曲線・曲面とリーマン多様体*

田丸 博士† (広島大学理学部)

概要

可微分多様体に所定の方法で距離を定めたものをリーマン多様体と呼ぶ．平面内の曲線や空間内の曲面は, リーマン多様体の基本的な例を与える．本稿の前半では, 曲線や曲面の曲率について解説する．後半では, リーマン多様体を定義し, その曲率について定義および性質を紹介する．

1 導入

本稿の目的は, リーマン多様体とその曲率について紹介することである．そのために,

- ∘ 曲線 (平面内のなめらかな曲線) の曲率,
- ∘ 曲面 (空間内のなめらかな曲面) の曲率,
- ∘ リーマン多様体の曲率

を扱う．曲率とは, 直感的に言って, 曲線・曲面・リーマン多様体の “曲がり具合” を表す量である．これらの曲率について,

- ∘ 曲率の意味 (曲がり具合をどうやって定式化するか),
- ∘ 曲率の性質 (曲率が不変量であること)

を紹介することを目的とする．

曲率の性質 (不変量であること) についてもう少し詳しく述べる．曲線の曲がり具合は, 曲線を回転・平行移動しても変わらない (そのように定義されるのが自然である)．2 つの曲線が回転と平行移動の合成によって移りあう時に “合同” である呼ぶことにすると, 上記の性質は, 2 つの合同な曲線の曲率は等しい, と言い換えることができる．このことを, 曲率は合同に関して不変である, あるいは, 曲率は合同に関する不変量である, と言う．これは, 例えば, 位相空間の性質 (連結性・コンパクト性など) が同相に関して不変であったことと, 全く同様である．

リーマン多様体には曲率が定義されるが, 曲率を定義するためには, 単なる多様体では不十分である．円と楕円は, 多様体としては同じ (微分同相) であるが, その曲がり具合は異なっている．よって, 多様体としてのデータだけでは曲がり具合を定式化することはできない, あるいは, 曲がり

* 2009 年度幾何学 C・多様幾何基礎講義 A 講義資料

† tamaru＠math.sci.hiroshima-u.ac.jp

具合をもし定義できたとしても微分同相に関する不変量にはなり得ない．曲率を定義するためには, 多様体にさらに付加的な情報が必要である．その付加的な情報が, 距離である．標語的に言うと,

$$\text{リーマン多様体} = \text{可微分多様体} + \text{距離}$$

である．もちろん, 距離は所定の条件を満たしていなくてはならない.

所定の条件を満たす距離を定義するために必要なものが, リーマン計量と呼ばれるものである. リーマン計量を標語的に言うと,

$$\text{リーマン計量} = \text{可微分多様体の各接空間上の内積}$$

である．可微分多様体 M の接空間上に内積があると, 2 点 $p, q \in M$ の間の距離を, 次のようにして定めることができる:

1. p と q を結ぶ M 上のなめらかな曲線 $c : \mathbb{R} \to M$ を考える,
2. 曲線の接ベクトル $c'(t) \in T_{c(t)}M$ を考える,
3. 与えられている内積を用いて, 接ベクトルの長さ $|c'(t)|$ が定義できる,
4. $|c'(t)|$ の積分によって曲線 c の長さ (p から q までの道のり) が定義できる,
5. p と q の距離を, “このような c の長さの下限” で定義する.

これがリーマン多様体のアイデアの基本的な部分である．M が平面内のなめらかな曲線の場合には, 上の方法で定義した距離は, 通常の意味での曲線の道のりに他ならない．よって, 曲線はリーマン多様体である．また, 空間内の曲面も, “接ベクトルを $\mathbb{R}^3$ のベクトルだと思って標準的な内積で測る” という操作によって, リーマン多様体となる.

以下は, 本稿の内容に関連する参考文献である:

- 落合 卓四郎; 微分幾何入門 (上)(下), 東京大学出版会 (1991, 1993).
- 砂田 利一; 曲面の幾何 (現代数学への入門), 岩波書店 (2004).
- J. A. Thorpe; 微分幾何の基礎概念 (後藤ミドリ, 石川晋, 糸川銚 訳), Springer (2006).
- 梅原 雅顕, 山田 光太郎; 曲線と曲面—微分幾何的アプローチ, 裳華房 (2002).

2　平面曲線

本節では, 平面 $\mathbb{R}^2$ 内のなめらかな曲線およびその曲率を定義し, 曲率の意味と性質を調べる.

2.1　曲線の定義

定義 2.1. I を $\mathbb{R}$ の開集合とする．写像 $c : I \to \mathbb{R}^2$ が **なめらかな曲線の助変数表示** とは, 次が成り立つこと: (1) c は C^∞-級, (2) $\forall t \in I$, $c'(t) \neq (0, 0)$.

このときの像 $c(I)$ を **なめらかな曲線** と呼ぶ．微分 $c'(t)$ を t における **速度ベクトル** と呼ぶ. ここで定義したなめらかな曲線 $c(I)$ は, 自己交叉を許容するので, 多様体になるとは限らない.

例 2.2. 以下はなめらかな曲線の助変数表示である:

(1) 円 $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$,

(2) 直線 $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto t\vec{a} + \vec{b}$ (ただし $\vec{a} \neq \vec{0}$).

(3) C^∞-関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ のグラフ $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, f(t))$.

2.2 曲線の曲率

定義 2.3. なめらかな曲線の助変数表示 $c : I \to \mathbb{R}^2$ に対して, 次で定義される関数 $\kappa_c : I \to \mathbb{R}$ を **曲率関数**, あるいは単に **曲率** と呼ぶ:

$$\kappa_c(t) := \det(c'(t), c''(t))/|c'(t)|^3.$$

定義より $|c'(t)| \neq 0$ であるから, 曲率の分母は 0 にはならない. 分子は, $c(t) = (x(t), y(t))$ を縦ベクトルだと思って作られる行列の行列式である:

$$\det(c', c'') = \det \begin{bmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{bmatrix} = x'y'' - x''y'.$$

例 2.4. 楕円 $c(t) = (a\cos(t), b\sin(t))$ に対して,

$$\kappa_c(t) = ab/(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}.$$

ここで $a > b > 0$ とすると, 曲率が最大になるのは $(\pm a, 0)$ のとき, 最小になるのは $(0, \pm b)$ のとき, となる. また特に, $a = b > 0$ すなわち半径 a の円の場合には, 曲率は $1/a$ で一定である.

