平成２０年度卒業論文
いくつかの対称空間の
線形イソトロピー表現の軌道

理学部数学科
B054405　　　宇都宮　洋志
指導教官　　　田丸　博士

平成 21 年 10 月 6 日

目 次

1 はじめに

対称空間に対して線形イソトロピー表現という表現が定義される．卒業論文では, まず対称空間や軌道等の定義をして, それらの具体的な例や注意点を挙げた, この章の最後に命題として対称空間 $SL(n,\mathbb{R})/SO(n)$ の線形イソトロピー表現 φ を与え, 証明ををした.
次の章では, 実射影空間について詳しく取り上げ, $\mathbb{R}P^n$ が $SO(n+1)/S(O(1)\times O(n))$ や $O(n+1)/O(1)\times O(n)$ と同型になっていることを証明した.
最後の章は $n=2,3,4$ の場合の $SL(n,\mathbb{R})/SO(n)$ の線形イソトロピー表現の軌道とその次元を求めた.
軌道を求めるにあたって, 対称行列 X を $X=$diag$(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)(\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_n)$ の場合のみを考えればよいことを証明した．そして, X をうまく取ってくることによって良い軌道 (射影空間) が得られることがわかった.

2　準備およびその例

本論文では, 表現 $\varphi : SO(n) \to GL(\mathfrak{p}) : g \mapsto \varphi_g : \mathfrak{p} \to \mathfrak{p} : X \mapsto gXg^{-1}$ を調べる. この章ではこの表現が対称空間 $SL(n,\mathbb{R})/SO(n)$ の線形イソトロピー表現であることを示す. ここで, $\mathfrak{p} = \{X \in sl(n,\mathbb{R}) \mid {}^tX = X\}$ とする.

定義 2.1. ハウスドルフ空間 M が**多様体**であるとは, 次を満たす $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ が存在すること.

(1) $M = \cup_\alpha U_\alpha, U_\alpha \subset M$,
(2) $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$,
(3) $U_\alpha \cap U_\beta \neq 0$ のとき, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ は C^∞ である.

例 1. S^1 は 1 次元多様体である.

証明は, $x > 0, x < 0, y > 0, y < 0$ のように 4 つの開集合に分ければよい. これは, S^1 が 4 つの関数のグラフ $y = \pm\sqrt{1-x^2}, x = \pm\sqrt{1-y^2}$ を滑らかにつなぎ合わせたという意味である.

定義 2.2. (M,g) をリーマン多様体とする. (M,g) が **リーマン対称空間** であるとは、次が成り立つこと : $\forall p \in M, \exists S_p : M \to M$: 点対称.

定義 2.3. リーマン多様体 (M,g) および $p \in M$ に対して, 写像 $S_p : M \to M$ が p における**点対称**とは, 次を満たすこと.

(1) p は S_p の孤立固定点,
(2) $S_p^2 = \mathrm{id}$(id は恒等写像),
(3) S_p は等長変換 (距離を保つ写像).

注意　孤立固定点であるとは $S_p(p) = p$ かつ $\mathrm{Fix}(S_p, M)$ の中で p が開集合であること. ただし,

$$\mathrm{Fix}(S_p, M) := \{x \in M \mid S_p(x) = x\}$$

これは, p の非常に近くの点は S_p で固定されないという意味.

例 2. 平面 $\mathbb{R}^2$ に標準的な距離を入れた空間は, 対称空間になる. 点 p に関する点対称 S_p は、$S_p = 2p - x$ と書ける.

定義 2.4. G を群, K をその部分群とする. このとき G 上の同値関係を次で定める. : $g \sim h :\Leftrightarrow g^{-1}h \in K$. この同値関係による商集合 $G/\sim$ を G の K による**商空間**と呼び, G/K で表す.

定義 2.5. 次を満たす G を リー群と呼ぶ.

(1) G は群,
(2) G は多様体,
(3) 積 $G \times G \to G : (g, h) \mapsto gh$ および逆元 $G \to G : g \mapsto g^{-1}$ を取る写像が C^∞ となる.

例 3. $GL(n, \mathbb{R})$ は n^2 次元リー群である.

