可微分多様体入門*

田丸 博士† (広島大学理学部)

1 導入

本稿の目的は可微分多様体の基本的な事項の解説である．そのために, 以下の対象を扱う:

∘ 曲線; なめらかな平面曲線,

∘ 曲面; なめらかな空間曲面,

∘ 可微分多様体; なめらかな位相空間 = 微分が定義できるような位相空間.

曲線や曲面は (厳密ではないが大体は) 可微分多様体である．可微分多様体を直感的に理解するためには, 曲線や曲面を具体例として考えることが定石である．そこで本稿では, 曲線や曲面を最初に解説し, その後に可微分多様体に入る, という方針を採ることとした.

可微分多様体を調べる理由は, 大きく分けて 2 つある.

∘ 様々な分野で登場する重要なものだから,

∘ 調べやすいから.

可微分多様体は, ほとんど全ての幾何学で調べられているし, また幾何以外の分野でも登場する．重要性については, この先の勉強をすると実感できると思う．一方で調べやすさについてだが, 一般の位相空間に対しては使えない "微分" という手法が使えることは, 可微分多様体を調べる上で非常に大きなアドバンテージである．例えば, 関数 $y = f(x)$ のグラフを調べるときに, f の微分ができれば原理的にはどんな場合でも概形を描くことができた (増減や凹凸が分かるから)．このように, 微分が使えると幾何が調べやすい, という事例は高校数学でも登場している.

本節の最後に, 可微分多様体の定義の概略を説明しておく．可微分多様体の定義は, 位相空間上の写像の微分を定義すること同じである．微分を定義するために何が必要かを考えると,

∘ U が $\mathbb{R}^m$ の開集合のとき, 写像 $F : U \to \mathbb{R}^n$ の微分可能性は定義されている,

∘ 位相空間 M に対して, 写像 $f : M \to \mathbb{R}$ の $p \in M$ での微分は, p の近傍だけで決まる,

∘ よって, 任意の点の近傍が "$\mathbb{R}^m$ の開集合と同じ" ならば, 微分が定義できるはず,

∘ これは, 位相空間が "$\mathbb{R}^m$ の開集合をいくつか貼り合わせたもの" であることと同値.

* 2009 年度幾何学 A 講義資料

† tamaru @ math.sci.hiroshima-u.ac.jp

これが, 可微分多様体の定義の本質的な部分である. 正確な定義のためには, 開集合の貼り合わせ方に関する条件が必要になる.

2 曲線

本節では, 平面 $\mathbb{R}^2$ 内のなめらかな曲線を定義し, その表示方法 (助変数表示・陽関数表示・陰関数表示) を紹介する. どの表示方法でも本質的に同じであることが, 逆関数定理と陰関数定理によって分かる.

2.1 曲線の助変数表示

定義 2.1. I を $\mathbb{R}$ の開集合とする. 写像 $c : I \to \mathbb{R}^2$ が **なめらかな曲線の助変数表示** とは, 次が成り立つこと: (1) c は C^∞-級, (2) $\forall t \in I$, $c'(t) \neq (0,0)$.

このときの像 $c(I)$ を **なめらかな曲線** と呼ぶ. 微分 $c'(t)$ を曲線の **速度ベクトル** と呼ぶ. ちなみに, $c(t) = (x(t), y(t))$ の微分は $c'(t) = (x'(t), y'(t))$ である.

例 2.2. 以下はなめらかな曲線の助変数表示である:

(1) 円 $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$,

(2) 直線 $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto t\vec{a} + \vec{b}$ (ただし $\vec{a} \neq \vec{0}$).

例 2.3. 以下はなめらかな曲線の助変数表示ではない:

(1) $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto (x, |x|)$,

(2) $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^2, t^3)$ (定義域を $t > 0$ などとすれば, なめらかな曲線になる).

2.2 曲線の陽関数表示

定義 2.4. I を $\mathbb{R}$ の開集合とする. C^∞ 写像 $f : I \to \mathbb{R}$ に対して,

(1) 集合 $\{(x, f(x)) \mid x \in I\}$ を $y = f(x)$ の **グラフ** と呼ぶ,

(2) 集合 $\{(f(y), y) \mid y \in I\}$ を $x = f(y)$ の **グラフ** と呼ぶ.

命題 2.5. C^∞ 写像 $f : I \to \mathbb{R}$ のグラフは, なめらかな曲線である.

グラフで表される曲線に対して, $y = f(x)$ (または $x = f(y)$) を **陽関数表示** と呼ぶ. 命題 2.5 は, 陽関数表示を助変数表示に変換できることを意味する. 逆に, 助変数表示を陽関数表示に変換することも, 局所的にはできる.

命題 2.6. 平面内のなめらかな曲線 $c : I \to \mathbb{R}^2$ は, 局所的にはグラフで表される, すなわち, 次が成立: $\forall t \in I$, $\exists I_0$ (t の近傍) : $c(I_0)$ はある関数のグラフ.

証明には, 陽関数表示を与える関数 f を作らなくてはならない. この f を作るために, 逆関数定理を使う. 逆関数定理は, 逆関数が存在するための十分条件を与える定理である.