2.3 曲率の性質: パラメータ変換での不変性

曲線の曲率は, 助変数表示の取り方に依存しない. 直感的には, 道路の曲がり具合は車でどう走ろうが変わらない, ということと同様.

補題 2.5. $c : I \to \mathbb{R}^2$ を曲線の助変数表示, $t : I' \to I$ を全単射な C^∞-写像とする. もし $\forall s \in I'$, $t'(s) > 0$ が成り立つならば, $c \circ t : I' \to \mathbb{R}^2$ はなめらかな曲線の助変数表示である.

このときの関数 $t = t(s)$ を **パラメータ変換** と呼ぶ. パラメータ変換によって得られた助変数表示 $c \circ t : I' \to \mathbb{R}^2$ のことを単にパラメータ変換と呼ぶこともある.

命題 2.6. 曲線の曲率はパラメータ変換で不変, すなわち, $\forall s \in I'$, $\kappa_c(t(s)) = \kappa_{c \circ t}(s)$.

2.4 曲率の意味: 加速度

助変数表示を車の走行と考えると, 曲率は「一定の速度で走ったときの加速度」とみなせる.

定義 2.7. 助変数表示 $c : I \to \mathbb{R}^2$ が **弧長パラメータ表示** であるとは, 次が成り立つこと: $\forall t \in I$, $|c'(t)| = 1$.

弧長パラメータ表示することが, 「一定の速度で走る」ことに対応する. 次に, 「どんな道路でも一定の速度で走ることができる」ことを示す.

補題 2.8. $c : I \to \mathbb{R}^2$ を助変数表示とする. このとき c をパラメータ変換して, 弧長パラメータ表示することができる. すなわち, $\exists t = t(s)$ (パラメータ変換) : $c \circ t$ は弧長パラメータ表示.

最後に「一定の速度で走ったときの加速度」を求める. そのためには次が必要である.

定義 2.9. 弧長パラメータ表示 $c(t) = (x(t), y(t))$ に対して, ベクトル $n(t) := (-y'(t), x'(t))$ を (左向きの) **単位法ベクトル** と呼ぶ.

容易に分かるように, 単位法ベクトルは, 接ベクトル $c'(t)$ に直交し, 長さ 1 のベクトルである.

命題 2.10. $c : I \to \mathbb{R}^2$ を弧長パラメータ表示とすると, 次が成り立つ: $\forall t \in I$, $c''(t) = \kappa_c(t) n(t)$.

特に $|\kappa_c(t)| = |c''(t)|$, すなわち, 曲率の大きさは一定の速度で走ったときの加速度の大きさである. 向きを考慮しているので, 曲率は負の値を取ることもある.

2.5 曲率の意味: フルネの公式

曲率は, 単位法ベクトル $n(t) = (-y'(t), x'(t))$ の微分と考えることができる. すなわち, 曲線の曲がり具合は, 単位法ベクトルの動きに反映される. この考え方は, 曲面の曲率にそのまま適用される.

命題 2.11. $c : I \to \mathbb{R}^2$ を弧長パラメータ表示とし, $e(t) := c'(t)$ とおく. このとき次が成り立つ: $n'(t) = -\kappa_c(t) e(t)$.

証明には, 次を用いると便利である; C^∞-写像 $v, w : I \to \mathbb{R}^2$ に対して,

$$\langle v(t), w(t) \rangle' = \langle v'(t), w(t) \rangle + \langle v(t), w'(t) \rangle.$$

命題 2.10, 2.11 をまとめて **フルネの公式** と呼び, 以下のように書く:

$$\begin{pmatrix} e & n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} e & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_c(t) \\ \kappa_c(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

2.6 曲率の性質: 合同での不変性

曲率は, $\mathbb{R}^2$ の向きを保つ合同変換で不変である.

定義 2.12. $c_1, c_2 : I \to \mathbb{R}^2$ を弧長パラメータ表示とする. このとき c_1 と c_2 が **向きを保つ合同** であるとは, 回転と平行移動の合成で移りあうこと, すなわち, 次が成り立つこと: $\exists g \in SO(2)$, $\exists v \in \mathbb{R}^2$ s.t. $\forall t \in I$, $c_2(t) = g c_1(t) + v$.

回転と平行移動と折り返しの合成で移りあう場合は, 単に **合同** と呼ぶ. 合同の条件式は, 上の $SO(2)$ を $O(2)$ に代えたものになる.

命題 2.13. 弧長パラメータ表示 $c_1, c_2 : I \to \mathbb{R}^2$ が向きを保つ合同であるならば, 曲率は等しい, すなわち, 次が成り立つ: $\kappa_{c_1} = \kappa_{c_2}$.

ちなみに曲線を折り返すと, その曲率は -1 倍される.

2.7 曲率の性質: 平面曲線の基本定理

前節で, 回転と平行移動の合成で移りあうならば曲率は同じであることを示した. 逆に, 曲率が同じならばそれらは回転と平行移動で移りあう, ということも言える.

定理 2.14 (平面曲線の基本定理). 任意の C^∞-関数 $\kappa : I \to \mathbb{R}$ に対して, κ を曲率とする曲線の弧長パラメータ表示が, 向きを保つ合同を除いて一意的に存在する.

存在することを証明するためには, 具体的に弧長パラメータ表示を与えれば良い. 一意性の証明には, フルネの公式を用いる.

