平成21年度　卒業論文

球面と双曲空間の曲率：低次元の場合の計算

広島大学理学部数学科
B063399　松崎勝也

指導教官　田丸博士

平成22年　2月10日

目 次

1　はじめに

断面曲率が一定, すなわち定曲率空間として, n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ や n 次元球面 $\mathbb{S}^n$, n 次元実双曲空間 $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ が知られている. そこで, 本論文では球面と双曲空間の低次元の場合 ($\mathbb{S}^3$, $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ 及び $\mathbb{R}\mathrm{H}^3$) の断面曲率を, [2], [4] を参考にして実際に計算することで, それらが定曲率空間であることを示す. なお, 計算方法はリー環を用いたものである.

曲率の計算方法を簡単に記述すると次のようになる:

(1) $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$, $\mathbb{R}\mathrm{H}^3$ がリー群 (かつリーマン多様体) であることを確かめる.
(2) リー群 $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$, $\mathbb{R}\mathrm{H}^3$ のリー環を求める.
(3) 求めたリー環及び内積を用いて断面曲率を計算する.

本論文の流れをもう少し詳しく記述すると次のようになる:

(1′) $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$, $\mathbb{R}\mathrm{H}^3$ とリー群同型となる行列リー群を求める.
(2′) リー群 $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$, $\mathbb{R}\mathrm{H}^3$ のリー環とリー環同型となる行列リー環を求める.
(3′) 求めた行列リー環及び内積を用いて断面曲率を計算する.

なお, $\mathbb{R}\mathrm{H}^3$ に関しては (1′) と (2′) を省略している.

なお, 本論文は断面曲率の計算に重点を置いたため, 用いた定理などの証明を一部省略している.

2　定義

2.1　行列群

行列の成す群 (行列群) を紹介する. これらはリー群の典型的な例となっている.

定義 2.1 $M_n(\mathbb{R})$ を $n \times n$ 実行列の全体とする. このとき,
(1) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) := \{g \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(g) \neq 0\}$ を **一般線型群**,
(2) $\mathrm{O}(n) := \left\{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, {}^t g g = I_n\right\}$ を **直交群**,
(3) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) := \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(g) = 1\}$ を **特殊線型群**,
(4) $\mathrm{SO}(n) := \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(n)$ を **特殊直交群** という.
(1) は通常の行列の積に関して群を成し, (2), (3), (4) はその部分群を成す.

定義 2.2 $M_n(\mathbb{C})$ を $n \times n$ 複素行列の全体とする. このとき,
(1) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) := \{g \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det(g) \neq 0\}$ を **複素一般線型群**,
(2) $\mathrm{U}(n) := \left\{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \,\middle|\, {}^t \bar{g} g = I_n\right\}$ を **ユニタリ群**,
(3) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) := \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \det(g) = 1\}$ を **複素特殊線型群**,
(4) $\mathrm{SU}(n) := \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{U}(n)$ を **特殊ユニタリ群** という.
(1) は通常の行列の積に関して群を成し, (2), (3), (4) はその部分群を成す.

注意 2.3 I_n は $n \times n$ 単位行列である. なお, 以後, 次のように略記することがある:
- $I = I_n$,
- $M_n = M_n(\mathbb{R}), M_n(\mathbb{C})$,
- $\mathrm{GL} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

2.2 四元数

定義 2.4 i を虚数単位とし, 集合 $\mathbb{H}$ を次のように定義する:

$$\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} a+id & -b-ic \\ b-ic & a-id \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \,\middle|\, a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}.$$

このとき, $\mathbb{H}$ の元を **四元数** という.

注意 2.5 $\mathbb{H}$ は次のように表すことができる:

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \right\}.$$

定義 2.6 四元数 $\mathbf{1}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ を次のように定義する:

$$\mathbf{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{i} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{j} := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{k} := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

注意 2.7 四元数 $\mathbf{1}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ は次を満たす:
(1) $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -\mathbf{1}$,
(2) $\mathbf{i} = \mathbf{jk} = -\mathbf{kj}$, $\mathbf{j} = \mathbf{ki} = -\mathbf{ik}$, $\mathbf{k} = \mathbf{ij} = -\mathbf{ji}$.