Proof. $GL(n, \mathbb{R})$ は群であり, さらに $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$ の開集合なので n^2 次元多様体. 積および逆元は成分の有理式で書くことができるので C^∞ である. □

定義 2.6. G を連結リー群, K を G の閉部分群とする. これらの組 (G, K) が**リーマン対称対**とは, 次が成り立つことである.

(1) 次を満たす対合 $\sigma : G \to G$ が存在する :$\mathrm{Fix}(\sigma, G)^0 \subset K \subset \mathrm{Fix}(G, K)$.
(2) K はコンパクト.

ここで σ が**対合**とは, 準同形写像であって σ^2=id を満たすことである. この対合のことを**カルタン対合**と呼ぶ.

定義 2.7. ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ とその上の積 $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ の組が**リー代数**とは次を満たすこと.

(1) $[,]$ は双線形写像,
(2) 積は交代 $\Leftrightarrow \forall X, Y \in \mathfrak{g}, [X, Y] = -[Y, X]$,
(3) 積は Jacobi 律 $\Leftrightarrow \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}, [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X].Y] = 0$.

例 4. $gl(n, \mathbb{R}) := M_n(\mathbb{R})$ に積 $[X, Y] := XY - YX$ を入れたものはリー代数である.

Proof. (1) は明らかである.
(2)$[Y, X] = YX - XY = -(XY - YX) = -[X, Y]$.
(3)$[[X, Y], Z] = [XY - YX, Z] = XYZ - ZYX - ZXY + ZYX$,
同様に, $[[Y, Z], X] = YZX - ZYX - XYZ + XZY$,
$[[Z, X], Y] = ZXY - XZY - YZX + YXZ$ を得る.
よって, $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ となる. □

定義 2.8. リー代数 $\mathfrak{g}$ に対して, ベクトル空間直和分解 $\mathrm{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ が**カルタン分解**とは, 次が成り立つこと.

(1) $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$,
(2) $\mathfrak{k}$ はコンパクト部分リー代数.

注意　$[\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k} \Leftrightarrow \forall X, Y \in \mathfrak{p}$, $[\mathrm{X,Y}] \in \mathfrak{k}$.

定理 2.9. σ をリー群のカルタン対合, $\theta := (d\sigma)_e$ とする. このとき,
(1) $\theta^2 = \mathrm{id}$,
(2) θ の固有空間分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$($\mathfrak{k}$ は $1, \mathfrak{p}$ は -1 の固有空間) とすると, これはリー代数のカルタン分解になる.

例 5. 対称対 $(sl(n,\mathbb{R}), o(n))$ のカルタン対合 $\theta(X) = -{}^tX$ に対応するカルタン分解は, $sl(n,\mathbb{R}) = o(n) \oplus \{X \in sl(n,\mathbb{R}) \mid^t X = X\}$.

定義 2.10. 群 K とベクトル空間 V に対して, 群準同形写像 $\varphi : K \to GL(V)$ のことを**線形表現**または単に**表現**と呼ぶ.

注意　V の基底を固定すると, $\varphi : K \to GL(V) = GL(n,\mathbb{R}) : g \mapsto \varphi_g$ より, 表現は群を行列で表す.

定義 2.11. 各 v に対して, $K.v := \{\varphi_g(v) \in V \mid g \in K\}$ を v を通る K の**軌道**と呼ぶ.

例 6. 表現 $SO(n) \to \mathbb{R}^n$ に対して, $v \in \mathbb{R}^n$ を通る軌道は,

$$SO(n).v = \{w \in \mathbb{R}^n \mid |w| = |v|\} \simeq S^{n-1}(v \neq 0).$$

定義 2.12. (G,K) を対称対, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ をカルタン分解とする.

$$\varphi : K \to GL(\mathfrak{p}) : g \mapsto \varphi_g := (dI_g)_e|_{\mathfrak{p}}$$

を**線形イソトロピー表現**と呼ぶ. ただし, $I_g : G \to G : h \mapsto ghg^{-1}$、$I_g(e) = e$.

注意　$X \in \mathfrak{p} \Rightarrow (dIg)_e(X) \in \mathfrak{p}$ を示す必要がある.