3 曲面

本節では, $\mathbb{R}^3$ 内のなめらかな曲面を扱う. ガウス曲率および平均曲率を定義し, その性質と意味を調べることを目的とする.

3.1 曲面の助変数表示

定義 3.1. D を $\mathbb{R}^2$ の開集合とする. 写像 $p : D \to \mathbb{R}^3$ が **なめらかな曲面の助変数表示** とは, 次が成り立つこと: (1) p は C^∞-級, (2) $\forall (u,v) \in D, \mathrm{rank}(Jp)_{(u,v)} = 2$.

ここで $(Jp)_{(u,v)}$ は Jacobi 行列である. 偏微分を p_u, p_v で略記すると, $Jp = (p_u, p_v)$ である.

例 3.2. 以下はなめらかな曲面の助変数表示:

(1) 平面 $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto u\vec{a} + v\vec{b} + \vec{c}$ (ただし $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は一次独立),
(2) C^∞-関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ のグラフ $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (u, v, f(u,v))$.

命題 3.3. $c : I \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (x(t), z(t))$ をなめらかな曲線の助変数表示とし, $x(t) > 0$ $(\forall t \in I)$ と仮定する. このとき, 次で定義される $p : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}^3$ はなめらかな曲面の助変数表示:

$$p(u,v) = \begin{pmatrix} \cos(u) & -\sin(u) & 0 \\ \sin(u) & \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(v) \\ 0 \\ z(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(u)x(v) \\ \sin(u)x(v) \\ z(v) \end{pmatrix}.$$

このようにして得られた $p(u,v)$, あるいはその像を, (z-軸を中心とする) **回転面** と呼ぶ.

例 3.4. 以下は回転面である:

(1) 円柱 $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2=1\}$,

(2) 球面の一部 $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1\} \setminus \{(0,0,\pm 1)\}$

(3) トーラス

3.2 曲面の曲率

定義 3.5. なめらかな曲面の助変数表示 $p : D \to \mathbb{R}^3$ に対して, 次で定義される $n(u,v)$ を **単位法ベクトル** と呼ぶ:

$$n(u,v) := p_u(u,v) \times p_v(u,v)/|p_u(u,v) \times p_v(u,v)|.$$

ここで $p_u \times p_v$ は, p_u と p_v のベクトル積である. 助変数表示の定義より, $|p_u \times p_v| \neq 0$ が成り立つ. 定義より $|n| = 1$ であり, またベクトル積の性質より $\langle n, p_u \rangle = \langle n, p_v \rangle = 0$ が成り立つ.

定義 3.6. なめらかな曲面の助変数表示 $p : D \to \mathbb{R}^3$ に対して,

(1) $E := \langle p_u, p_u \rangle$, $F := \langle p_u, p_v \rangle$, $G := \langle p_v, p_v \rangle$ を **第一基本量** と呼ぶ,

(2) $L := \langle p_{uu}, n \rangle$, $M := \langle p_{uv}, n \rangle$, $N := \langle p_{vv}, n \rangle$ を **第二基本量** と呼ぶ,

(3) 次の行列 A を **形作用素** と呼ぶ:

$$A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix},$$

(4) $K := \det(A)$ を **ガウス曲率**, $H := (1/2)\mathrm{tr}(A)$ を **平均曲率** と呼ぶ.

形作用素の定義に登場する E, F, G を並べた行列に対して, 逆行列の存在は保証される (後述).

問題 3.7. 以下で定義される回転楕円面のガウス曲率と平均曲率を求めよ. ただし $a \geq b > 0$, $-\pi/2 < v < \pi/2$ とする:

$$p(u,v) = \begin{pmatrix} \cos(u) & -\sin(u) & 0 \\ \sin(u) & \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\cos(v) \\ 0 \\ b\sin(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos(u)\cos(v) \\ a\sin(u)\cos(v) \\ b\sin(v) \end{pmatrix}.$$

3.3 形作用素の意味

形作用素は, 単位法ベクトル $n(u,v)$ の微分を表している. これを確かめるために, まずは微分の定義を復習する.

定義 3.8. D を $\mathbb{R}^m$ の開集合とする. C^∞-写像 $F : D \to \mathbb{R}^n$ の $p \in D$ での **微分** を次で定義する:

$$(dF)_p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n : v \mapsto \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(F(p+tv) - F(p) \right)$$

微分は線型写像である. 定義より, 次が成り立つ:

$$(dn)_{(u,v)}(1,0) = p_u(u,v), \quad (dn)_{(u,v)}(0,1) = p_v(u,v).$$

さらに, 線型写像 $(dn)_{(u,v)}$ を標準的な基底に関して行列表示したものが, Jacobi 行列であった.

補題 3.9. 微分 $(dn)_{(u,v)}$ の像は, $n(u,v)$ と直交する.

証明を非常に荒っぽく書くと, $\langle n, n \rangle = 1$ の両辺を微分して $2\langle dn, n \rangle = 0$, となる. このことから, $(dn)_{(u,v)}$ の値域を以下のように狭めることができる:

$$(dn)_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \to (\mathbb{R}n(u,v))^\perp = \mathrm{span}\,\{p_u(u,v), p_v(u,v)\}.$$

これを行列表示したものが, 形作用素 A である.

命題 3.10. $-(dn)_{(u,v)}(e_1, e_2) = (p_u, p_v)A.$

すなわち, 形作用素 A は, 単位法ベクトル n の微分を表す. 曲面の曲がり具合は n の動きの激しさに表れるので, この命題は, ガウス曲率および平均曲率が曲面の曲がり具合を表すことの直感的な説明である.

3.4 第一基本量の意味: 内積

形作用素の定義に登場した第一基本量 E, F, G は, 接空間上の内積を表している. 以下では, 曲面の助変数表示 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ を考える.

定義 3.11. $\mathrm{I} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ を **第一基本形式** と呼ぶ.

第一基本形式が内積を表すことを述べるのが, 本節の目的である.

