

平成 21 年度卒業論文  
投影による身近な幾何学：地図とサイコロ

広島大学理学部数学科  
B064653 桐野和也  
指導教官 田丸博士 准教授  
平成 22 年 2 月 10 日

# 目次

1	はじめに	2
2	準備	3
2.1	曲面	3
2.2	第一基本形式と曲面上の情報	3
2.2.1	第一基本形式	4
2.2.2	曲面上の角度	4
2.2.3	曲面上の面積	5
2.2.4	曲面上の長さ	6
3	地図の作成	7
3.1	円柱への展開	7
3.2	心射円筒図法とメルカトルの地図	8
3.3	正積円筒図法	10
3.4	立体射影(ステレオ図法)	11
3.5	地図の作成におけるまとめ	12
4	サイコロに関する確率における投影の利用	13
4.1	2次元の場合	13
4.2	3次元の場合	16
4.3	考察	18
4.4	サイコロの確率に関するまとめ	18

# 1 はじめに

投影の手法による幾何学が身近に応用されている. 今回の卒業論文では地図とサイコロの2つを取り上げる.

第2章では, 地図に関して必要な曲面に関する事, 主に, 地図において角度や面積などを保存する条件などを第一基本量や, 第一基本形式の観点から書いてある.

第3章では実際の世界地図の例で, 主に投影の手法によって描かれているものを挙げ, 世界地図の図とともに, 地図の性質を紹介している. 具体的には,

1. 円柱への展開による地図
2. メルカトルの地図
3. 正積地図
4. 立体射影による地図

の4つの地図に関する作成法と性質をまとめている.

なお, 世界地図の図を作成するにあたって, 数学ソフトウェア Maple と V. Costanzo 氏による The Maple Maptools Package を用いた.

(<http://www3.villanova.edu/maple/projects/costanzo/cartto/index.htm>)

使用した Maple のコマンドを付録として本論文の最後に載せている.

第4章では, 直方体のサイコロのそれぞれの目が出る確率はどうなるかを投影を利用して考えている. まず, 2次元の場合を考え, その議論を3次元に上げて議論し, 出た結果を考察している.

## 2 準備

この節では地図に関する事柄について必要な定義を述べる.

### 2.1 曲面

定義 2.1  $D$  を  $\mathbb{R}^2$  の開集合とする. 写像  $p : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  が曲面の助変数表示とは, 次が成り立つこと:  $\forall (u, v) \in D, \text{rank}(Jp)_{(u,v)} = 2$ .

ここで  $(Jp)_{(u,v)}$  は Jacobi 行列である. 偏微分を  $p_u, p_v$  で略記すると,  $Jp = (p_u, p_v)$  である.

$\text{rank}(Jp)_{(u,v)} = 2$  は  $p_u, p_v$  が一次独立であることを示している.

定義 2.2  $D$  を助変数表示が定める領域とよぶ.

定義 2.3 曲面の助変数表示  $p(u, v)$  において, 次の対応によって決まる曲面上の曲線をそれぞれ  $u$  曲線,  $v$  曲線という:

(1)  $u$  曲線:  $u \rightarrow p(u, v)$ ,

(2)  $v$  曲線:  $v \rightarrow p(u, v)$ .

ベクトル  $p_u$  は  $u$  曲線の各点での速度ベクトルを表し,  $p_v$  は  $v$  曲線の各点での速度ベクトルを表す.

例 2.4 次は曲面の助変数表示:

$$D := \{(u, v) \mid -\pi < u < \pi, -\pi/2 < v < \pi/2\}, \quad x = \cos u \cos v, y = \sin u \cos v, z = \sin v.$$

この助変数表示によって表される曲面は単位球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  の一部である. 球面の南極と北極を表すことはできない.

### 2.2 第一基本形式と曲面上の情報

曲面の助変数表示  $p(u, v)$  によって曲面上の点を  $uv$  平面上で表現することは,  $uv$  平面上に曲面の地図を描くことと考えることができる.

そこで, 曲面の座標系を地図と考えたときに, それ上での長さ, 角度, 面積に関する情報を持っている第一基本量を考え, “正確な地図” を定義する.

### 2.2.1 第一基本形式

定義 2.5 曲面  $p(u, v)$  上の点  $p(u, v)$  における接ベクトル  $p_u(u, v)$  と  $p_v(u, v)$  の内積で与えられる次の  $E, F, G$  を第一基本量という.

$$E := p_u \cdot p_u, \quad F := p_u \cdot p_v, \quad G := p_v \cdot p_v.$$

曲面  $p(u, v)$  上の 2 点  $p(u, v)$  と  $p(u + \Delta u, v + \Delta v)$  の距離  $\Delta s$  の 2 乗は  $\Delta u, \Delta v$  が十分小さいときテイラーの定理により次のように近似される:

$$\begin{aligned} (\Delta s)^2 &= |p(u + \Delta u, v + \Delta v) - p(u, v)|^2 \\ &\doteq |p_u \Delta u + p_v \Delta v|^2 \\ &= E(\Delta u)^2 + 2F\Delta u \Delta v + G(\Delta v)^2. \end{aligned}$$

$\Delta s, \Delta u, \Delta v$  を記号的にそれぞれ  $ds, du, dv$  とし, 次を定義する.

定義 2.6 第一基本量の形式的な和  $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$  を第一基本形式とよぶ.

命題 2.7 ([1], p66) 第一基本形式は座標変換によって不変である.

### 2.2.2 曲面上の角度

曲面上の角度は第一基本量で表されることを述べる.

$t = t_0$  で交わる 2 つの  $uv$  平面上の曲線  $\gamma_1(t) = (u_1(t), v_1(t))$  と  $\gamma_2(t) = (u_2(t), v_2(t))$  に対応する同じ曲面  $p(u, v)$  上の曲線  $p \circ \gamma_1(t)$  と  $p \circ \gamma_2(t)$  があるとする.