Proof.　$X \in \mathfrak{p}$ をとる.
θ を $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ のカルタン対合とすると, $\theta(X) = -X$ である.
σ を (G,K) のカルタン対合とすると, $\theta = (d\sigma)_e$ となる.
示したいことは, $\theta \circ (dIg)_e(X) = -(dIg)_e(X) = (dIg)_e \circ \theta(X)$ である.

$$\begin{aligned}\sigma \circ I_g(h) &= \sigma(ghg^{-1}) = \sigma(g)\sigma(h)\sigma(g)^{-1}\\ &= g\sigma(h)g^{-1} = I_g \circ \sigma(h).\end{aligned}$$

この両辺を e で微分すればよい. □

命題 1. 対称空間 $SL(n,\mathbb{R})/SO(n)$ の線形イソトロピー表現 φ は, $\mathfrak{p} := \{X \in sl(n,\mathbb{R}) \mid^t X = X\}$ とすると, $\varphi : SO(n) \to GL(p) : g \mapsto \varphi_g : \mathfrak{p} \to \mathfrak{p} : X \mapsto gXg^{-1}$ で与えられる.

Proof. $\forall g \in SO(n)$ をとる.
I_g を $SL(n,\mathbb{R}) \to SL(n,\mathbb{R}) : h \mapsto ghg^{-1}$ への写像とする.
$(dI_g)_e(X) = \frac{d}{dt}(g\cdot \exp(tX)\cdot g^{-1})|_{t=0}$
$= (g \cdot X \cdot \exp(tX) \cdot g^{-1})|_{t=0}$
$= gXg^{-1}$. □

3 $\mathbb{R}P^n$ について

実射影空間とは $\mathbb{R}P^n := \{l \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid l$ は 0 を通る直線 $\}$ のことである. これは,$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ を次の同値関係で割った商集合と言っても良い. $v \sim w :\Leftrightarrow \exists c \neq 0 : v = cw$. すなわち, $\mathbb{R}P^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim = S^n/\sim$ である.

例 7. 実射影空間は次のように商空間として表示できる.

$$\mathbb{R}P^n = O(n+1)/O(1) \times O(n).$$

Proof. φ を $O(n+1) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}P^n) := \{f : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^n :$ 全単射 $\} : g \to \varphi_g$ への写像, φ_g を $\mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^n : [v] \mapsto \varphi_g([v]) := [gv]$ への写像とする.

claim1 $O(n+1)$ が $\mathbb{R}P^n$ に作用している.

(1)φ_g の well-defind 性を示す.
$[v] = [w]$ ならば, $v, w \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ かつ $\exists c \neq 0 cv = w$ が成り立つ. よって, $\varphi_g(cv) = \varphi_g(w) = gw$ より $\varphi_g(cv) = g(cv) = c(gv) = gw$ となる. つまり, $[gv] = [gw]$ より $[\varphi_g(v)] = [\varphi_g(w)]$.

(2) 全単射性を示す.
$(2)-(1)$ 単射性
$\varphi_g([v]) = \varphi_g([w])$ とすると, $[gv] = [gw]$ より $\exists c \neq 0, c(gv) = gw$ となる. つまり, $\varphi_g(cv)$=$\varphi_g(w)$ より $v, w \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ かつ $\exists c \neq 0, cv = w$.
よって $[v] = [w]$.
$(2)-(2)$ 全射性
$\forall [y] \in \mathbb{R}P^n$ をとる. $[x] = [g^{-1}y] \in \mathbb{R}P^n$ とすると, $\varphi_g([x]) = [gx] = [gg^{-1}y] = [y]$.
よって, (i)(ii) より $O(n+1)$ は $\mathbb{R}P^n$ に作用する.

claim2 この作用が推移的となる.

$p = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right] \in \mathbb{R}P^n$ をとる.
$\forall [q] = [\frac{1}{|q|} q] \in \mathbb{R}P^n$ とすると, $\exists \{q_1, q_2, \cdots, q_{n+1}\}; q_1 = q$ とできる.
$g := (q_1, q_2, \cdots, q_{n+1})$ とすれば ${}^t gg = I_{n+1}$ より $g \in O(n+1)$.