例 2.7. 直線 $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (a_1 t + b_1, a_2 t + b_2)$ (ただし $(a_1, a_2) \neq (0,0)$) は, 以下のように陽関数表示できる:

(1) $a_1 \neq 0$ のとき, $y = (a_2/a_1)x + b_1 - (a_2 b_1/a_1)$,

(2) $a_2 \neq 0$ のとき, $x = (a_1/a_2)y + b_2 - (a_1 b_2/a_2)$.

2.3 曲線の陰関数表示

定義 2.8. U を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $F : U \to \mathbb{R}$ を関数とする. このとき, $F(x,y) = 0$ が **なめらかな曲線の陰関数表示** とは, 次が成り立つこと: (1) F は C^∞-級, (2) $F(x,y) = 0 \Rightarrow (JF)_{(x,y)} \neq (0,0)$.

ここで $(JF)_{(x,y)}$ は **Jacobi 行列** である:

$$(JF)_{(x,y)} := (\frac{\partial F}{\partial x}(x,y), \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)).$$

例 2.9. $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ は陰関数表示.

例 2.10. $a > 0$ に対して, $F(x,y) = y^2 - x^2(x+a)$ は陰関数表示ではない.

陽関数表示を陰関数表示に変換することは容易である.

命題 2.11. C^∞-関数 $f : I \to \mathbb{R}$ のグラフ $y = f(x)$ に対して, $F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto y - f(x)$ とおくと, $F(x,y) = 0$ は陰関数表示.

逆に, 陰関数表示を陽関数表示に変換することも, 局所的にはできる.

命題 2.12. $F : U \to \mathbb{R}$ によって陰関数表示された曲線 $F(x,y) = 0$ は, 局所的にはグラフで表される. すなわち, 次が成り立つ: $\forall (x_0, y_0)$ $(F(x_0, y_0) = 0)$, $\exists U' \subset U$ ((x_0, y_0) の近傍) : $\{(x,y) \in U' \mid F(x,y) = 0\}$ はある関数のグラフ.

証明には, 陽関数表示を与える関数 f を作らなくてはならない. この f を作るために, 陰関数定理を使う. 陰関数定理は, 陰関数表示 $F(x,y) = 0$ が $y = f(x)$ または $x = f(y)$ の形に解けるための十分条件を与える定理である.

2.4 曲線の接線

ここでは, 曲線の助変数表示 $c : I \to \mathbb{R}^2$ の定義域 I は十分に小さく, 陽関数表示および陰関数表示できる, と仮定して話を進める. このとき, c は単射になる.

定義 2.13. M を曲線とする．C^∞-写像 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ の $t = 0$ での速度ベクトル $\gamma'(0)$ を, 曲線 M の $\gamma(0) \in M$ における **接ベクトル** と呼ぶ.

ここで $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ が C^∞-写像であるとは, 値域を $\mathbb{R}^2$ だと思った写像 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ が C^∞-写像であることと定義する．任意の助変数表示に対して, その p における速度ベクトルは接ベクトルである.

例 2.14. 円 $x^2 + y^2 = 1$ に対して次が成り立つ: $\forall a \in \mathbb{R}$, $(0, a)$ は $p = (1, 0)$ における接ベクトル.

定義 2.15. $T_pM := \{p + u \mid u$ は p における M の接ベクトル $\}$ を, 曲線 M の $p \in M$ における **接線** と呼ぶ.

接線は, 接ベクトル p を始点とするベクトルと見なして, その終点を集めた集合である．次の命題により, 接線は直線となる．ただし, 曲線が自己交叉している場合には, 接線は直線にならないことに注意する (そのため, I は十分に小さい, より正確に述べると陰関数表示できる, と仮定した).

命題 2.16. 曲線 M に対し, $c : I \to \mathbb{R}^2$ をその助変数表示, $F(x, y) = 0$ を陰関数表示とする．このとき, $p = c(t_0)$ での接線に関して, 次が成り立つ:

$$\{p + sc'(t_0) \mid s \in \mathbb{R}\} = T_pM = \{p + u \mid (JF)_p u = 0\}.$$

平面 $\mathbb{R}^2$ に対して, $p \in \mathbb{R}^2$ を始点とするベクトルの全体を

$$T_p\mathbb{R}^2 := p + \mathbb{R}^2 = \{p + u \mid u \in \mathbb{R}^2\}$$

で表すことにすると, $T_pM \subset T_p\mathbb{R}^2$ である．このように考えると都合が良い; $T_p\mathbb{R}^2$ は p を原点とするような 2 次元ベクトル空間の構造を自然に持ち, 上の命題より, T_pM はその 1 次元部分空間 (すなわち直線) である．また, Jacobi 行列 $(JF)_p$ をベクトルだと思うと, これは曲線の p における法線ベクトルになることも分かる.

系 2.17. $y = f(x)$ のグラフの $(x_0, f(x_0))$ における接線の方程式は $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

2.5 練習問題

問題 2.18. x-軸が, なめらかな曲線の助変数表示・陽関数表示・陰関数表示を持つことを示せ.