このとき次の命題が成り立つ.

命題 2.8  $p \circ \gamma_1(t)$  と  $p \circ \gamma_2(t)$  のなす角  $\theta$  について,

$$\cos \theta = \frac{Eu_1\dot{u}_2 + F(\dot{u}_1\dot{v}_2 + \dot{v}_1\dot{u}_2) + G\dot{v}_1\dot{v}_2}{\sqrt{Eu_1^2 + 2Fu_1\dot{v}_1 + G\dot{v}_1^2} \sqrt{Eu_2^2 + 2Fu_2\dot{v}_2 + G\dot{v}_2^2}}.$$

補題 2.9  $\mathbf{a}$ : 曲面の接ベクトルとするととき,  $|\mathbf{a}| = \sqrt{Ea_1^2 + 2Fa_1a_2 + Ga_2^2}$ .

( )  $\mathbf{a}$  を曲面  $p(u, v)$  上の点  $P = p(u_0, v_0)$  において接するベクトルとする.

$\mathbf{a}$  は  $p_u(u_0, v_0)$  と  $p_v(u_0, v_0)$  との一次結合によってかける.

よって  $\mathbf{a} = a_1p_u(u_0, v_0) + a_2p_v(u_0, v_0)$  と表せ,  $\mathbf{a}$  の空間ベクトルによる長さは,

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}|^2 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \\ &= (a_1p_u(u_0, v_0) + a_2p_v(u_0, v_0)) \cdot (a_1p_u(u_0, v_0) + a_2p_v(u_0, v_0)) \\ &= a_1^2(p_u(u_0, v_0))^2 + 2a_1a_2(p_u(u_0, v_0) \cdot p_v(u_0, v_0)) + a_2^2(p_v(u_0, v_0))^2 \\ &= a_1^2E + 2a_1a_2F + a_2^2G. \end{aligned}$$

( $\therefore$ ) [命題 2.8 の証明]  $p \circ \gamma_1(t)$  と  $p \circ \gamma_2(t)$  の  $t = t_0$  での速度ベクトルはそれぞれ,

$$a_1 = p_u\dot{u}_1 + p_v\dot{v}_1, \quad a_2 = p_u\dot{u}_2 + p_v\dot{v}_2$$

と表されるから, これらのなす角  $\theta$  について補題 2.9 より,

$$\cos \theta = \frac{a_1 \cdot a_2}{\|a_1\| \|a_2\|} = \frac{Eu_1u_2 + F(u_1v_2 + v_1u_2) + Gv_1v_2}{\sqrt{Eu_1^2 + 2Fu_1v_1 + Gv_1^2} \sqrt{Eu_2^2 + 2Fv_1v_2 + Gv_2^2}}.$$

命題 2.10 (角度の保存) 曲線  $\gamma_1, \gamma_2$  がなす角度と  $p(u, v)$  上の曲線  $p \circ \gamma_1, p \circ \gamma_2$  のなす角度が一致するための十分条件は  $E = G, F = 0$  となること.

( $\because$ ) 命題 2.8 の式に  $E = G, F = 0$  を代入すると,

$$\cos \theta = \frac{\dot{u}_1 \dot{u}_2 + \dot{v}_1 \dot{v}_2}{\sqrt{\dot{u}_1^2 + \dot{v}_1^2} \sqrt{\dot{u}_2^2 + \dot{v}_2^2}}$$

となり,  $uv$  平面上で曲線  $\gamma_1, \gamma_2$  の速度ベクトルがなす角度と一致する.

つまり,  $E = G, F = 0$  が角度を保存するための十分条件である.

### 2.2.3 曲面上の面積

曲面上の面積は第一基本量で表されることを述べる.

命題 2.11 ([1], p60) 曲面上の助変数表示  $p(u, v)$  が  $uv$  平面上の領域  $D$  で定義されているとする. 曲面  $p(u, v)$  の面積は  $D$  上で

$$\iint_D |p_u(u, v) \times p_v(u, v)| dudv$$

で与えられる.

定義 2.12  $dA := |p_u(u, v) \times p_v(u, v)| dudv$  を曲面の面積要素という.

面積要素が曲面の助変数表示によらないことは重積分の変数変換の公式 ([1], p166, 定理 1.7) により確かめられる.

命題 2.13 面積要素  $dA = \sqrt{EG - F^2} dudv$

( $\because$ )  $p_u, p_v$  のなす角を  $\theta$  とする. ベクトル積の大きさの定義から

$$\begin{aligned} |p_u \times p_v|^2 &= (|p_u| |p_v| \sin \theta)^2 \\ &= |p_u|^2 |p_v|^2 (1 - \cos \theta)^2 \\ &= |p_u|^2 |p_v|^2 \left(1 - \frac{(p_u \cdot p_v)}{(|p_u| |p_v|)}\right)^2 \\ &= (p_u \cdot p_u)(p_v \cdot p_v) - (p_u \cdot p_v)^2 \\ &= EG - F^2. \end{aligned}$$

よって,  $dA = |p_u \times p_v| dudv = \sqrt{EG - F^2} dudv$ .

命題 2.14  $uv$  平面上の領域  $D$  の面積とそれに対応する曲面  $p(u, v)$  上の面積が一致するための十分条件は  $\sqrt{EG - F^2} = 1$  となること.

( $\because$ ) 定義 2.12 で  $\sqrt{EG - F^2} = 1$  のとき, 曲面上の面積を計算すると,

$$\iint_D |p_u(u, v) \times p_v(u, v)| dudv = \iint_D dudv = |D|$$

となり,  $D$  の面積  $|D|$  と一致する. ■

## 2.2.4 曲面上の長さ

曲面上の長さは第一基本量で表されることを述べる.