例 3.12. 問題 3.7 の回転楕円面に対して, $\mathrm{I} = a^2\cos^2(v)du^2 + (a^2\sin^2(v) + b^2\cos^2(v))dv^2$.

第一基本量 E, F, G はそれぞれ D から $\mathbb{R}$ への C^∞-関数である. 第一基本形式 I も写像である. どのような写像であるかを見るためには, $dudv$ などが何であるかを調べる必要がある. まず, u, v は座標関数を表すと考えると,

補題 3.13. $du, dv : D \to (\mathbb{R}^2)^*$ は次を満たす: $p \in D$ に対して,

$$(du)_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x, \quad (dv)_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto y.$$

ここで $(\mathbb{R}^2)^*$ は $\mathbb{R}^2$ の双対空間である.

定義 3.14. $\omega_1, \omega_2 \in (\mathbb{R}^2)^*$ の **対称テンソル** を次で定義する:

$$\omega_1\omega_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (X,Y) \mapsto (1/2)(\omega_1(X)\omega_2(Y) + \omega_1(Y)\omega_2(X)).$$

対称テンソル $\omega_1\omega_2$ は, 対称双線型写像である. このような $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への対称双線型写像の全体の成すベクトル空間を $S^2(\mathbb{R}^2)^*$ で表す. 以上により, 次が得られた:

$$I_p = E_p(du)_p^2 + 2F_p(du)_p(dv)_p + G_p(dv)_p^2 \in S^2(\mathbb{R}^2)^*$$

補題 3.15. 第一基本形式 $I : D \to S^2(\mathbb{R}^2)^*$ は, 次を満たす: 各 $p \in D$ に対して,

$$\mathrm{I}_p(X, Y) = {}^tX \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} Y.$$

命題 3.16. 各 $p \in D$ に対して, $\mathrm{I}_p(X, Y) = \langle (d\varphi)_p(X), (d\varphi)_p(Y) \rangle$ が成り立つ. 特に, I_p は $\mathbb{R}^2$ 上の正定値内積である.

すなわち I_p は, X, Y を p を始点とするベクトルだと思って φ で移して, それらを $\mathbb{R}^3$ の内積 $\langle , \rangle$ で測ったもの, である. 第一基本形式が内積を与えることから, 以下が導かれる.

系 3.17. 行列 $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ は逆行列を持つ.

系 3.18. 形作用素 A は対角化可能である.

このことは, A が第一基本形式に関して対称, すなわち $\mathrm{I}(AX, Y) = \mathrm{I}(X, AY)$, であることから示される. よって特に A の固有値は実数である. 形作用素 A の固有値を **主曲率** と呼ぶ.

3.5 第二基本量の意味: 形作用素の双対

第二基本量 L, M, N は, 形作用素 A の双対を表している.

定義 3.19. $\mathrm{II} = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ を **第二基本形式** と呼ぶ.

第二基本形式も, 第一基本形式と同様に, $\mathrm{II} : D \to S^2(\mathbb{R}^2)^*$ という写像である. 一方で形作用素は $A : D \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ という写像である. 次の命題は, これらの関係を表す.

命題 3.20. 各 $p \in D$ に対して, $\mathrm{II}_p(X, Y) = \mathrm{I}_p(A_pX, Y)$.

テンソルの言葉を使うと, $\mathrm{End}(\mathbb{R}^2) = (\mathbb{R}^2)^* \otimes \mathbb{R}^2$ と $(\mathbb{R}^2)^* \otimes (\mathbb{R}^2)^*$ を内積 I_p を使って同一視すると, A_p と II_p は同じものと見なせる, ということを意味する.

3.6 曲率の性質: パラメータ変換での不変性

曲線の曲率と同様に, 曲面のガウス曲率および平均曲率はパラメータ変換で不変である.

補題 3.21. 曲面の助変数表示 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ に対して, $\xi : D' \to D$ を C^∞-級の全単射とし, $\det(J\xi)_{p'} \neq 0$ $(\forall p' \in D')$ と仮定する. このとき, $\varphi \circ \xi : D' \to \mathbb{R}^3$ も曲面の助変数表示である.

上記の仮定を満たす $\xi : D' \to D$ を, 曲面の **パラメータ変換** または **座標変換** と呼ぶ. パラメータ変換が $\det(J\xi)_{p'} > 0$ $(\forall p' \in D')$ を満たすときに **正のパラメータ変換** と呼ぶ.

補題 3.22. $\varphi_1 : D_1 \to \mathbb{R}^3$ を曲面助変数表示, $\xi : D_2 \to D_1$ をパラメータ変換とする. 曲面 φ_1 に対応する量を E_1 などで表し, 曲面 $\varphi_2 = \varphi_1 \circ \xi$ に対応する量を E_2 などで表す. このとき, 各 $p \in D_2$ に対して,

(1) $\begin{pmatrix} E_2 & F_2 \\ F_2 & G_2 \end{pmatrix}_p = {}^t(J\xi)_p \begin{pmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{pmatrix}_{\xi(p)} (J\xi)_p$,

(2) $(n_2)_p = \sigma_p \cdot (n_1)_{\xi(p)}$, ただしここで, $\sigma_p = \dfrac{\det(J\xi)_p}{|\det(J\xi)_p|}$,

(3) $\begin{pmatrix} L_2 & M_2 \\ M_2 & N_2 \end{pmatrix}_p = \sigma_p \cdot {}^t(J\xi)_p \begin{pmatrix} L_1 & M_1 \\ M_1 & N_1 \end{pmatrix}_{\xi(p)} (J\xi)_p$.

命題 3.23. ガウス曲率はパラメータ変換で不変. 平均曲率は正のパラメータ変換で不変.

3.7 曲率の性質: 合同での不変性

曲線の曲率と同様に, 曲面のガウス曲率および平均曲率は回転や平行移動で不変である.