問題 2.19. C^∞-写像 $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ で, 像 $c(\mathbb{R})$ は x-軸となるが, なめらかな曲線の助変数表示ではない例を挙げよ.

問題 2.20. M をなめらかな曲線とする．このとき, M を原点中心に角度 θ 回転させて (a, b) 方向に平行移動した集合 M' も, なめらかな平面曲線であることを示せ.

問題 2.21. $a > 0$ とする．$y^2 - x^2(x + a) = 0$ で表される曲線の概形を描け.

問題 2.22. 系 2.17 を, 命題 2.16 の Jacobi 行列による表示を用いて示せ.

3　曲面

本節では, 空間 $\mathbb{R}^3$ 内のなめらかな曲面を定義し, その表示方法 (助変数表示・陽関数表示・陰関数表示) を紹介する. どの表示方法でも本質的に同じであることが, 逆関数定理と陰関数定理によって分かる. また, 曲面の接平面についても解説する.

3.1　曲面の助変数表示

定義 3.1. D を $\mathbb{R}^2$ の開集合とする. 写像 $p : D \to \mathbb{R}^3$ が **なめらかな曲面の助変数表示** とは, 次が成り立つこと: (1) p は C^∞-級, (2) $\forall (u,v) \in D$, $\mathrm{rank}(Jp)_{(u,v)} = 2$.

ここで $(Jp)_{(u,v)}$ は, p の (u,v) における Jacobi 行列である. 座標を使って $p(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ と表し, また偏微分を p_u, p_v などと略記すると, Jacobi 行列は

$$(Jp)_{(u,v)} = (p_u, p_v)_{(u,v)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}_{(u,v)}$$

と表される. このとき, $\mathrm{rank}(Jp)_{(u,v)} = 2$ であることと, $\{p_u(u,v), p_v(u,v)\}$ が一次独立であることは同値である.

例 3.2. 以下はなめらかな曲面の助変数表示である:

(1) 平面 $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto u\vec{a} + v\vec{b} + \vec{c}$ (ただし $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は一次独立).

(2) 円柱 $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (\cos u, \sin u, v)$.

円柱を参考にして, なめらかな曲面の助変数表示を構成する. 円柱は, xy-平面の円を z-軸方向に平行移動したもの, と考えることができる.

命題 3.3. $c : I \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto c(t) = (x(t), y(t))$ をなめらかな曲線の助変数表示とする. このとき, $p : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (x(u), y(u), v)$ はなめらかな曲面の助変数表示である.

また, 円柱は, xz-平面の直線を z-軸を中心に回転したもの, と考えることができる.

命題 3.4. $c : I \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto c(t) = (x(t), z(t))$ をなめらかな曲線の助変数表示とする. もし $x(t) > 0$ $(\forall t \in I)$ が成り立つならば, $p : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (\cos(u)x(v), \sin(u)x(v), z(v))$ はなめらかな曲面の助変数表示である.

この命題の $p(u,v)$ は, xz-平面の曲線 c を, z 軸を中心に角度 u だけ回転させたものである:

$$p(u,v) = \begin{pmatrix} \cos(u) & -\sin(u) & 0 \\ \sin(u) & \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(v) \\ 0 \\ z(v) \end{pmatrix}.$$

このようにして得られる $p(u,v)$ を **回転面** と呼ぶ.

例 3.5. 以下はなめらかな曲面の助変数表示である:

(1) 球 (の一部) $p : \mathbb{R} \times (0, \pi) \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (\cos(u)\cos(v), \sin(u)\cos(v), \sin(v))$,

(2) トーラス $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (\cos(u)(2 + \cos(v)), \sin(u)(2 + \cos(v)), \sin(v))$.

なめらかな曲面の助変数表示 $p : D \to \mathbb{R}^3$ に対して, その像 $p(D)$ を **曲面片** と呼ぶ (これを曲面の定義にしてしまうと, 球 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 全体は曲面ではないことになってしまう). なめらかな曲面は, 曲面片の和集合 (で所定の条件を満たすもの) として定義する.

3.2 曲面の陽関数表示

曲線の場合と同様に, 関数のグラフは曲面の典型的な例である.

命題 3.6. C^∞ 写像 $f : D \to \mathbb{R}$ に対して, $p : D \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (u, v, f(u, v))$ はなめらかな曲面の助変数表示である.

定義 3.7. C^∞ 写像 $f : D \to \mathbb{R}$ に対して, 集合 $\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D\}$ を $z = f(x, y)$ の **グラフ** と呼ぶ.

同様に, $x = f(y, z)$ や $y = f(x, z)$ のグラフも定義できる. グラフで表される曲面に対して, $z = f(x, y)$ などを **陽関数表示** と呼ぶ. 命題 3.6 は, 陽関数表示を助変数表示に変換できることを意味する. 逆に, 助変数表示を陽関数表示に変換することも, 局所的にはできる.

命題 3.8. なめらかな曲面の助変数表示 $p : D \to \mathbb{R}^3$ は, 局所的にはグラフで表される, すなわち, 次が成立: $\forall (u, v) \in D$, $\exists D_0$ ((u, v) の近傍) : $p(D_0)$ はある関数のグラフ.