$uv$  平面上の曲線  $\gamma(t) = (u(t), v(t))$  ( $a \leq t \leq b$ ) に対して,  $p \circ \gamma(t) = p(u(t), v(t))$  は曲面  $p(u, v)$  上の空間曲線である. このとき次の命題が成り立つ.

命題 2.15  $p \circ \gamma(t)$  の空間曲線としての長さ (弧長)  $\mathcal{L}(p \circ \gamma(t))$  は,

$$\mathcal{L}(p \circ \gamma(t)) = \int_a^b \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} dt.$$

( $\because$ )  $\mathcal{L}(p \circ \gamma(t)) = \int_a^b \left| \frac{d}{dt} p(u(t), v(t)) \right| dt$  である.  $p \circ \gamma(t)$  の速度ベクトルは chainrule より,

$$\frac{d}{dt} p(u(t), v(t)) = p_u \dot{u} + p_v \dot{v}.$$

補題 2.9 を用いて,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(p \circ \gamma(t)) &= \int_a^b |p_u \dot{u} + p_v \dot{v}| dt \\ &= \int_a^b \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} dt. \end{aligned}$$

命題 2.16  $D$  上の曲線  $\gamma(t)$  ( $a \leq t \leq b$ ) の長さが, 対応する曲面上の曲線  $p \circ \gamma(t)$  の長さと一致するための必要十分条件は  $E = G = 1, F = 0$  となること.

( $\because$ ) [十分性について] 命題 2.15 の式において,  $E = G = 1, F = 0$  とすればよい.

[必要性について]

角  $\alpha$  を固定し,  $D$  上の任意の点  $(u_0, v_0)$  を通り  $u$  軸方向と角度  $\alpha$  をなす直線

$(u_0 + t \cos \alpha, v_0 + t \sin \alpha)$  ( $0 \leq t \leq c$ ) を考える. この直線の  $uv$  平面での長さは  $c$  である.

対応する曲面上の曲線  $p(u_0 + t \cos \alpha, v_0 + t \sin \alpha)$  ( $0 \leq t \leq c$ ) の長さはこれと等しいから

$$c = \int_0^c \left| \frac{d}{dt} p(u_0 + t \cos \alpha, v_0 + t \sin \alpha) \right| dt$$

より,

$$c = \int_0^c \sqrt{E \cos^2 \alpha + 2F \cos \alpha \sin \alpha + G \sin^2 \alpha} dt$$

が成立する.

両辺を  $c$  で微分して  $c \rightarrow 0$  とすれば  $(u_0, v_0)$  において

$$E \cos^2 \alpha + 2F \cos \alpha \sin \alpha + G \sin^2 \alpha = 1$$

となる. 上の式は任意の  $\alpha$  について成り立つので,  $\alpha = 0$  とすると  $E = 1$ ,  $\alpha = \pi/2$  とすると  $G = 1$  となる, これより  $F = 0$  が得られる. ■

定義 2.17 命題 2.16 をみたす地図のことを正確な地図とよぶ.

注意: 命題 2.16 は命題 2.10 と命題 2.14 の十分条件になっている.

以上をまとめると, 曲面  $p(u, v)$  の第一基本量について,

1.  $E = G, F = 0 \implies$  曲面上の角度を保つ.
2.  $\sqrt{EG - F^2} = 1 \implies$  曲面上の面積を保つ.
3.  $E = G = 1, F = 0 \iff$  曲面上の長さを保つ (正確な地図を描くことができる.)

となる.

### 3 地図の作成

地球の地図を描くことについて考える.

半径  $r$  の球について正確な地図, つまり曲線の長さを保つ地図を平面に描こうとする.

しかし, ガウスの驚異の定理により, 球の正確な地図を描くことは不可能であることが知られている ([1], p99). 実際の世界地図は, 角度や距離などある性質を犠牲にすることで様々な地図が作られている. ここでは世界地図の作り方の例として投影の手法を用いたものをいくつか紹介する. 以下簡単のために地球を単位球とする.

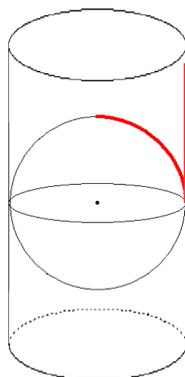
#### 3.1 円柱への展開

例 2.4 で見たように, 地球上の点  $(x, y, z)$  を経度を  $u$ , 緯度を  $v$  として, 助変数表示すると

$$x = \cos u \cos v, \quad y = \sin u \cos v, \quad z = \sin v \quad \left(-\pi < u < \pi, -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}\right)$$

となる.

この助変数表示による球面上の点  $P$  を  $uv$  平面に描くためには, 球面の経線を円柱の母線に対応させるように球を切り開けばよい.



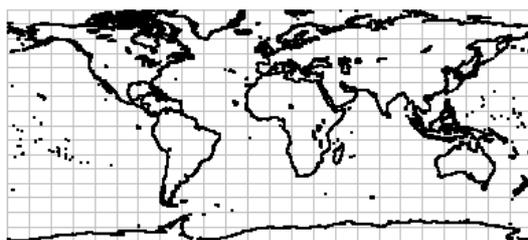
第一基本量を計算すると,

$$E = \cos^2 v, F = 0, G = 1.$$

第一基本形式は

$$ds^2 = \cos^2 v du^2 + dv^2.$$

$du^2, dv^2$  の係数  $E, G$  はそれぞれ緯線, 経線の縮尺を意味しているので, ここで  $dv^2$  の係数が 1 となっていることは, 経線の長さを保つことを意味している. これによってできる地図は下図のようになる.