よって, $g \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = q_1 = q$.
よってこの作用は推移的となる.

claim3 $p \in \mathbb{R}P^n$ に対して, $G_p := \{g \in O(n+1) \mid \varphi_g(p) = p\}$ とおくと, $\mathbb{R}P^n = O(n+1)/G_p$ と表せる.

claim4 計算する.

$\varphi_g(p) = \left[g \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right] \Rightarrow g \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (a = \pm 1)$. よって,
$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (a を (1.1), b を $(n.1)$, c を $(1, n)$, d を (n, n) 行列 とする) とおける. $g \in O(n+1)$ より ${}^t gg = I_{n+1} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t a & {}^t b \\ {}^t c & {}^t d \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} {}^t aa +^t cc & {}^t ab +^t cd \\ {}^t ba +^t dc & {}^t bb +^t dd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.
$a = \pm 1$ より ${}^t cc = 0$. よって, $|c|^2 = 0$ より $c = 0, b = 0$ となり ${}^t bb = I_n$
つまり $a \in O(1), b \in O(n)$.
以上から $\mathbb{R}P^n = O(n+1)/O(1) \times O(n)$ が成り立つ.

□

注意　同様の証明で $\mathbb{R}P^n = SO(n+1)/S(O(1) \times O(n))$ も示せる.

4　軌道とその次元を求める

命題 2. $\mathfrak{p}$ の任意の元 X に対して, $H = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ が存在して, X を通る軌道と H を通る軌道は同じになる.

Proof.　$\forall X \in \mathfrak{p}$ をとる. 参考文献 [1], P179, 定理 7.11 より,

$$\exists g \in SO(n)\ ;\ g^{-1}Xg = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と対角化できる. よって, $g^{-1}Xg = H$ より $X = gHg^{-1} = g.H$.

□

この証明から, $\forall X \in p$ の軌道を調べるには, 対角化された,

$g^{-1}Xg = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ の形の軌道を調べればよい.

命題 3. $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}$ とする $(n \geq 2)$. X の対角成分 $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ の順序を適当に入れ換えてできた行列を Y とする. このとき,$\forall Y, \exists g \in SO(n); g.Y = X$ が成り立つ. つまり, Y と X は同じ軌道上に存在する.

claim　$\forall X \in \mathfrak{p}, g = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & i & i+1 & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & -1 & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \in SO(n)$ とすると,

$g.X$ は X の対角成分の i 番目と $i+1$ 番目を入れ換える.

Proof. $\forall X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_i & & & \\ & & & \lambda_{i+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}$ をとる.

上の $g \in SO(n)$ に対して,

$g.X = gXg^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & -1 & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_i & & & \\ & & & \lambda_{i+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & -1 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & -\lambda_{i+1} & & \\ & & \lambda_i & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & -1 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_{i+1} & & & \\ & & & \lambda_i & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ となり, 成り立つ.

□

Proof. claim を繰り返すことによって Y と X を通る軌道は同じになる. よって命題 3 は成り立つ. □

命題 3 より，X の対角成分を大きい順に並べた $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}(\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n)$ を通る軌道のみを調べればよい.

命題 4. 先の表現 $\varphi_g(X) = gXg^{-1}(X \in \mathfrak{p})$ に対して，$SO(n)_X := \{g \in SO(n) \mid \varphi_g(X) = X\}$ とすれば, $SO(n).X = SO(n)/SO(n)_X$ となる.

Proof. f を $SO(n) \to \mathrm{Aut}(SO(n).X) : h \mapsto f_h$ への写像, f_h を $SO(n).X \to SO(n).X : gXg^{-1} \mapsto (hg)X(hg)^{-1}$ への写像とする.

claim1 f_h は全単射である.
(1) 全射性を示す.
$\forall (hg)X(hg)^{-1} \in SO(n).X, \exists k = gXg^{-1} \in SO(n).X, f_h(k) = (hg)X(hg)^{-1}$.
(2) 単射性を示す.
$f_h(gXg^{-1}) = f_h(g'Xg'^{-1}) \Rightarrow (hg)X(hg)^{-1} = (hg')X(hg')^{-1}$ より, 左から h^{-1}, 右から h をかければよい.

claim2 f は作用する (i.e.f は群準同型).
$\forall h, h' \in SO(n)$ に対して,
$f_h \circ f'_h(gXg^{-1}) = f_h((h'g)X(h'g)^{-1}) = (hh'g)X(hh'g)^{-1} = f_{hh'}(gXg^{-1})$.