証明には, 曲線の場合と同様に, 逆関数定理 (2 変数なので, 正確には逆写像定理) を使う.

例 3.9. 平面 $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (a_1 u + b_1 v + c_1, a_2 u + b_2 v + c_2, a_3 u + b_3 v + c_3)$ が

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = 2$$

を満たすならば, $z = \alpha x + \beta y + \gamma$ と陽関数表示できる.

3.3 曲面の陰関数表示

曲面の陰関数表示も, 曲線の場合と全く同様に定義される.

定義 3.10. U を $\mathbb{R}^3$ の開集合, $F : U \to \mathbb{R}$ を関数とする. このとき, $F(x, y, z) = 0$ が **なめらかな曲面の陰関数表示** とは, 次が成り立つこと:

(1) F は C^∞-級,

(2) $F(x, y, z) = 0 \Rightarrow (JF)_{(x,y,z)} \neq (0, 0, 0)$.

例 3.11. $F(x,y,z) = x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 - 1$ とすると, $F(x,y,z) = 0$ はなめらかな曲面の陰関数表示 (ただし $a,b,c > 0$).

陽関数表示を陰関数表示に変換することは容易である.

命題 3.12. C^∞-関数 $f : D \to \mathbb{R}$ のグラフ $z = f(x,y)$ に対して, $F : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto z - f(x,y)$ とおくと, $F(x,y,z) = 0$ はなめらかな曲面の陰関数表示.

逆に, 陰関数表示を陽関数表示に変換することも, 局所的にはできる.

命題 3.13. $F(x,y,z) = 0$ を, なめらかな曲面の陰関数表示とする. この曲面は局所的にはグラフで表される, すなわち, 次が成り立つ: $\forall (x_0, y_0, z_0)$ $(F(x_0,y_0,z_0) = 0)$, $\exists U'$ $((x_0,y_0,z_0)$ の近傍$)$: $\{(x,y,z) \in U' \mid F(x,y,z) = 0\}$ は, ある関数のグラフ.

証明には, 陰関数定理を使う. 陰関数定理は, 陰関数表示 $F(x,y,z) = 0$ が, $z = f(x,y)$ などの形に解けるための十分条件を与える定理である.

例 3.14. $F(x,y,z) = ax + by + cz + d$ とする. もし $c \neq 0$ ならば, この曲面は次の関数のグラフで表される: $z = -(1/c)(ax + by + d)$.

3.4 曲面の接平面

ここでは, 曲面 $M = p(D)$ の助変数表示 $p : D \to \mathbb{R}^3$ の定義域 D は十分に小さく, 陽関数表示および陰関数表示できる, と仮定して話を進める. このとき, p は単射になる.

定義 3.15. M を曲面とする. C^∞-写像 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ の $t = 0$ での速度ベクトル $\gamma'(0)$ を, 曲線 M の $\gamma(0) \in M$ における **接ベクトル** と呼ぶ.

ここで $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ が C^∞-写像であるとは, 値域を $\mathbb{R}^2$ だと思った写像 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ が C^∞-写像であることと定義する.

例 3.16. 球 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ に対して, 次が成り立つ: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $(0, a, b)$ は $p = (1, 0, 0)$ における接ベクトル.

定義 3.17. $T_pM := \{p + u \mid u$ は p における M の接ベクトル $\}$ を, 曲面 M の $p \in M$ における **接平面** と呼ぶ.

接平面は, 接ベクトル p を始点とするベクトルと見なして, その終点を集めた集合である. 曲面 M が陰関数表示できる (ように定義域を小さくとった) 場合には, 次の命題により, 接平面は平面となる.

命題 3.18. 曲面 M に対し, $p: D \to \mathbb{R}^3$ をその助変数表示, $F(x,y,z)=0$ を陰関数表示とする. このとき, $p_0 = p(u_0,v_0)$ での接平面に関して, 次が成り立つ:

$$\{p_0 + ap_u(u_0,v_0) + bp_v(u_0,v_0) \mid a,b \in \mathbb{R}\} = T_{p_0}M = \{p_0 + w \mid (JF)_{p_0}w = 0\}.$$

平面内の曲線の接線と同様に, $T_{p_0}M$ は p_0 を原点とするような 2 次元ベクトル空間の構造を自然に持つ. Jacobi 行列 $(JF)_{p_0}$ を線型写像だと思うと, 左辺はその像, 右辺はその核 (カーネル) に他ならない. また, Jacobi 行列 $(JF)_{p_0}$ をベクトルだと思うと, これは曲面の p_0 における法線ベクトルになることも分かる.

系 3.19. $z = f(x,y)$ のグラフの $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ における接平面の方程式は次で与えられる: $z = f_u(x_0,y_0)(x-x_0) + f_v(x_0,y_0)(y-y_0) + f(x_0,y_0)$.

4 多様体

本節では, 多様体および多様体の間の同型 (微分同相) を定義する. これまでに扱った曲線や曲面は, 多様体の例を供給する.

4.1 多様体の定義

多様体は, ハウスドルフ空間であって所定の性質を満たすもの, として定義される.