定義 3.24. $\varphi_1, \varphi_2 : D \to \mathbb{R}^3$ を曲面の助変数表示とする. これらが **合同** (または **向きを保つ合同**) であるとは, 次が成り立つこと: $\exists g \in \mathrm{O}(3)$ (または $\exists g \in \mathrm{SO}(3)$), $\exists w \in \mathbb{R}^3$ s.t. $\forall p \in D$, $\varphi_2(p) = g\varphi_1(p) + w$.

命題 3.25. 曲面が合同ならば, ガウス曲率は一致する. 曲面が向きを保つ合同ならば, 平均曲率も一致する.

証明には, 第一基本量, 第二基本量などが合同によってどう変化するかを調べれば良い.

3.8 ガウス曲率の性質: ガウスの驚異の定理

ガウス曲率と平均曲率の大きな違いは, ガウス曲率が「内在的」な性質である, ということである. 曲面 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ の内在的な性質とは, 定義域 D と 第一基本形式 I の組 (D, I) だけから決まる性質のことである.

定義 3.26. V_1, V_2 をベクトル空間, $\langle , \rangle_1$, $\langle , \rangle_2$ をそれぞれの内積とする. このとき, 線型写像 $f : (V_1, \langle , \rangle_1) \to (V_2, \langle , \rangle_2)$ が (内積空間としての) **等長写像** であるとは, 次が成り立つこと: $\forall X, Y \in V_1$, $\langle X, Y \rangle_1 = \langle f(X), f(Y) \rangle_2$.

定義 3.27. $\varphi_1 : D_1 \to R^3$, $\varphi_2 : D_2 \to R^3$ を曲面の助変数表示とする. このとき, パラメータ変換 $\xi : D_1 \to D_2$ が (曲面の) **等長写像**であるとは, 次が成り立つこと: $\forall p \in D_1$, $(d\xi)_p : (\mathbb{R}^2, (\mathrm{I}_1)_p) \to (\mathbb{R}^2, (\mathrm{I}_2)_p)$ が内積空間の等長写像.

このような等長写像が存在するときに, 二つの曲面は **等長的** であると言う. 内在的な性質とは, 等長的という同値関係の元で不変な性質, と言うことができる.

定理 3.28 (ガウスの驚異の定理). 曲面 $\varphi_1 : D_1 \to R^3$ と $\varphi_2 : D_2 \to R^3$ が等長的ならば, それらのガウス曲率は等しい, すなわち, 等長写像を $\xi : D_1 \to D_2$ とすると $(K_1)_p = (K_2)_{\xi(p)}$ $(\forall p \in D_1)$.

ガウス曲率は, 定義には法ベクトル n や第二基本形式 II も含まれていたが, 実はこれらを用いなくても表されることになる. 証明は, リーマン多様体の曲率を学んだ後で与える.

例 3.29. 平面と円柱は等長的であり, ガウス曲率は共に恒等的に 0 である.

一方で, 平面と円柱の平均曲率は等しくないので, 平均曲率は内在的な性質ではない.

4 リーマン多様体

リーマン多様体とは, リーマン計量が与えられた多様体である. リーマン計量とは, 各点での接空間に内積を与えるものであり, これは曲面の第一基本形式の一般化である. 本節では, リーマン多様体に対し, 曲率を定義し, その意味と性質を調べる.

4.1 多様体の復習

多様体の定義と, 多様体から多様体への写像が C^∞-級であることの定義は既知とし, 接空間および写像の微分を復習する. 多様体 M に対して, $C^\infty(M) := \{f : M \to \mathbb{R} : C^\infty\}$ とおく.

定義 4.1. C^∞-級写像 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ のことを, 多様体 M 内の **曲線** と呼ぶ. 曲線に対して, 次で定義される $\dot{c}(0)$ を $t = 0$ での **接ベクトル** と呼ぶ:

$$\dot{c}(0) : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : f \mapsto \frac{d}{dt}(f \circ c)(0).$$

曲面の場合は $\dot{c}(0) \in \mathbb{R}^3$ であったので, 接ベクトルをこのような形で定義する必要は無かった. 一般の多様体では, 接ベクトルを「対応する方向の偏微分」として定義している.

例 4.2. 点 $p \in M$ を含む局所座標を $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ とすると, 次は p における接ベクトル:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : f \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)).$$

これらの一次結合も接ベクトルである.

定義 4.3. $T_pM := \{\dot{c}(0) \mid c :$ 曲線$, c(0) = p\}$ を M の p における **接空間** と呼ぶ.

写像 $C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ の全体は, $\mathbb{R}$ の演算によりベクトル空間になる. 次の命題により, 接空間はその部分ベクトル空間になる.

命題 4.4. 点 $p \in M$ を含む局所座標を $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ とすると, 次は T_pM の基底である:

$$\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p\}.$$

特に M が $\mathbb{R}^n$ またはその開集合のときには, T_pM と $\mathbb{R}^n$ を自然に同一視することができる:

$$T_pM \ni \sum_i a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \longleftrightarrow (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n.$$

定義 4.5. 多様体間の C^∞-級写像 $F : M \to N$ の $p \in M$ での **微分** $(dF)_p$ を次で定義する:

$$(dF)_p : T_pM \to T_{F(p)}N : \dot{c}(0) \mapsto \frac{d}{dt}(F \circ c)(0).$$

微分 $(dF)_p$ は, 曲線 c の取り方に依らないこと, および線型写像であることが分かる. 曲面の助変数表示 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ の微分 $(d\varphi)_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ は, 正確に述べると

$$(d\varphi)_p : T_pD \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^3$$

を, 上の同一視を使って表したものである.

命題 4.6. $T_pM = \{\xi : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : \text{線型} \mid \xi(fg) = \xi(f)g(p) + f(p)\xi(g)\ (\forall f, g \in C^\infty(M))\}$.

$C^\infty(M)$ は代数の構造 (和とスカラー倍と積) を持つことに注意する. この $\xi(fg)$ に関する条件を, 積の微分の公式 (または Leibniz rule) と呼ぶ. このような接空間の表示は, 後にベクトル場を扱う時に必要になる.