claim3 f は推移的である (i.e.$\forall p, q \in SO(n).X, \exists k \in SO(n), f_k(p) = q$).
$\forall p, q \in SO(n).X$ をとる.
$\exists g, h \in SO(n), p = gXg^{-1}, q = hXh^{-1}$ とできる.
ここで, $k = hg^{-1} \in SO(n)$ とすれば,
$f_k(p) = (kg)X(kg)^{-1} = (hg^{-1}g)X(hg^{-1}g)^{-1} = hXh^{-1} = q$.

□

4.1 n=2 の場合

命題 5. $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ $(\lambda_i \in \mathbb{R})$ のとき, X を通る軌道は,
(i)$\lambda_1 = \lambda_2$ のとき $SO(2).X = SO(2)/SO(2) = \{e\}$ でこの軌道の次元は 0 である.
(ii)$\lambda_1 > \lambda_2$ のとき $SO(2).X = SO(2)/S(O(1) \times O(1)) = \mathbb{R}P^1$ でこの軌道の次元は 1 である.

Proof. $g \in SO(2)_X \Leftrightarrow X = \varphi_g(X) = gXg^{-1}$

$$\Leftrightarrow Xg = gX$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 g_{11} & \lambda_1 g_{12} \\ \lambda_2 g_{21} & \lambda_2 g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 g_{11} & \lambda_2 g_{12} \\ \lambda_1 g_{21} & \lambda_2 g_{22} \end{pmatrix}$$

(i)$\lambda_1 = \lambda_2$ のとき

$g = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}$ なので $g \in SO(2)$

よって軌道は $SO(2).X = SO(2)/SO(2) = \{e\}$.

またこの軌道の次元は 0 である.

(ii)$\lambda_1 > \lambda_2$ のとき

$g = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$ なので $g \in S(O(1) \times O(1))$

よって軌道は $SO(2).X = SO(2)/S(O(1) \times O(1)) = \mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}^4$.

またこの軌道の次元は 1 である.

□

4.2 n=3 の場合

命題 6. $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}$ のとき, X を通る軌道は,
(i)$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ のとき $SO(3).X = SO(3)/SO(3) = \{e\}$ でこの軌道の次元は 0 である.
(ii)$\lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3$ のとき $SO(3).X = SO(3)/S(O(1) \times O(2)) = \mathbb{R}P^2 \subset \mathbb{R}^5$ でこの軌道の次元は 2 である.
(iii)$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ のとき $SO(3).X = SO(3)/S(O(1) \times O(1) \times O(1))$ でこの

軌道の次元は 3 である.

Proof. $g \in SO(3)_X \Leftrightarrow X = \varphi_g(X) = gXg^{-1}$

$$\Leftrightarrow Xg = gX$$

よって,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 g_{11} & \lambda_1 g_{12} & \lambda_1 g_{13} \\ \lambda_2 g_{21} & \lambda_2 g_{22} & \lambda_2 g_{23} \\ \lambda_3 g_{31} & \lambda_3 g_{32} & \lambda_3 g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 g_{11} & \lambda_2 g_{12} & \lambda_3 g_{13} \\ \lambda_1 g_{21} & \lambda_2 g_{22} & \lambda_3 g_{23} \\ \lambda_1 g_{31} & \lambda_2 g_{32} & \lambda_3 g_{33} \end{pmatrix}$$

(i)$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ のとき

$$g = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \text{ より } g \in SO(3)$$

よって軌道は, $SO(3).X = SO(3)/SO(3) = \{e\}$.

またこの軌道の次元は 0 である.

(ii)$\lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3$ のとき

$$g = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \text{ より } g \in S(O(1) \times O(2))$$

よって軌道は, $SO(3).X = SO(3)/S(O(1) \times O(2)) = \mathbb{R}P^2 \subset \mathbb{R}^5$.

またこの軌道の次元は 2 である.

(iii)$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ のとき

$$g = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \text{ より } g \in S(O(1)\times O(1)\times O(1))$$

よって軌道は, $SO(3).X = SO(3)/S(O(1)\times O(1)\times O(1))$.