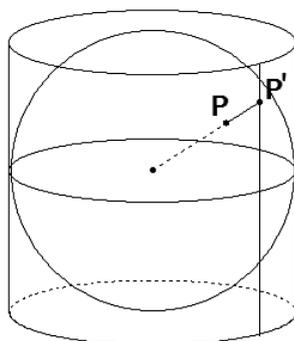


この地図の欠点は, 赤道から離れるにつれて, 縦横の長さの比が違ってしまいう点にある. さらに, 面積も角度も保たないためあまり実用的ではない.

### 3.2 心射円筒図法とメルカトルの地図

先ほどの円柱への展開による地図の欠点は, 赤道から離れるにつれて, 縦横の長さの比が違ってしまいう点にある. ここで, 円柱への展開を改良し, 縦横の長さの比が一致するメルカトルの地図を紹介する.

球を下図のように中心を光源として, 赤道で球面に外接する円柱の側面に投影する. これを心射円筒図法という.



これによって描かれる地図は, 新しい座標系  $(\xi, \eta)$  を

$$\xi = u, \quad \eta = \tan v$$

としたときに,  $\xi\eta$  平面に描かれる地図であるが, この地図はあまりよい条件を満たさない. メルカトルの地図はこれを改良し,

$$\xi = u, \quad \eta = \log \left( \tan \left( \frac{v}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

としている. これを以下導く.  
円柱への展開において, もし,

$$dv = \cos v d\eta$$

となる関数  $\eta = \eta(v)$  があれば, 新しい座標系  $(\xi, \eta)$  を

$$\xi = u, \quad \eta = \eta(v)$$

として, 第一基本量を計算すると,

$$E = \cos^2 v, \quad F = 0, \quad G = \cos^2 v.$$

第一基本形式は

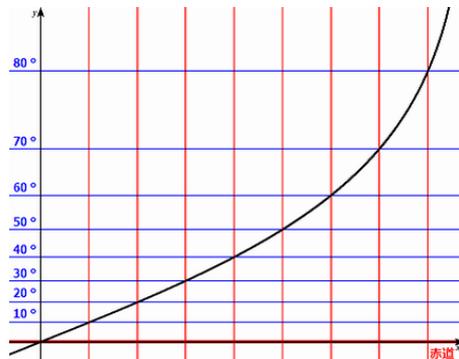
$$ds^2 = \cos^2 v (d\xi^2 + d\eta^2)$$

となり, 縦横の長さの比が一致する. これらを満たす関数  $\eta = \eta(v)$  は,

$$\eta = \int_0^v \frac{dt}{\cos t} = \log \left( \tan \left( \frac{v}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

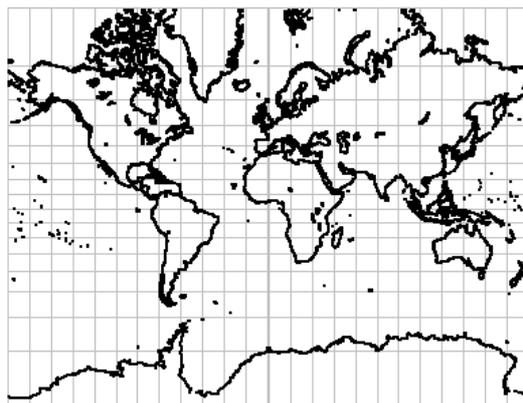
で与えられる.

$\eta = \log \left( \tan \left( \frac{v}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)$  のグラフとそれによる緯線の間隔は下の図のようになる.



球上の点は  $\left( \frac{\cos \xi}{\cosh \eta}, \frac{\sin \xi}{\cosh \eta}, \tanh \eta \right)$  となる.

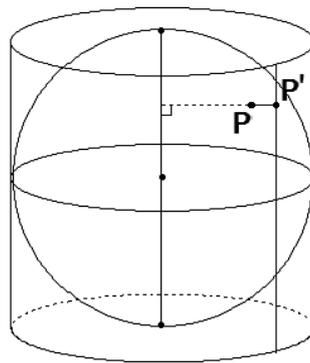
$\xi\eta$  平面に描かれる地図をメルカトルの地図とよぶ.



この地図に関する第一基本量は  $E = G, F = 0$  を満たしているため、角度が保存される。主に海図として広く用いられ、航海においては船上で羅針盤の北極の向きと進路がなす角は、メルカトルの地図上で航路と経線のなす角の大きさと一致する。しかし、 $\sqrt{EG - F^2} \neq 1$  となり面積は保存されず、 $\lim_{v \rightarrow \pm\pi/2} \eta = \pm\infty$  より、南極と北極は限りなく遠いところへいってしまう。

### 3.3 正積円筒図法

球から円柱への展開の際に以下のように投影する。



つまり、経線は円柱の母線に緯線は円柱の緯線に対応させる際に、対応する円柱上の高さ  $\zeta$  を緯線の高さ  $\sin v$  に等しくする。光源は地軸である。この投影法を正積円筒図法という。この投影法では、

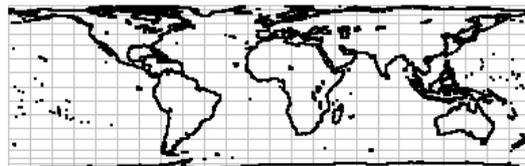
$$\xi = u, \quad \zeta = \sin v$$

なる座標変換によって、 $d\zeta = \cos v dv$  となるから、第一基本形式は

$$ds^2 = \cos^2 v du^2 + dv^2 = \cos^2 v d\xi^2 + \frac{1}{\cos^2 v} d\zeta^2 = (1 - \zeta^2) d\xi^2 + \frac{1}{1 - \zeta^2} d\zeta^2$$