4.2 リーマン多様体の定義

多様体上のリーマン計量を定義する. 曲面の第一基本形式はリーマン計量である.

定義 4.7. 多様体 M に対して, 次のような対応 g を **リーマン計量** と呼ぶ: 各 $p \in M$ に対して, $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ は内積.

この定義は不正確である. 正確に言うと, リーマン計量は

$$g : M \to \coprod_{p \in M} S^2(T_p^*M)$$

という写像である. ここで右辺の T_p^*M は T_pM の双対空間を表し, $\coprod$ は disjoint union を意味する. 右辺には多様体の構造が入り, 写像 g が C^∞-級であるという条件が必要である.

例 4.8. $\mathbb{R}^n$ に対して, 次で与えられる g はリーマン計量:

$$g_p(\sum a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, \sum b_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p) := \sum a_i b_i.$$

これを $\mathbb{R}^n$ の標準的なリーマン計量と呼ぶ．これ以外にもリーマン計量は数多く存在する．

命題 4.9. 曲面の助変数表示 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ に対して, 第一基本形式 I は D のリーマン計量.

第一基本形式 $I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ は, 曲面の節では $\mathrm{I}_p : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ として定義した．これは $\mathrm{I}_p : T_pD \times T_pD \to \mathbb{R}$ から $T_pD = \mathbb{R}^2$ という同一視をして得られたものである．

一般に, 多様体 M の局所座標を $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ とすると, リーマン計量 g は, 座標関数 $x_i : U \to \mathbb{R}$ の微分 dx_i を用いて

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j$$

と局所的に書くことができる．ここで $g_{ij} : U \to \mathbb{R}$ は C^∞-級関数である．

例 4.10. $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ に対して, $g = (1/y^2)(dx^2 + dy^2)$ は M のリーマン計量.

このようなリーマン多様体 (M, g) を **双曲平面** と呼び, $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ などで表す.

4.3 ベクトル場

曲面 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ に対して, 単位法ベクトル $n : D \to \mathbb{R}^3$ が重要な役割を果たしていた．幾何学的な意味を考えると, n は, $p \in D$ に対して $n_p \in T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^3$ を対応させる写像, と見るのが自然である．このようなものをベクトル場と呼ぶ.

定義 4.11. M を多様体とし, $TM := \coprod_{p \in M} T_pM$ とおく．写像 $X : M \to TM$ が **ベクトル場** であるとは, 次が成立すること: $\forall p \in M$, $X_p \in T_pM$.

多様体 M のベクトル場全体の集合を $\mathfrak{X}(M)$ で表す．この $\mathfrak{X}(M)$ には, 自然に和とスカラー倍が定義できる．それだけでなく, ベクトル場 X を $f \in C^\infty(M)$ 倍したもの fX もベクトル場である．言い換えると, $\mathfrak{X}(M)$ は $C^\infty(M)$-加群である.

以下, 多様体 M 全体ではなく, 局所座標 $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ の上で局所的に考える．明らかに, M 上のベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ の制限 $X|_U : U \to TU$ は U 上のベクトル場である.

例 4.12. 任意の $f_1, \ldots, f_n \in C^\infty(U)$ に対して, 次は U 上のベクトル場である:

$$\sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i} : U \to TU : p \mapsto \sum f_i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p.$$

一般にベクトル場 X は, 局所座標の中では, 上のような一次結合で書ける．このときの係数に相当する $f_1, \ldots, f_n$ が C^∞-級であるときに, X は C^∞-級ベクトル場であると言う．本稿では, ベクトル場は全て C^∞-級であるとして話を進める．すなわち, 次が成り立つ:

命題 4.13. 上のような局所座標 U に対して,

$$\mathfrak{X}(U) = \{\sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \mid f_i \in C^\infty(U)\}.$$

定義 4.14. 双線型写像 $[,] : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)$ がベクトル場の **bracket 積** であるとは, 次を満たすこと:

$$[f_i \frac{\partial}{\partial x_i}, f_j \frac{\partial}{\partial x_j}] = f_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - f_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

双線型なので, 上の条件から bracket 積は一意に決まる.

命題 4.15. ベクトル場の bracket 積に対して次が成り立つ:

(1) $[X, Y] = -[Y, X]$,

(2) $[X, [Y, Z] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$,

(3) $[X, fY] = (Xf)Y + f[X, Y] \quad (\forall f \in C^\infty(U))$.

ここではベクトル場の bracket 積を局所座標を使って定義したが, 計算のためにはこれで十分である. 実は bracket 積の定義は局所座標系の取り方に依らず, 多様体全体で定義できるのだが, それについては後で解説する. その場合でも, 命題 4.15 はそのまま成立する.

4.4 リーマン多様体の曲率

リーマン多様体の曲率を定義する. 曲面の場合には, 単位法ベクトル n というベクトル場を微分することによって, 曲率が得られた. リーマン多様体の曲率も, ベクトル場を "微分" して曲率を定義する. 以下ではリーマン計量を内積のように $\langle , \rangle$ で表す.

定義 4.16. リーマン多様体 $(M, \langle , \rangle)$ に対して, 次で定義される $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M) : (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ を **共変微分** または **Levi-Civita 接続** と呼ぶ:

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle.$$

上記の式を **Koszul 公式** と呼ぶ. ここで $\langle Y, Z \rangle \in C^\infty(M)$ であり $(M \ni p \mapsto \langle Y_p, Z_p \rangle_p \in \mathbb{R})$, また $X\langle Y, Z \rangle$ は X による関数の微分であることに注意する.