またこの軌道の次元は 3 である.

$\square$

4.3 n=4 の場合

命題 7. $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}$ に対して, X を通る軌道は,
(i)$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ のとき $SO(4).X = SO(4)/SO(4) = \{e\}$ でこの軌道の次元は 0 である.
(ii)$\lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ のとき $SO(4).X = SO(4)/S(O(1)\times O(3)) = \mathbb{R}P^3 \subset \mathbb{R}^6$ でこの軌道の次元は 3 である.
(iii)$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 = \lambda_4$ のとき $SO(4).X = SO(4)/S(O(1)\times O(1)\times O(2))$ でこの軌道の次元は 5 である.
(iv)$\lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3 = \lambda_4$ のとき $SO(4).X = SO(4)/S(O(2)\times O(2))$ でこの軌道の次元は 4 である.
(v)$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$ のとき $SO(4).X = SO(4)/S(O(1)\times O(1)\times O(1)\times O(1))$ でこの軌道の次元は 6 である.

Proof. $g \in SO(4)_X \Leftrightarrow X = \varphi_g(X) = gXg^{-1}$

$$\Leftrightarrow Xg = gX$$

よって,
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 g_{11} & \lambda_1 g_{12} & \lambda_1 g_{13} & \lambda_1 g_{14} \\ \lambda_2 g_{21} & \lambda_2 g_{22} & \lambda_2 g_{23} & \lambda_2 g_{24} \\ \lambda_3 g_{31} & \lambda_3 g_{32} & \lambda_3 g_{33} & \lambda_3 g_{34} \\ \lambda_4 g_{41} & \lambda_4 g_{42} & \lambda_4 g_{43} & \lambda_4 g_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 g_{11} & \lambda_2 g_{12} & \lambda_3 g_{13} & \lambda_4 g_{14} \\ \lambda_1 g_{21} & \lambda_2 g_{22} & \lambda_3 g_{23} & \lambda_4 g_{24} \\ \lambda_1 g_{31} & \lambda_2 g_{32} & \lambda_3 g_{33} & \lambda_4 g_{34} \\ \lambda_1 g_{41} & \lambda_2 g_{42} & \lambda_3 g_{43} & \lambda_4 g_{44} \end{pmatrix}$$

(i)$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ のとき

$$g = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \in SO(4) \text{ となる.}$$

よって, 軌道は $SO(4).X = SO(4)/SO(4) = \{e\}$.

またこの軌道の次元は 0 である.

(ii)$\lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ のとき

$$g = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix} \in S(O(1) \times O(3)) \text{ となる.}$$

よって, 軌道は $SO(4).X = SO(4)/S(O(1) \times O(3)) = \mathbb{R}P^3 \subset \mathbb{R}^6$.

またこの軌道の次元は 3 である.

(iii)$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 = \lambda_4$ のとき

$$g = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \in S(O(1) \times O(1) \times O(2)) \text{ となる.}$$

よって, 軌道は $SO(4).X = SO(4)/S(O(1) \times O(1) \times O(2))$.

またこの軌道の次元は 5 である.

(iv)$\lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3 = \lambda_4$ のとき

$$g = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \in S(O(2) \times O(2)) \text{ となる.}$$

よって, 軌道は $SO(4).X = SO(4)/S(O(2) \times O(2))$.

またこの軌道の次元は 4 である.

(v)$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$ のとき

$$g = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in S(O(1) \times O(1) \times O(1) \times O(1)) \text{ となる.}$$

よって, 軌道は $SO(4).X = SO(4)/S(O(1) \times O(1) \times O(1) \times O(1))$.

またこの軌道の次元は 6 である. $\square$

おわりに

卒業論文を書くにあたって，指導教官の田丸博士先生をはじめ先輩方には，ご多忙にもかかわらず，助言やご指導をいただきました．この場を借りて深く御礼申し上げます.

参考文献

[1] 硲野 敏博, 加藤 芳文: 理工系の基礎線形代数学, 学術図書出版社, 1995.

[2] 佐武 一郎, リー群の話, 日本評論社, 1982.

[3] 田丸 博士: 対称空間入門, 幾何学 C (広島大学) 講義資料, 2008.