注意 2.8 $\mathbb{H}$ は実線型空間であり, $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ が基底になる. したがって, 四元数は, $a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ と一意的に表すことができる. これを $\mathbf{1}$ を省略して $a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ とかくこともある.

定義 2.9 $\mathbb{H}$ の部分集合 $Sp(1)$ を次のように定義する:

$$Sp(1) := \left\{ a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \mathbb{H} \,\middle|\, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \right\}.$$

このとき, $Sp(1)$ の元を **単位四元数** という.

2.3 行列の指数写像

定義 2.10 $X \in M_n$ に対して, 次の e^X を行列 X の **指数** という:

$$e^X := I + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{X^m}{m!}.$$

注意 2.11 行列の自然なノルムにより右辺は絶対収束する.

定義 2.12 $\exp : M_n \to M_n : X \mapsto e^X$ を行列の **指数写像** という.

注意 2.13 実際には, 指数写像 exp は GL への写像になる. (後述: 注意 3.4)

2.4　接ベクトルと接空間

定義 2.14 $I \subset \mathbb{R}$ を開区間とし, $S \subset M_n$ とする.

(1) 連続写像 $I \to S$ を S 上の **道** という.

(2) S 上の道 $A : I \to S : t \mapsto (a_{ij}(t))$ が S 上の **なめらかな道** とは, 各 a_{ij} が微分可能であること.

(3) $A' : I \to M_n : t \mapsto \dfrac{d}{dt}A(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t}$ を A の **導関数** という.

注意 2.15 $A = (a_{ij}(t))$ に対して, 定義より明らかに $A'(t) = (a'_{ij}(t))$.

定義 2.16 G を GL の部分群とする.

(1) $X \in M_n$ が G の単位元 I における **接ベクトル** とは, 次が成り立つこと:

$$\exists A : G \text{ 上のなめらかな道} : A(0) = I, A'(0) = X.$$

(2) 次の $T_I G$ を G の単位元 I における **接空間** という:

$$T_I G := \{\, X \in M_n \mid X : G \text{ の単位元 } I \text{ における接ベクトル} \,\}.$$

2.5　リー群と行列リー群

リー群, 行列リー群及びリー群の同型を定義する. なお, ここでは多様体とは C^∞-多様体を意味するものとする.

定義 2.17 群かつ多様体である G が **リー群** とは, 次が成り立つこと:

(1) 積の操作 $G \times G \to G : (g, h) \mapsto gh$ が C^∞-写像,

(2) 逆元の操作 $G \to G : g \mapsto g^{-1}$ が C^∞-写像.

定義 2.18 GL の部分群 G が **行列リー群** とは, 次が成り立つこと:

$$\{A_n\} \subset G, \lim_{n\to\infty} A_n = A \in \mathrm{GL} \Rightarrow A \in G.$$

注意 2.19 行列リー群はリー群である.

定義 2.20 G, H をリー群とする. C^∞-写像 $\Phi : G \to H$ が **準同型** とは, 次が成り立つこと: $\forall g, h \in G, \Phi(gh) = \Phi(g)\Phi(h)$. また, C^∞-同相な準同型写像を **同型写像** といい, G と H の間に同型写像が存在するとき, G と H は **同型** という.

2.6 リー環と行列リー環

リー環及びリー環の同型を定義する. また, リー群や行列リー群があれば, リー環を作ることができる. ここでは, そのリー群及び行列リー群に付随するリー環を定義する.

定義 2.21 $\mathfrak{g}$ を実線型空間とする. 双線型写像 $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ が **bracket 積** とは, 次が成り立つこと:

(1) $[X, Y] = -[Y, X]$.
(2) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

また, bracket 積をもつ実線型空間を **リー環** という.

定義 2.22 次は, $[X, Y] := XY - YX$ によってリー環の構造をもつ:

(1) $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) := M_n(\mathbb{R})$ を **一般線型リー環**,
(2) $\mathfrak{o}(n) := \left\{ X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, X + {}^tX = 0 \right\}$ を **直交リー環**,
(3) $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) := \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$ を **特殊線型リー環** という.

