすると,

$$\Delta' = -\frac{\epsilon \sin \theta}{\Delta}, \quad (\cos \xi)' = \frac{\epsilon^2 \sin^2 \theta - \Delta^2 \epsilon \cos \theta}{\Delta^3}$$

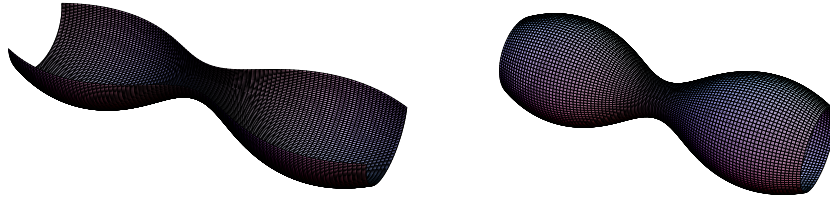
より

$$\begin{aligned} x' &= \frac{a(1 + \epsilon \cos \theta)}{\Delta^3}, \\ x'' &= \frac{(-a\epsilon \sin \theta)\Delta^3 - 3a(1 + \epsilon \cos \theta)\Delta^2 \Delta'}{\Delta^6}, \\ y' &= \frac{a\epsilon \sin \theta}{\Delta^3}, \\ y'' &= \frac{(a\epsilon \cos \theta)\Delta^3 - 3(a\epsilon \sin \theta)\Delta^2 \Delta'}{\Delta^6}, \end{aligned}$$

以上を代入すると

$$H = \frac{1 - \epsilon^2}{2a} \quad (\epsilon < 1)$$

となり, アンデュロイドの平均曲率は一定になることが証明できた.



アンデュロイド

5 おわりに

今回のテーマで扱った曲面はほんの少しであり, 平均曲率一定の曲面一つとってもまだまだたくさん存在する. 大学院に行き, より多くの曲面について詳しく勉強して行きたいと思う.

最後になりましたが本論文をつくるにあたって, 指導教員の田丸博士先生をはじめ, 先輩方には, ご多忙にもかかわらず, 助言やご指導をいただきました. この場を借りて深く御礼申し上げます.

6 参考文献

- 1 小林 昭七, 曲線と曲面の微分幾何 裳華房, 1995
- 2 梅原 雅顕, 山田 光太郎, 曲線と曲面～微分幾何アプローチ～, 裳華房, 2002
- 3 剣持 勝衛, 曲面論講義～平均曲率一定曲面～, 培風館, 2000