2009 年度幾何学 A・同演習 中間試験問題

2009/06/05, 　担当: 田丸・木幡

注意

証明問題の解答においては, **まず最初に「示すこと」を明確に宣言すること**. 示すことが宣言されていない場合には, 採点しない場合もあります.

定義

解答する時には, 以下を参考にしても良い:

- I を $\mathbb{R}$ の開集合とする. $c : I \to \mathbb{R}^2$ がなめらかな曲線の助変数表示とは, 次が成り立つこと: (1) c は C^∞-級写像, (2) $\forall t \in I$, $c'(t) \neq (0,0)$.
- xz-平面内の曲線 $(x(v), z(v))$ を, z-軸を中心として回転させてできる回転面とは,

$$p(u,v) := \begin{pmatrix} \cos(u) & -\sin(u) & 0 \\ \sin(u) & \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(v) \\ 0 \\ z(v) \end{pmatrix}.$$

- D を $\mathbb{R}^2$ の開集合とする. $p : D \to \mathbb{R}^3$ がなめらかな曲面の助変数表示とは, 次が成り立つこと: (1) p は C^∞-級写像, (2) $\forall (u,v) \in D$, $\mathrm{rank}(Jp)_{(u,v)} = 2$.
- $(Jp)_{(u,v)}$ は p の (u,v) における Jacobi 行列.
- $\mathrm{Im}\,(Jp)_{(u,v)} := \{(Jp)_{(u,v)} w \in \mathbb{R}^3 \mid w \in \mathbb{R}^2\}$.
- 座標近傍 (U_1, φ_1), (U_2, φ_2) の間の座標変換とは,

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2).$$

- 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して, $A \subset X$ の相対位相は, $\mathcal{O}_A := \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}\}$.

問題

[1] 曲線の接線に関する問題を自作し, その問題と解答を書け. ただし, 自作した問題が中間試験の問題として相応しいかどうかも採点対象とする. (20 点)

[2] I と J を $\mathbb{R}$ の開集合, $t : J \to I$ を次をみたす C^∞-級関数とする: $\forall s \in J$, $t'(s) > 0$. このとき, $c : I \to \mathbb{R}^2$ がなめらかな曲線の助変数表示ならば, $c \circ t : J \to \mathbb{R}^2$ もなめらかな曲線の助変数表示であることを, 定義に従って示せ. (20 点)

[3] xz-平面内の, 中心を $(2,0)$ とする半径 1 の円を C とする. また, C を z-軸を中心に回転させてできる回転面を M とする. このとき, M になめらかな曲面の助変数表示を与え, それを定義に従って示せ. (20 点)

[4] $z = f(x,y)$ のグラフを M で表し, その助変数表示を p とする. このとき, 曲面上の点 $p_0 = p(u_0, v_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ での接平面の方程式を, 次を用いて求めよ: $T_{p_0} M = p_0 + \mathrm{Im}\,(Jp)_{(u_0,v_0)}$. (20 点)

[5] $S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ に対して,

$$U_1 := \{(x,y,z) \in S^2 \mid x > 0\}, \quad \varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \mapsto (y,z),$$
$$U_2 := \{(x,y,z) \in S^2 \mid y > 0\}, \quad \varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \mapsto (x,z)$$

と定める. これらの座標近傍の間の座標変換が C^∞-級写像であることを示せ. そのとき, 写像の定義域と値域も明記すること. (20 点)

[6] 上の問題で与えた S^2 および U_1 を考える. S^2 の位相は, $\mathbb{R}^3$ の標準的な位相からの相対位相で与える. このとき, U_1 が S^2 の開集合であることを, 相対位相の定義に従って示せ. ただし $\mathbb{R}^3$ の標準的な位相に関する事柄は証明無しで使って良い. (20 点)

追加

[7] 講義に関する意見・感想・コメント・要望がありましたら答案に書いて下さい.

2009 年度 幾何学 A・同演習 中間試験解答用紙

学生番号 ______________________

氏名 ______________________ **点数** ______________

[**1**]

[**2**]

[**3**]

[4]

[6]

[5]

[7]