となり、球上の点は  $(\sqrt{1 - \zeta^2} \cos \xi, \sqrt{1 - \zeta^2} \sin \xi, \zeta)$  となる。

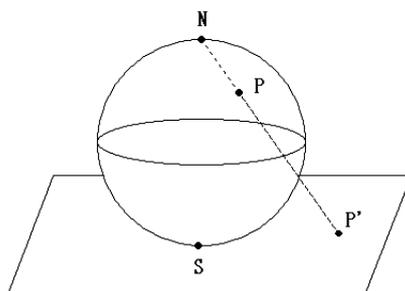
$\xi\zeta$  平面に描かれる地図を正積地図と呼び、下図のような地図になる。



この地図に関する第一基本量は  $\sqrt{EG - F^2} = 1$  を満たしているため、面積が保存される。主に世界全体の分布図として用いられる。一方、 $E = G, F = 0$  を満たさないため角度は保存されず、極付近では縦横の比率が大きく異なる欠点がある。

### 3.4 立体射影 (ステレオ図法)

下図のように地球の北極点  $N$  から南極点  $S$  で地球に接する平面 ( $z = -1$ ) へ投影を行う.



球状の北極点以外の点  $P$  と  $N$  を通る直線と平面との交点を  $P'$  とするとき, 点  $P$  を  $P'$  に対応させる写像  $\pi : P \rightarrow P'$  を立体射影という.

地球上の点  $P(x, y, z)$  が  $(X, Y, -1)$  に写るとする. このとき,

$$X = \frac{2x}{1-z}, Y = \frac{2y}{1-z}$$

であり,  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \neq 1$  であるので,

$$x = \frac{4X}{X^2 + Y^2 + 4}, y = \frac{4Y}{X^2 + Y^2 + 4}, z = \frac{X^2 + Y^2 - 4}{X^2 + Y^2 + 4}$$

となる.  $p(X, Y) = (x, y, z)$  の第一基本量を計算し, 第一基本形式を求めると,

$$I = \frac{16}{(4 + X^2 + Y^2)^2} (dX^2 + dY^2)$$

となる. よってこの  $XY$  平面に描かれる地図は第一基本量が  $E = G, F = 0$  を満たすので, メルカトル図法と同じく角度を保存する.

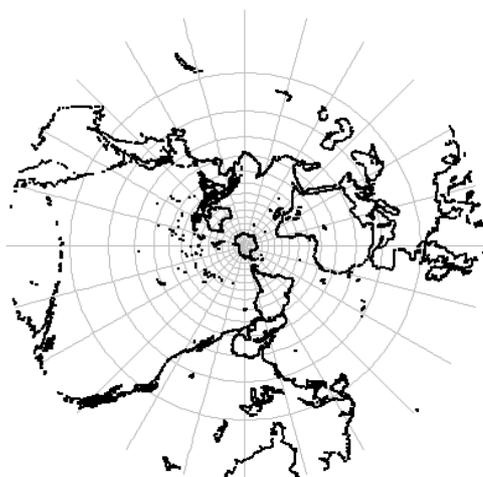


図 1: 南緯 90° ~ 北緯 60°

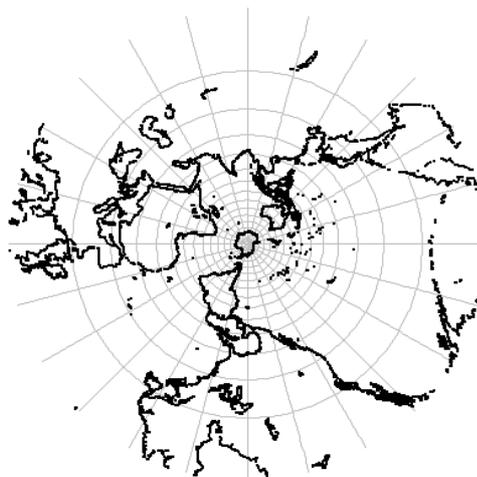


図 2: 南緯 90° ~ 北緯 60° (左右反転)

この立体射影による地図は図1のようになる。立体射影では地球を裏側から見ることになるので、左右反転すると表側から見た図になる(図2)。

図1, 図2は南緯90°~北緯60°の範囲であるが、他の範囲の地図も紹介する。なお図3, 図4ともに左右反転させており、地球を表側から見ている状態にしている。

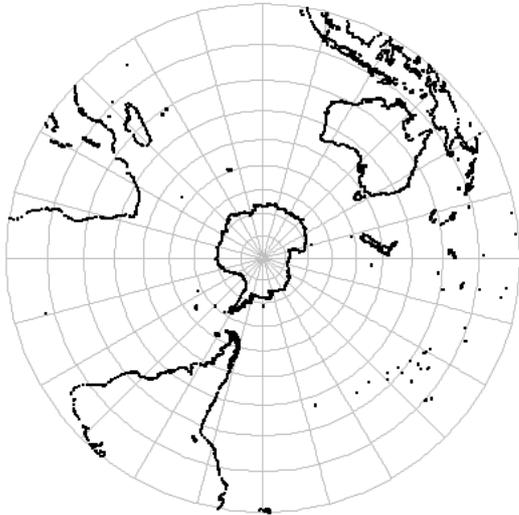


図 3: 南緯 90° ~ 0°(赤道)



図 4: 南緯 90° ~ 北緯 80°

メルカトルの地図では極が無限遠方になってしまったが、この立体射影は極付近を写す地図である。極から離れるにつれて大陸などの形が異なっていく。

経線は極から放射状にのび、緯線は極を中心とする円で表されるという特性がある。

### 3.5 地図の作成におけるまとめ

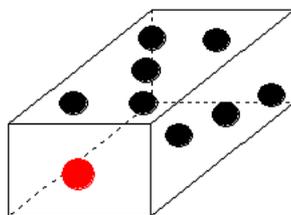
このように投影の手法によって、正確ではないが様々な良い性質をもった地図が作成できることがわかった。角度を保存する地図は主に航海などに用いられ、面積を保存する地図は統計学などに用いられる。以下に紹介した各地図の性質をまとめる。