定義 2.23 次も, $[X, Y] := XY - YX$ によってリー環の構造をもつ:

(1) $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) := M_n(\mathbb{C})$ を **複素一般線型リー環**,
(2) $\mathfrak{u}(n) := \left\{ X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \,\middle|\, X + {}^t\overline{X} = 0 \right\}$ を **ユニタリリー環**,
(3) $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) := \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$ を **複素特殊線型リー環**,
(4) $\mathfrak{su}(n) := \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \cap \mathfrak{u}(n)$ を **特殊ユニタリリー環** という.

定義 2.24 G をリー群とする.

(1) $a \in G$ に対して, $L_a : G \to G : g \mapsto ag$ を a による **左移動** という.
(2) G 上のベクトル場 X が **左不変** とは, 次が成り立つこと: $\forall a \in G, dL_a \circ X = X \circ L_a$.
(3) $\mathrm{Lie}(G) := \{G$ 上の左不変ベクトル場$\}$ にベクトル場の bracket 積 $[X, Y] := X \circ Y - Y \circ X$ を入れたものはリー環になる. これを **リー群 G のリー環** という.

定義 2.25 G を行列リー群とする. 接空間 $T_I G$ に bracket 積 $[X, Y] := XY - YX$ を入れたものはリー環になる. これを **行列リー群 G の行列リー環** という.

定義 2.26 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ をリー環とする. 線型写像 $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ が **準同型** とは, 次が成り立つこと: $\forall X, Y \in \mathfrak{g}, \varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)]$. また, 全単射な準同型写像を **同型写像** といい, $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{h}$ の間に同型写像が存在するとき, $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{h}$ は **同型** という.

2.7 断面曲率

断面曲率及び, それを定義するのに必要な事項を定義する. なお, ここでは $\mathfrak{g}$ を bracket 積 $[\cdot,\cdot]$ 及び内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ をもつ 2 次元以上の線型空間, すなわち 2 次元以上のリー環かつ内積空間とする.

定義 2.27 $\nabla : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} : (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ が **Levi-Civita 接続** とは, 次が成り立つこと:

$$2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \langle [X, Y], Z\rangle + \langle [Z, X], Y\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle.$$

また, Levi-Civita 接続を求めるために, 次を満たす対称双線型写像 $U : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を定義する:

$$2\langle U(X, Y), Z\rangle = \langle [Z, X], Y\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle.$$

この U を用いると Levi-Civita 接続は次のように表せる:

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y] + U(X, Y).$$

定義 2.28 次で定義される $R : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} : (X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z$ を **リーマン曲率** という:

$$R(X, Y)Z := \nabla_{[X,Y]} Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z.$$

定義 2.29 $\mathfrak{g}$ の 2 次元部分空間 σ の **断面曲率** K_σ を σ の正規直交基底 $\{X, Y\}$ を用いて次のように定義する: $K_\sigma := \langle R(X, Y)X, Y\rangle$. また, 断面曲率が一定になるものを **定曲率空間** という.

注意 2.30 断面曲率 K_σ の well-defined 性, つまり σ の正規直交基底の取り方に依らないことは系 3.10 で示す.

3 準備

断面曲率を求めるのに便利な命題・定理を紹介する.

3.1 線型代数からの準備

まず, 線型代数の基本的な命題を紹介する.

命題 3.1 $X \in M_n(\mathbb{C})$ とし, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ を X の固有値とする. このとき, 次が成り立つ:

(1) $\exists U \in \mathrm{U}(n) : U^{-1}XU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ (行列の 3 角化),

(2) $\mathrm{tr}(X) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

命題 3.2 $\{X_1, \ldots, X_n\}$ を内積空間 $\mathfrak{g}$ の正規直交基底とする. このとき, 次が成り立つ:

(1) $\forall A \in \mathfrak{g}, A = \sum_{i=1}^{n} \langle A, X_i\rangle X_i$,

(2) $A := \sum_{i=1}^{n} a_i X_i,\ B := \sum_{i=1}^{n} b_i X_i \in \mathfrak{g}$ に対して, $\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