定義 4.17. 次で定義される $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M) : (X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z$ を, リーマン多様体 (M, g) の **リーマン曲率テンソル** と呼ぶ:

$$R(X, Y)Z := \nabla_{[X,Y]} Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z.$$

これを $R(X, Y, Z)$ と書かずに $R(X, Y)Z$ と書くのは, 習慣によるものである. この記号を用いると, 次のように略記することができて少し便利:

$$R(X, Y) = \nabla_{[X,Y]} - [\nabla_X, \nabla_Y] = \nabla_{[X,Y]} - \nabla_X \nabla_Y + \nabla_Y \nabla_X.$$

定義 4.18. (M, g) をリーマン多様体, σ を $T_p M$ の 2 次元部分空間とする. このとき σ の **断面曲率 (sectional curvature)** K_σ を次で定義する: $K_\sigma = \langle R(X, Y)X, Y \rangle_p$, ただし $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ は, $\{X_p, Y_p\}$ が σ の正規直交基底を与えるようなもの.

これにより, 非常に天下りだが, 曲率を定義することができた. 断面曲率がベクトル場 X, Y の取り方に依らないことなどは, 後で示す.

例 4.19. 双曲平面 $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ の断面曲率は, 任意の点において -1 である.

ベクトル場として次のものを取る:

$$X = y\frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = y\frac{\partial}{\partial y}.$$

このとき, 任意の $p \in \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ に対して $\{X_p, Y_p\}$ は $T_p(\mathbb{R}\mathrm{H}^2)$ の正規直交基底である (ので, 大変計算しやすい). 定義に従って計算すると,

$$[X, Y] = -X, \quad \nabla_X X = Y, \quad \nabla_Y X = \nabla_Y Y = 0$$

などが言えるので, これらを用いて断面曲率を計算すれば良い.

例 4.20. $D := \mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2)$ とし, $\langle, \rangle = a^2 \cos^2(v) du^2 + a^2 dv^2$ とおく. このとき, リーマン多様体 $(M, \langle, \rangle)$ の断面曲率は, 任意の点において $1/a^2$ である.

上のリーマン計量は, 半径 $a > 0$ の球面 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ の第一基本形式に他ならない. すなわち, この場合の断面曲率は, ガウス曲率と一致する. 実は一般に, 曲面 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ のガウス曲率と, リーマン多様体 (D, I) の断面曲率は一致する. ガウスの驚異の定理は, このことから証明される.

4.5 ベクトル場の bracket 積の性質

以前に, 局所座標の上でベクトル場の bracket 積を定義した. ここでは, 多様体 M 上のベクトル場の bracket 積を定義する. これにより, 以前の定義は局所座標に依存しないことが確かめられる.

命題 4.21. $\mathfrak{X}(M)$ を, 多様体 M 上のベクトル場全体の集合とする. このとき, 次が成立する:

$$\mathfrak{X}(M) = \{X : C^\infty(M) \to C^\infty(M) : \text{線型} \mid X(fg) = X(f)g + fX(g) \ (\forall f, g \in C^\infty(M))\}.$$

証明は, 接ベクトルの性質 (命題 4.6) から直ちに従う.

定義 4.22. $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して, 次で定義される $[X, Y]$ をベクトル場の **bracket 積** と呼ぶ:

$$[X, Y] : C^\infty(M) \to C^\infty(M) : f \mapsto X(Yf) - Y(Xf).$$

この bracket 積 $[X, Y]$ がベクトル場であることの証明は容易. また, ここで定義した bracket 積を局所座標を用いて書いたものが, 以前の定義と一致することも容易に確かめられる.

4.6 Levi-Civita 接続の性質

ここでは Levi-Civita 接続 ∇ の満たす性質を調べる. 逆に, いくつかの性質によって Levi-Civita 接続を特徴付けることができる.

命題 4.23. Levi-Civita 接続 $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ は次の性質を満たし, 逆に, 次の性質を全て満たすものは Levi-Civita 接続に限る:

(i) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$,

(ii) $\nabla_X (fY) = (Xf)Y + f \nabla_X Y$,

(iii) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$,

(iv) $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$.

Levi-Civita 接続がこれらを満たすことは, 定義より容易. 逆の証明は, 条件 (iii), (iv) を繰り返し用いるとできる.

4.7 曲率の性質

リーマン曲率テンソル R の性質を調べ, 断面曲率 K_σ が σ のみで決まることを確かめる.

命題 4.24. リーマン曲率テンソル R は次を満たす:

(1) $R(X, Y) = -R(Y, X)$,

(2) $\langle R(X, Y)Z, W\rangle = -\langle R(X, Y)W, Z\rangle$,

(3) $fR(X, Y)Z = R(fX, Y)Z = R(X, fY)Z = R(X, Y)(fZ) \quad (\forall f \in C^\infty(M))$.

(1) の証明は自明. (2) の証明は, 命題 4.23 (iv) から従う. (3) の証明は, bracket 積の性質および命題 4.23 (i), (ii) から従う.

系 4.25. リーマン曲率テンソル R はテンソルである, すなわち, 次が成立する: ベクトル場が $X_p = X'_p$, $Y_p = Y'_p$, $Z_p = Z'_p$ を満たすとき, $(R(X, Y)Z)_p = (R(X', Y')Z')_p$ が成り立つ.

系 4.26. 断面曲率 K_σ は σ のみで決まる, すなわち, 次が成立する: $\{X_p, Y_p\}$, $\{X'_p, Y'_p\}$ が共に $\sigma \subset T_pM$ の正規直交基底であるとき, $\langle R(X, Y)X, Y\rangle_p = \langle R(X', Y')X', Y'\rangle_p$ が成り立つ.

4.8 $\mathbb{R}^n$ の曲率

$\mathbb{R}^n$ に標準的なリーマン計量を入れた空間の曲率が 0 であることを確かめる. ここで, $\mathbb{R}^n$ の座標を $(x_1, \ldots, x_n)$ で表したとき, 標準的なリーマン計量とは $\langle , \rangle = dx_1^2 + \cdots + dx_n^2$ で与えられるものである.