定義 4.1. 位相空間 $M = (M, \mathcal{O})$ が **ハウスドルフ** であるとは, 任意の 2 点が開集合で分離できること, すなわち, 次が成り立つこと: $\forall x, y \in M$ $(x \neq y)$, $\exists O_x, O_y \in \mathcal{O}$: $x \in O_x$, $y \in O_y$, $O_x \cap O_y = \emptyset$.

多様体の定義を粗く言うと, $\mathbb{R}^n$ の開集合をいくつか貼り合わせたもの, となる.

定義 4.2. ハウスドルフ空間 M に対して, 次を満たす集合族 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ を n 次元の **局所座標系** と呼ぶ:

(1) $\{U_\alpha\}$ は M の開被覆,
(2) $\forall\alpha$ に対して, $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ は同相写像,
(3) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ のとき, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ は C^∞-級写像.

このとき, U_α は $\mathbb{R}^n$ の開集合と同相であり (条件 (2)), M はそれらを貼り合わせたものである (条件 (1)). 条件 (3) は, 貼り合わせが上手くいくための条件. 各 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ を **局所座標** と呼び, 条件 (3) の写像 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ を **座標変換** と呼ぶ.

定義 4.3. ハウスドルフ空間 M が n **次元多様体** とは, 局所座標系 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ が存在すること.

多様体は, C^∞-級多様体あるいは可微分多様体と呼ばれることもある.

多様体の局所座標 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ の簡単な例は, 曲線や曲面の助変数表示の逆写像によって得られる. ただし, 助変数表示は一般には単射ではないし, 同相かどうかも分からない. しかし例えば, 円 $S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ のような場合には, 助変数表示を単射になるように分けることによって, 局所座標が得られる.

例 4.4. 円 S^1 は 1 次元多様体である. 特に, 助変数表示 $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ を用いて次で定義される $\{(U_1, c_1^{-1}), (U_2, c_2^{-1})\}$ は局所座標系:

$$c_1 := c|_{(0,2\pi)},\ c_2 := c|_{(\pi,3\pi)},\ U_1 := \mathrm{Im}\,(c_1),\ U_2 := \mathrm{Im}\,(c_2).$$

4.2 陽関数表示と多様体

曲線や曲面の陽関数表示と同様に, より一般の関数のグラフを定義する.

定義 4.5. D を $\mathbb{R}^m$ の開集合, $f : D \to \mathbb{R}^n$ を C^∞-写像とする. 次を f の **グラフ** と呼ぶ:

$$\mathrm{graph}(f) := \{x = (x_i) \in D \times \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \ldots, x_m) = (x_{m+1}, \ldots, x_{m+n})\}.$$

例えば $m = n = 1$ の場合は, $\mathrm{graph}(f)$ は $y = f(x)$ のグラフに他ならない.

補題 4.6. C^∞-写像 $f : D \to \mathbb{R}^{m+n}$ に対して, 次で定義される $\varphi : \mathrm{graph}(f) \to D$ は同相写像: $\varphi(x_1, \ldots, x_{m+n}) := (x_1, \ldots, x_m)$.

ここで φ は f の逆写像なので, 全単射は明らか. また, φ と φ^{-1} の連続性の証明は, 位相空間の演習問題.

系 4.7. D を $\mathbb{R}^m$ の開集合, $f : D \to \mathbb{R}^{m+n}$ を C^∞-写像とすると, $\mathrm{graph}(f)$ は m 次元多様体.

補題 4.6 で定義した φ を用いると, グラフは一つの局所座標 $(\mathrm{graph}(f), \varphi)$ で覆うことができる. 一般には, 複数の局所座標が必要になる. 曲線や曲面の場合には, 複数のグラフを繋ぎ合わせたものと考えることによって, 局所座標系が得られる.

例 4.8. 次で定義される $\{(U_{x>0}, \varphi_{x>0}), (U_{x<0}, \varphi_{x<0}), (U_{y>0}, \varphi_{y>0}), (U_{y<0}, \varphi_{y<0})\}$ は, 円 S^1 の局所座標系:

$$\begin{aligned}
U_{x>0} &:= \{(x,y) \in S^1 \mid x > 0\}, \quad \varphi_{x>0} : U_{x>0} \to (-1,1) : (x,y) \mapsto y, \\
U_{x<0} &:= \{(x,y) \in S^1 \mid x < 0\}, \quad \varphi_{x<0} : U_{x<0} \to (-1,1) : (x,y) \mapsto y, \\
U_{y>0} &:= \{(x,y) \in S^1 \mid y > 0\}, \quad \varphi_{y>0} : U_{y>0} \to (-1,1) : (x,y) \mapsto x, \\
U_{y<0} &:= \{(x,y) \in S^1 \mid y < 0\}, \quad \varphi_{y<0} : U_{y<0} \to (-1,1) : (x,y) \mapsto x.
\end{aligned}$$

それぞれがグラフ (例えば, $U_{x>0}$ は $x = \sqrt{1-y^2}$ のグラフ) であるので, 補題 4.6 より, 座標近傍であることは明らか. 座標変換が C^∞-写像であることは, 直接計算で確かめられる.