円柱への展開による地図	…	長所：経線の長さを保つ。 短所：縦横の長さの比が異なる、面積も角度も保たないためあまり実用的ではない。
メルカトルの地図	…	長所：角度を保つ。 短所：極が表現できない、面積が保てない。
正積地図	…	長所：面積を保つ。 短所：極付近では縦横の比率が大きく異なる、角度が保てない。
立体射影による地図	…	長所：角度を保つ、極付近を表現できる。 短所：極から離れるにつれて大陸などの形が異なっていく、面積が保てない。

## 4 サイコロに関する確率における投影の利用

地図では球からの投影を考えた. 次は球への投影を考える.

サイコロのそれぞれの目が出る確率はそれぞれ  $1/6$  である. しかし, 下図のような直方体のサイコロの場合はどのようになるか. これを投影を利用して考える.

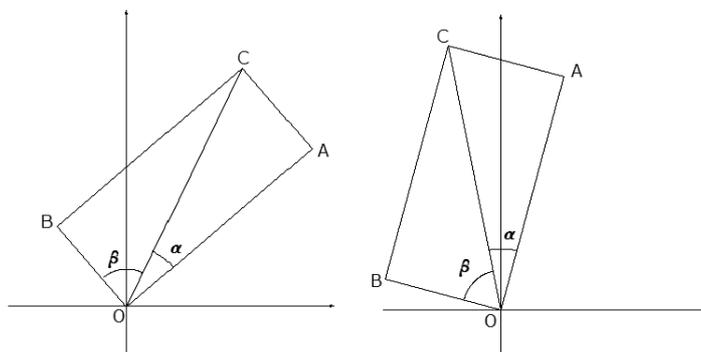


直方体のサイコロ

### 4.1 2次元の場合

はじめに, 次元を一つ下げて2次元の長方形サイコロを考える.

つまり, カードのようなサイコロを1次元平面に転がし, それぞれの辺が出る確率を求める.



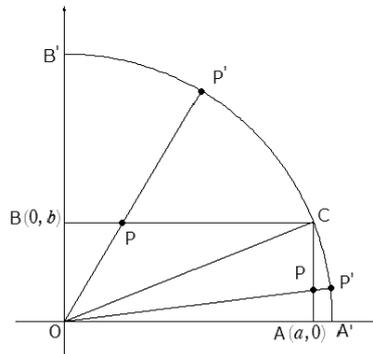
上図のように長方形  $OACB$  を考え,  $OA = a, OB = b$  とする. 今回は対辺にあたる長さが同じ辺は区別をつけず, 長さ  $a$  の辺を辺  $a$  (上図では  $OA$  と  $BC$ ), 長さ  $b$  の辺を辺  $b$  (上図では  $OB$  と  $AC$ ) と表す事にする.

辺  $a$  が出る確率  $P_a$ , 辺  $b$  が出る確率  $P_b$  はそれぞれ角度を考えることによって,

$$P_a = \frac{\beta}{\alpha + \beta} = \frac{\arctan \frac{a}{b}}{\frac{\pi}{2}}, P_b = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{\arctan \frac{b}{a}}{\frac{\pi}{2}}$$

であると考えられる. この議論を3次元に上げるために投影を用いて, もう少し考察する.

$\sqrt{a^2 + b^2} = 1$  としても一般性は失われないのでそのように仮定する.



上図のように中心は頂点  $O$  で半径が  $1$  の頂点  $C$  を通る円  $O$  を考える. 長方形の边上の点  $P$  を任意にとり, 円の中心  $O$  を光源として,  $\widehat{A'B'}$  上に点  $P$  を投影する.

投影された  $\widehat{A'B'}$  上の点を  $P'$  とする.

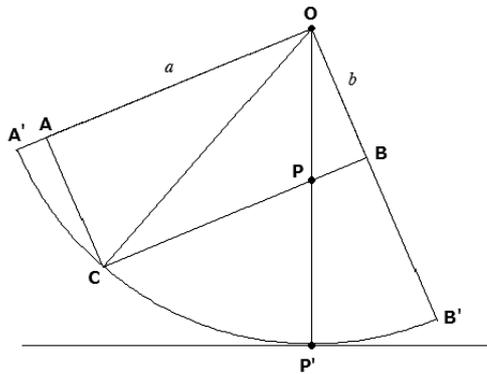
これは,

$\widehat{A'B'}$  上の任意の点を  $P'$  としたとき,  $OP'$  と長方形との交点を  $P$  する

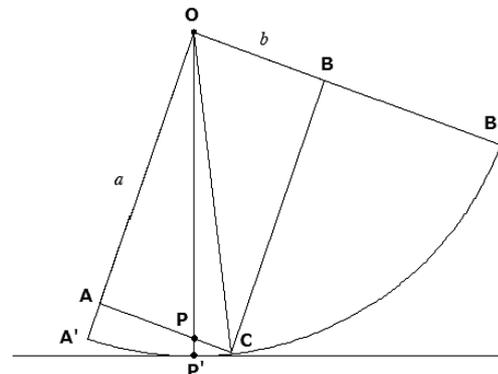
と, 言い換えられる. このとき,

辺  $a$  が出る  $\iff OP'$  が  $BC$  と交点  $P$  を持つ

ということと考えられる. 図で表すと下のようになる.