命題 4.27. 上記の $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$ の Levi-Civita 接続 ∇ は次を満たす:

$$\nabla_{f_i \frac{\partial}{\partial x_i}} (f_j \frac{\partial}{\partial x_j}) = f_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

$\mathbb{R}^n$ の接空間 $T_p\mathbb{R}^n$ は, 自然に $\mathbb{R}^n$ と同一視することができた. $\mathbb{R}^n$ のベクトル場は,

$$\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \ni \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \longleftrightarrow f = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

によって $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への C^∞-級写像と同一視できる．この同一視の下で考えると, Levi-Civita 接続は普通の微分と一致する．

命題 4.28. 上の同一視の下で, 次が成立する: $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, $(\nabla_X Y)_p = (dY)_p(X_p)$.

Levi-Civita 接続が分かっているので, リーマン曲率テンソル R は容易に計算できる．

命題 4.29. 上記の $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$ に対して, 次が成り立つ: $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, $R(X,Y)Z = 0$.

従って断面曲率も常に 0 である．

4.9 ガウスの驚異の定理の証明

曲面 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ に対して, そのガウス曲率と, リーマン多様体 (D, I) の断面曲率が一致することを示す．断面曲率はリーマン計量 (この場合は第一基本形式 I) だけで決まるので, ガウス曲率が第二基本形式に依存しないことが分かる．ここで,

- ∘ D と $\varphi(D)$ を同一視する,
- ∘ $\varphi(D)$ 上のベクトル場は適当に拡張して $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場だと思う

ということに注意する．例えば,

$$\varphi_u = (x_u, y_u, z_u) = x_u \frac{\partial}{\partial x} + y_u \frac{\partial}{\partial y} + z_u \frac{\partial}{\partial z} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$$

であり, 単位法ベクトル場 $n \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ は, 次を満たすものだと考える:

$$\forall p \in \varphi(D) = D,\ \langle n_p, T_p\varphi(D) \rangle = 0,\ |n_p| = 1.$$

命題 4.30. $\nabla_X Y := (\widetilde{\nabla}_X Y)^\top$ で定義される ∇ は (D, I) の Levi-Civita 接続である．ただし, $\widetilde{\nabla}$ は $\mathbb{R}^3$ の標準的な計量に関する Levi-Civita 接続, また右肩の $\top$ は TD-成分を表す．

命題の証明には, この ∇ が命題 4.23 の条件を満たすことを確かめれば良い．条件は, 次の表記を用いて確かめられる:

$$\nabla_X Y = (\widetilde{\nabla}_X Y)^\top = \widetilde{\nabla}_X Y - \langle \widetilde{\nabla}_X Y, n \rangle n.$$

命題 4.31. 第二基本形式 II および形作用素 A に関して, 次が成り立つ:

(1) $\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \mathrm{II}(X,Y)n$ (Gauss の公式),

(2) $\widetilde{\nabla}_X n = -A(X)$ (Weingarten の公式).

これらを用いると, 曲面のリーマン曲率テンソル R は第二基本形式で表される．

命題 4.32. $\langle R(X,Y)Z, W \rangle = \mathrm{II}(X,Z)\mathrm{II}(Y,W) - \mathrm{II}(Y,Z)\mathrm{II}(X,W) \quad (\forall X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(D))$.

これを Gauss 方程式と呼ぶ．証明には, $\mathbb{R}^3$ のリーマン曲率が 0 であることを用いる．一般のリーマン部分多様体に対しても, リーマン曲率テンソルの差を第二基本形式で表す同様の公式がある．

定理 4.33 (Gauss の驚異の定理). 曲面 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ のガウス曲率と, リーマン多様体 (D, I) の断面曲率は一致する. よって特に, ガウス曲率は第一基本形式だけから決まる.

断面曲率は正規直交基底を選んで計算するが, 選び方に依存しないので, 形作用素 A の固有ベクトルになるようにして良い (A は対角化可能であった). 行列式 $\det(A)$ が固有値の積であることに注意すると, 先の Gauss 方程式から証明は直ちに従う.

4.10 Ricci 曲率

リーマン曲率テンソルから, 断面曲率以外の曲率も定義される. そのうちここでは Ricci 曲率を紹介する.

定義 4.34. 次で定義される $\mathrm{ric} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ を **Ricci 曲率** と呼ぶ:

$$\mathrm{ric}(X, Y)_p := \sum \langle R(X, E_i)Y, E_i \rangle_p,$$

ただしここで $E_i \in \mathfrak{X}(M)$ は, $\{(E_1)_p, \ldots, (E_n)_p\}$ が T_pM の正規直交基底となるもの.

これが正規直交基底の取り方などに依存しないことは, 断面曲率の場合と同様. Ricci 曲率は, 大雑把に言うと「断面曲率の平均」である.

定義 4.35. リーマン多様体 $(M, \langle , \rangle)$ が **Einstein** であるとは, ric が $\langle , \rangle$ の定数倍となること.

一般に, 「良いリーマン多様体を見付けよ」あるいは「与えられた多様体に対して良いリーマン計量を見付けよ」という問題は, 非常に自然であり, 興味深い. 例えば, 「断面曲率が一定」となるリーマン多様体は定曲率空間と呼ばれ, これについてはよく分かっていると言って良いだろう. しかしながら, 「断面曲率が常に正 (または常に負)」であるリーマン多様体や, Einstein 多様体については, まだまだ分かっていないことが多い.

4.11 おまけ: リー群

双曲平面 $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ の断面曲率を計算する時に,

$$X = y\frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = y\frac{\partial}{\partial y}$$

というベクトル場を選んだ. このとき, bracket 積が $[X, Y] = -X$ という形をしていることから, 曲率の計算が非常に簡単になった. このことの背景には,

- $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ はリー群 (すなわち多様体かつ群) である,
- 上のベクトル場は “左不変” である,

という事実がある. リー群に (所定の良い性質を持つ) リーマン計量を入れると, その曲率の計算は, 一般のリーマン多様体の場合と比べると極めて簡単である. しかしながら, このような場合でも, まだまだ未解決の問題は多くある.