例 4.9. $S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ は 2 次元多様体.

証明は, S^2 を 6 個のグラフに分ければ良い.

4.3　陰関数表示と多様体

曲線や曲面の陰関数表示, あるいはもっと一般の次元の陰関数表示が, 多様体になることを示す. これを用いると, 例えば n 次元球面が多様体であることの証明を, 非常に簡単に与えることができる.

命題 4.10. U を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $F : U \to \mathbb{R}$ とし, $F(x,y) = 0$ をなめらかな曲線の陰関数表示とする. このとき, $M := \{(x,y) \in U \mid F(x,y) = 0\}$ は 1 次元多様体である.

この場合に局所座標を定める手順は以下の通りである; 命題 2.12 より, 陰関数表示は局所的には陽関数表示できる. よって, 任意の $p \in M$ に対して, p の近傍 U_p でグラフになるものが存在する. U_p はグラフなので, 同相写像 $\varphi_p : U_p \to I_p$ (I_p は $\mathbb{R}$ の開集合) が存在する. これらを集めたもの $\{(U_p, \varphi_p) \mid p \in M\}$ が, M の局所座標系となる.

命題 4.11. U を $\mathbb{R}^3$ の開集合, $F : U \to \mathbb{R}$ とし, $F(x,y,z) = 0$ をなめらかな曲面の陰関数表示とする. このとき, $M := \{(x,y,z) \in U \mid F(x,y,z) = 0\}$ は 2 次元多様体である.

証明は, 曲線の場合と全く同様. 命題 3.13 より, 陰関数表示は局所的には陽関数表示できるので, これを用いて局所座標系を作ることができる. また, これらの命題は, 以下のように一般の次元で成立する.

定理 4.12. U を $\mathbb{R}^m$ の開集合, $F : U \to \mathbb{R}^n$ を C^∞-級写像とし, $M := \{p \in U \mid F(p) = 0\}$ とおく. もし $\mathrm{rank}(JF)_p = k$ $(\forall p \in M)$ が成り立つならば, M は $(m-k)$ 次元多様体になる.

命題 4.10 は定理の $(m,n,k) = (2,1,1)$ の場合, 命題 4.11 は定理の $(m,n,k) = (3,1,1)$ の場合, に他ならない. この定理は, 多様体の様々な例を構成するための強力な道具となる.

例 4.13. $S^n := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ は n 次元多様体になる.

この S^n を n 次元球面と呼ぶ. 証明には, $F(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 - 1$ で定義される写像 $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ を考えれば良い.

例 4.14. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) := \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det(X) = 1\}$ は 3 次元多様体になる.

ここで $M_n(\mathbb{R})$ は $n \times n$ 実行列全体の集合を表す. 証明は, $M_2(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}^4$ と同じとみなして, 定理 4.12 を適用すれば良い. より一般に, 次も成り立つ.

例 4.15. 以下は多様体である:

(1) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) := \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(X) = 1\}$ は $n^2 - 1$ 次元多様体になる.

(2) $\mathrm{O}(n) := \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tXX = I_n\}$ は $n(n-1)/2$ 次元多様体になる.

$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ を n 次の **特殊線型群**, $\mathrm{O}(n)$ を n 次の **直交群** と呼ぶ. これらは, リー群 (粗く言うと多様体かつ群であるもの) の典型的な例である.

4.4 射影空間

これまでは $\mathbb{R}^n$ の部分集合として与えられた多様体について調べたが, 一般に多様体は, $\mathbb{R}^n$ の部分集合の形で与えられるとは限らない. そのような多様体の例として, 射影空間を紹介する. ここでは実射影空間のみを紹介するが, 全く同様にして複素射影空間を定義することもできる.

定義 4.16. $\mathbb{R}\mathrm{P}^n := \{\ell \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid \ell$ は 1 次元線型部分空間 $\}$ を n 次元 **実射影空間** と呼ぶ.

実射影空間 $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ に位相を与えるために, 次を用いる.

補題 4.17. 実射影空間 $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ と商集合 $X/\sim$ の間に全単射が存在する. ただしここで, $X := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ であり, 同値関係 $\sim$ は次で定義する: $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ s.t. $x = \lambda y$.

証明は, 商集合に関する標準的な演習問題. $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ に位相を定義するためには, まず $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ に $\mathbb{R}^{n+1}$ からの相対位相を入れ, $X/\sim$ には自然な射影 $\pi : X \to X/\sim$ からの商位相を入れれば良い.

補題 4.18. $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ に上記の位相を入れた空間はハウスドルフ空間である.

記号の準備として, $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in X$ の π での像を $\pi(x) = [x_0 : x_1 : \cdots : x_n]$ で表す. この表記を **同次座標** と呼ぶ.

命題 4.19. $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ は n 次元多様体になる.

次で定義される $\{(U_i, \varphi_i) \mid i = 0, \ldots, n\}$ が局所座標系になる:

$$\begin{aligned} &U_i := \{[x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n \mid x_i \neq 0\}, \\ &\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n : [x_0 : \cdots : x_n] \mapsto (1/x_i)(x_0, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

ただしここで, $\widehat{x}_i$ は「x_i を抜く」ことを表す記号である.