辺  $a$  が出る場合



辺  $b$  が出る場合

つまり,  $P'$  の動く範囲を考えることで  $P_a$  が計算でき,

$$P_a = \frac{\widehat{B'C}}{\widehat{A'B'}}$$

となる. 以下それを計算していく.

点  $P$  が  $BC$  上にあるとき, 点  $P$  は  $P(t, b)$  ( $0 \leq t \leq a$ ) とパラメータ表示できる.  
 このときの  $P'$  をパラメータ表示すると  $\overrightarrow{OP'} = k\overrightarrow{OP}$  ( $k \in \mathbb{R}$ ),  $|OP'| = 1$  より,

$$P' = \left( \frac{t}{\sqrt{b^2 + t^2}}, \frac{b}{\sqrt{b^2 + t^2}} \right) \quad (0 \leq t \leq a)$$

となる.

同様に辺  $b$  が出るとき, つまり  $P$  が  $AC$  上,  $P'$  が  $\widehat{A'C}$  上にあるときは,

$$P' = \left( \frac{a}{\sqrt{b^2 + t^2}}, \frac{t}{\sqrt{b^2 + t^2}} \right) \quad (0 \leq t \leq b)$$

となる.

$P'$  が  $\widehat{B'C}$  上にあるときを考える.

$f(t) = t/\sqrt{b^2 + t^2}$ ,  $g(t) = b/\sqrt{b^2 + t^2}$  とすると,

$f'(t) = -bt/(b^2 + t^2)^{3/2}$ ,  $g'(t) = b^2/(b^2 + t^2)^{3/2}$  であるから,

$$\begin{aligned} \widehat{B'C} &= \int_0^a \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt \\ &= \int_0^a \sqrt{\frac{b^2 t^2 + b^4}{(b^2 + t^2)^3}} dt \\ &= \int_0^a \frac{b}{b^2 + t^2} dt \\ &= \int_0^{\frac{a}{b}} \frac{du}{1 + u^2} \\ &= \arctan \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

同様に

$$\widehat{A'C} = \int_0^b \frac{a}{a^2 + t^2} dt = \arctan \frac{b}{a}.$$

よって

$$P_a = \frac{\widehat{B'C}}{\widehat{A'B'}} = \frac{\arctan \frac{a}{b}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{a}{b},$$

$$P_a = \frac{\widehat{A'C}}{\widehat{A'B'}} = \frac{\arctan \frac{b}{a}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{b}{a}$$

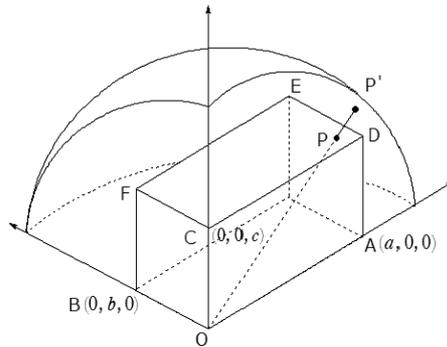
となり, 先ほどの結果と一致する.

辺  $a$ , 辺  $b$  はそれぞれ 2 つの辺を表しているので, ひとつの辺が出る確率はこれらの  $1/2$  である.

## 4.2 3次元の場合

この考察を1次元上げ、3次元の直方体を考える。

下図のように3辺の長さがそれぞれ  $a, b, c$  の直方体と、頂点  $E$  で外接する球  $O$  を考える。今回も  $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$  と仮定しても一般性は失われないので、そう仮定する。



面  $ab$  が出るということを考える。球上の任意の点  $P'$  を考えると、

$$\text{面 } ab \text{ が出る} \iff OP' \text{ が上面 } CDEF \text{ と交点 } P \text{ をもつ}$$

となる。

点  $P$  が面  $CDEF$  上にあるということは点  $P$  は  $(x, y, c)$  ( $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ ) とパラメータ表示できる。このときの  $P'$  をパラメータ表示すると2次元の場合と同様に点  $P$  を単位球に原点から投影しているの

$$P' = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + c^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + c^2}}, \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2 + c^2}} \right) \quad (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b)$$

となる。

面  $ab$  が出るときの  $P'$  が動く範囲の面積を  $S_{ab}$  とする。単位球の  $1/8$  の表面積は  $\pi/2$  より

$$P_{ab} = S_{ab}/(\pi/2)$$

である。

以下  $S_{ab}$  を計算する。

$$S_{ab} = \iint_{[0,a] \times [0,b]} \left| \frac{\partial}{\partial x} P' \times \frac{\partial}{\partial y} P' \right| dx dy$$

である。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} P' &= \left( \frac{y^2 + c^2}{(x^2 + y^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-xy}{(x^2 + y^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-xc}{(x^2 + y^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}} \right), \\ \frac{\partial}{\partial y} P' &= \left( \frac{-xy}{(x^2 + y^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{x^2 + c^2}{(x^2 + y^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-yc}{(x^2 + y^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \end{aligned}$$

より、

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} P' \times \frac{\partial}{\partial y} P' \right| = \left| \frac{1}{(x^2 + y^2 + c^2)^2} (xc, -yc, c^2) \right| = \frac{|c|}{(x^2 + y^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}}$$

である。  
以下、

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}}, \quad \textcircled{1}$$

$$\int \frac{a}{(x^2 + 1)\sqrt{a^2 + x^2 + 1}} dx = \arctan \frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2 + 1}} \quad \textcircled{2}$$