4.5 微分同相

例えば位相空間に対しては, 同相という同値関係を考えていた (位相空間の性質とは, 同相で不変な性質のことであった). 多様体に対しては, 微分同相という同値関係を考える. この微分同相を定義するために, まずは, 写像の可微分性を定義する.

定義 4.20. M, N を多様体, $f : M \to N$ を写像とする.

(1) f が $p \in M$ で **C^∞-級写像** であるとは, 次が成り立つこと: $\exists (U, \varphi)$: p を含む M の座標近傍, $\exists (V, \psi)$: $f(p)$ を含む N の座標近傍 s.t. $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ が $\varphi(p)$ で C^∞-級.

(2) f が **C^∞-級写像** であるとは, 次が成り立つこと: $\forall p \in M$, f は p で C^∞-級.

写像 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ の定義域は $\varphi(p)$ の適当な近傍である ($\varphi(U)$ 全体とは限らないことに注意).

例 4.21. 以下の写像は C^∞-級である:

(1) $f : \mathbb{R} \to S^1 : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$,

(2) $f : S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n : x \mapsto \mathbb{R}x$.

多様体から多様体への写像の C^∞-性は, 定義より一つの局所座標に関して C^∞ であれば良いが, 実際には全ての局所座標に関して C^∞ という条件と同値である.

命題 4.22. M, N を多様体, $f : M \to N$ を写像とする. f が $p \in M$ で C^∞-級であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall (U, \varphi)$: p を含む M の座標近傍, $\forall (V, \psi)$: $f(p)$ を含む N の座標近傍, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ が $\varphi(p)$ で C^∞-級.

定義 4.23. 二つの多様体 M と N が **微分同相** であるとは, 微分同相写像 $f : M \to N$ が存在すること. ここで, $f : M \to N$ が **微分同相写像** であるとは, 次が成り立つこと: f は全単射で, f と f^{-1} が C^∞-級写像.

微分同相が (多様体全体の集合の上に定められた) 同値関係であることは, 定義より明らか.

例 4.24. 任意の半径 $r > 0$ の円は互いに微分同相.

4.6 さまざまな多様体

ここでは分かっている多様体から新しい多様体を作る方法を三通り紹介する. 一つ目の方法は, 開集合を取るものである.

命題 4.25. M を m 次元多様体, U を M の開集合とすると, U も m 次元多様体になる.

二つ目の方法は, 積空間を考えるものである.

命題 4.26. M を m 次元多様体, N を n 次元多様体とすると, 積空間 $M \times N$ は $m + n$ 次元多様体になる.

このようにして得られた多様体 $M \times N$ を **積多様体** と呼ぶ.

例 4.27. 次は微分同相である:

(1) $\mathbb{R}^2$ と, 積多様体 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

(2) 円柱 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ と, 積多様体 $S^1 \times \mathbb{R}$.

三つ目の方法は, 被覆写像 (covering map) を使う方法である.

定義 4.28. E, X を位相空間とする. 全射かつ連続な写像 $\pi : E \to X$ が **被覆写像** とは, 次が成り立つこと: $\forall x \in X$, $\exists U$ (x の開近傍) s.t. $\forall U_\lambda$ ($\pi^{-1}(U)$ の連結成分), $\pi|_{U_\lambda} : U_\lambda \to U$ は同相写像.

被覆写像を定義する際には, E および X にもう少し制約を付けることが多い.

例 4.29. $\mathbb{R}$ 上の同値関係を $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$ で定義し, 商集合を $\mathbb{R}/\mathbb{Z} := \mathbb{R}/\sim$ で表す. このとき, 自然な射影 $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は被覆写像.

命題 4.30. E を m 次元多様体, X をハウスドルフ空間とし, $\pi : E \to X$ を被覆写像とする. 各 U に対して $\pi^{-1}(U)$ の連結成分は互いに微分同相であるとすると, X は m 次元多様体になる. さらに, $\pi : E \to X$ は局所微分同相である.

この方法で得られた多様体 X を **商多様体** と呼ぶ. ここで $\pi : E \to X$ は局所微分同相とは, 次が成り立つこと: $\forall p \in E$, $\exists V$ (p の近傍), $\exists U$ ($\pi(p)$ の近傍) s.t. $\pi : V \to U$ が微分同相.

例 4.31. 以下の商集合は商多様体になり, さらに次が成り立つ:

(1) $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と S^1 は微分同相,
(2) $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \times \{0\}$ と $S^1 \times \mathbb{R}$ と円柱は微分同相,
(3) $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ と $S^1 \times S^1$ とトーラスは微分同相.

4.7 接空間

多様体の接空間を定義する. 曲線の接線や曲面の接平面と同様に, 曲線の速度ベクトルを接ベクトルと呼び, 接ベクトル全体の集合を接空間と定義する. ただし, 速度ベクトルは, 微分作用素として定式化する. M 上の C^∞-級関数の集合を $C^\infty(M)$ で表す.