に注意して、計算する。

$$\begin{aligned} S_{ab} &= \iint_{[0,a] \times [0,b]} \left| \frac{\partial}{\partial x} P' \times \frac{\partial}{\partial y} P' \right| dx dy \\ &= \int_0^a \int_0^b \frac{|c|}{(x^2 + y^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}} dy dx \\ &= \int_0^a \int_0^{\frac{b}{c}} \frac{1/c}{((x/c)^2 + y^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} dy dx \\ &= \int_0^a \left[ \frac{(1/c)y}{((x/c)^2 + 1)\sqrt{(x/c)^2 + y^2 + 1}} \right]_0^{\frac{b}{c}} dx \quad (\because \textcircled{1} \text{より}) \\ &= \int_0^a \frac{(1/c)(b/c)}{((x/c)^2 + 1)\sqrt{(x/c)^2 + (b/c)^2 + 1}} dx \\ &= \int_0^{\frac{a}{c}} \frac{b/c}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + (b/c)^2 + 1}} dx \\ &= \arctan \frac{(b/c)(a/c)}{\sqrt{(a/c)^2 + (b/c)^2 + 1}} \quad (\because \textcircled{2} \text{より}) \\ &= \arctan \frac{ab}{c\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \end{aligned}$$

以上より、

$$P_{ab} = \frac{S_{ab}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\arctan \frac{ab}{c\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{ab}{c\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

同様に考えると、

$$P_{ab} = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{ab}{c\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$P_{bc} = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{bc}{a\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$P_{ca} = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{ca}{b\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

となる。

面  $ab$  は 2 面あるのでひとつの面が出る確率はこれらの  $1/2$  である。

### 4.3 考察

今までの確率の結果についてもう少し考えてみる.

・  $a = b = c$  としてみる.(普通のサイコロ)

$$P_{ab} = P_{bc} = P_{ca} = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

となり, 普通のサイコロの場合と一致する.

・  $c \rightarrow 0$  としてみる.(カードのようなサイコロの場合)

$$P_{ab} = 1, P_{bc} = P_{ca} = 0$$

となる.

$P_{ab} = 1$  はカードのようなサイコロは必ず表か裏がでることを表しており,  $P_{bc} = P_{ca} = 0$  はカードのようなサイコロは辺で地面に立つことはないことを表している.

・ 確率の和は 1 となる. ( $P_{ab} + P_{bc} + P_{ca} = 1$ .)

( )  $x = (\pi/2)P_{ab}$ ,  $y = (\pi/2)P_{bc}$ ,  $z = (\pi/2)P_{ca}$  とする.

$\tan x = ab/(c\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})$ ,  $\tan y = ab/(a\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})$  ( $0 \leq x, y \leq \pi/2$ ) である.

$\tan(x + y) = (\tan x + \tan y)/(1 - \tan x \tan y) = (b/ac)\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ .

よって,  $\arctan \theta + \arctan(1/\theta) = \pi/2$  を用いて,

$$\begin{aligned} x + y + z &= (\pi/2)P_{ab} + (\pi/2)P_{bc} + (\pi/2)P_{ca} \\ &= \arctan((b/ac)\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) + \arctan(ca/(b\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})) \\ &= \pi/2. \end{aligned}$$

ゆえに,  $P_{ab} + P_{bc} + P_{ca} = 1$ . ■

### 4.4 サイコロの確率に関するまとめ

今回は回転モーメントなど, 物理的な効果は考えておらず, 数学的にサイコロの確率を考えた. 例えば  $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $c = 100$  のような極端に細長いサイコロの場合でも最も小さい面  $ab$  が出る確率は計算上は  $0.00063662 \doteq 0.06\%$  がある, 投げ方にもよると思われるが実際の試行ではもう少し低い確率であると思われる. しかし, 数学的にはきれいな結果であると思う. 具体的な試行との比較については [3], p59 にある.

このように投影の手法は, サイコロの確率に関しても応用出来ることがわかった.

## 謝辞

最後になりましたが本論文の作成にあたって, 指導教員の田丸博士先生をはじめ, 先輩方には, ご多忙にもかかわらず, 助言やご指導をいただきました. この場を借りて深く御礼申し上げます.

## 参考文献

- [1] 梅原雅顕, 山田光太郎: 曲線と曲面—微分幾何的アプローチ—, 裳華房, 2002.
- [2] 田丸博士: 曲線・曲面とリーマン多様体, 広島大学 2009 年度幾何学 C・多様幾何基礎講義 A 講義資料.
- [3] 藤田岳彦: 直方体のサイコロと逆正接関数の多次元化, 数学セミナー 2008 年 12 月号, pp56–59, 日本評論社.
- [4] 藤田岳彦: 地球サイコロ, 数学セミナー 2009 年 1 月号, pp62–66, 日本評論社.

## 付録 [Maple のコマンド]

参考までに世界地図の図作成に用いた The Maple Maptools Package の Maple のコマンドを記しておく.

Maple Maptools example worksheet by: Vince Costanzo [update 09-jan-2004] を用いた. 詳しい説明などは worksheet と The Maple Maptools Package (<http://www3.villanova.edu/maple/projects/costanzo/cartto/index.htm>) にあるので各行の説明は省略する.

ここではこのパッケージは C:\local\maptools にあるものとし, Coastal point databases は Fine resolution (29883 points) を用いることにする.

### 円柱への展開による地図

```
>restart;  
>libname := libname, "C:\\local\\maptools";  
>with(maptools);  
>load("C:\\local\\maptools\\fine.m");  
>f := (x,y) -> (x, y);  
>mapplot(f, lonlat=[-180*deg..180*deg, -80*deg..80*deg], meridian_spacing=15*deg);
```

以下写像  $f$  の部分のみ記する.

### メルカトルの地図

```
>f := (x,y) -> (x, ln(tan(y/2 + Pi/4)));
```

### 正積地図

```
>f := (x,y) -> (x, sin(y));
```

### 立体射影による地図

```
>f := (x,y) -> ((2*cos(x)*cos(y))/(1-sin(y)), (2*sin(x)*cos(y))/(1-sin(y)));
```