定義 4.32. C^∞-級写像 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ の $t = 0$ での **速度ベクトル** $\dot{c}(0)$ を次で定義する:

$$\dot{c}(0) : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : f \mapsto \frac{d}{dt}(f \circ c)(0).$$

ちなみに $\dot{c}(0)$ は $\dfrac{d}{dt}c(0)$ と同じ意味.

定義 4.33. 点 $p \in M$ を通る曲線の速度ベクトルの集合を **接空間** と呼び, T_pM で表す, すなわち,

$$T_pM := \{\dot{c}(0) \mid c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M : C^\infty,\ c(0) = p\}.$$

多様体 M が n 次元のとき, 接空間 T_pM は n 次元ベクトル空間になる. これを示すために, 次を用いる:

命題 4.34. M を n 次元多様体, (U, φ) を $p \in M$ の周りの局所座標とし, $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ とおく. このとき, 次が成立する:

$$\mathrm{span}\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p\} = T_pM = \{v : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : \text{線型} \mid \text{積の微分の公式を満たす}\}.$$

最右辺について説明すると, まず, $C^\infty(M)$ には和・スカラー倍・積が自然に定義される (すなわち, 代数の構造を持つ) ことに注意する. 積の微分の公式は, $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$ $(\forall f, g \in C^\infty(M))$ である. この最右辺が, $(av_1 + bv_2)(f) = av_1(f) + bv_2(f)$ という演算に関してベクトル空間となることは, 直接確かめられる.

系 4.35. M を n 次元多様体とすると, T_pM は n 次元ベクトル空間になる.

ベクトル空間であることは, 命題 4.34 より言える. 次元が n であることを示すためには, 次が一次独立であることを言えば良い:

$$\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p\}.$$

これらのことから, $M = \mathbb{R}^m$ の場合には, 接空間 $T_p\mathbb{R}^m$ は $\mathbb{R}^m$ 自身と次によって同一視される:

$$T_p\mathbb{R}^m \ni \sum a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p \longleftrightarrow (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m.$$

4.8 写像の微分

多様体から多様体への写像 $F : M \to N$ が C^∞-級であることは既に定義した. ここでは, 写像の微分を定義する.

定義 4.36. C^∞-級写像 $F : M \to N$ の $p \in M$ における **微分** を次で定義する:

$$(dF)_p : T_pM \to T_{F(p)}N : \dot{c}(0) \mapsto \frac{d}{dt}(F \circ c)(0).$$

写像の微分を局所座標を用いて表したい. そのために, まずは曲線の速度ベクトルを局所座標を用いて表す.

補題 4.37. C^∞-級写像 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ を考え, (U, φ) を $p = c(0)$ の周りの局所座標, また $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ とする. この座標に関する Jacobi 行列を考えると, 次が成り立つ:

$$\dot{c}(0) = \sum a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \;\Rightarrow\; \left(a_1, \ldots, a_n\right) = {}^tJ(\varphi \circ c)_0.$$

証明. 仮定より, 任意の $f \in C^\infty(M)$ に対して, 次が成り立つ:

$$\dot{c}(0)f = (\sum a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p)f.$$

ここで右辺は, 定義から次のように書ける:

$$(\sum a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p)f = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)).$$

一方で左辺は, 合成写像の微分の公式より,

$$\dot{c}(0)f = \frac{d}{dt}(f \circ c)(0) = J(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ c)_0 = J(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \cdot J(\varphi \circ c)_0.$$

ここで,

$$J(f \circ \varphi^{-1}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))\right)$$

に注意して両辺を比べると, 題意が示される. □

写像の微分は, 曲線 c の取り方には依存しない. また, 微分 $(dF)_p$ は線型写像である. これらのことは, 次の命題から分かる.

命題 4.38. $F : M \to N$ を C^∞-級写像, $p \in M$ とし, (U, φ) を p の周りの局所座標, (V, ψ) を $F(p)$ の周りの局所座標とする. それぞれの座標を $\varphi = (x_1, \dots, x_m)$, $\psi = (y_1, \dots, y_n)$ とするとき, 次が成り立つ:

$$(dF)_p(\sum a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p) = \sum b_j \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{F(p)} \ \Rightarrow \ \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = J(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

証明. M の曲線 c を, 次を満たすように取る:

$$\dot{c}(0) = \sum a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p.$$

このとき, 仮定および写像の微分の定義より,

$$\sum b_j \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{F(p)} = (dF)_p(\sum a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p) = (dF)_p(\dot{c}(0)) = \frac{d}{dt}(F \circ c)(0).$$

曲線 c および $F \circ c$ に補題 4.37 を適用すると,

$$\left(a_1, \dots, a_m\right) = {}^t J(\varphi \circ c)_0, \quad \left(b_1, \dots, b_n\right) = {}^t J(\psi \circ F \circ c)_0.$$

一方で, 合成写像の微分の公式より,

$$J(\psi \circ F \circ c)_0 = J(\psi \circ F \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ c)_0 = J(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \cdot J(\varphi \circ c)_0.$$

これらを合わせれば, 題意が得られる. □

特に $M = \mathbb{R}^m$, $N = \mathbb{R}^n$ の場合には, 写像 $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ の微分は (接空間と自分自身との同一視を用いると) 通常の微分と一致する.