証明. (1) 任意に $A \in \mathfrak{g}$ をとる. $\{X_1, \ldots, X_n\}$ は基底なので,

$$\exists a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} : A = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i.$$

各 $j \in \{1, \ldots, n\}$ に対して, $a_j = a_j\langle X_j, X_j\rangle = \langle a_j X_j, X_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} a_i X_i, X_j\rangle = \langle A, X_j\rangle$. したがって,

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i = \sum_{i=1}^{n} \langle A, X_i\rangle X_i.$$

(2) $\{X_1, \ldots, X_n\}$ が正規直交基底より明らか. □

3.2 指数写像の性質

命題 3.3 $X, Y \in M_n$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $XY = YX \Rightarrow e^{X+Y} = e^X e^Y$,

(2) $\det(e^X) = e^{\mathrm{tr}(X)}$,

(3) $\dfrac{d}{du} e^{uX} = X e^{uX}$.

証明. (1) $XY = YX$ のとき, 次が成り立つから:

$$(X+Y)^m = X^m + \binom{m}{1} X^{m-1} Y + \cdots + \binom{m}{l} X^{m-l} Y^l + \cdots + Y^m.$$

(2) 簡単のため $X \in M_2$ に対して示す. X の固有値を $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ とおく. 命題 3.1(1) より,

$$\exists U \in \mathrm{U}(2) : U^{-1} X U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

よって, $X = U\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}U^{-1}$ だから,

$$\begin{aligned}
e^X &= I + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{X^m}{m!} \\
&= I + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}\left[U\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}U^{-1}\right]^m \\
&= I + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}U\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}^m U^{-1} \\
&= I + U\left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}\begin{pmatrix}\lambda_1^m & * \\ 0 & \lambda_2^m\end{pmatrix}\right]U^{-1} \\
&= U\left[I + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}\begin{pmatrix}\lambda_1^m & * \\ 0 & \lambda_2^m\end{pmatrix}\right]U^{-1} \\
&= U\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & * \\ 0 & e^{\lambda_2}\end{pmatrix}U^{-1}.
\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}
\det\left(e^X\right) &= \det(U)\det\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & * \\ 0 & e^{\lambda_2}\end{pmatrix}\det(U^{-1}) \qquad (\because \det \text{の性質}) \\
&= e^{\lambda_1}e^{\lambda_2} \qquad (\because \det(U)\det(U^{-1}) = 1) \\
&= e^{\lambda_1+\lambda_2} \\
&= e^{\mathrm{tr}(X)}. \qquad (\because \text{命題 } 3.1(2))
\end{aligned}$$

(3) 任意の u に対して, 次が成り立つ:

① $$\begin{aligned}
\frac{e^{(u+\Delta u)X} - e^{uX}}{\Delta u} &= \frac{1}{\Delta u}\left[\left(I + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{((u+\Delta u)X)^m}{m!}\right) - \left(I + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(uX)^m}{m!}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\Delta u}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{((u+\Delta u)X)^m}{m!} - \frac{(uX)^m}{m!}\right] \\
&= \frac{1}{\Delta u}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{X^m}{m!}\left[(u+\Delta u)^m - u^m\right] \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{X^m}{m!}\frac{1}{\Delta u}\left[(u+\Delta u)^m - u^m\right],
\end{aligned}$$

② $\displaystyle\lim_{\Delta u \to 0}\frac{1}{\Delta u}\left[(u+\Delta u)^m - u^m\right] = mu^{m-1}.$

よって,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du}e^{uX} &= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{e^{(u+\Delta u)X} - e^{uX}}{\Delta u} \\
&= \lim_{\Delta u \to 0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{X^m}{m!} \frac{1}{\Delta u} \left[(u+\Delta u)^m - u^m \right] \qquad (\because ①) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{X^m}{m!} \lim_{\Delta u \to 0} \frac{1}{\Delta u} \left[(u+\Delta u)^m - u^m \right] \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{X^m}{m!} m u^{m-1} \qquad (\because ②) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u^{m-1} X^m}{(m-1)!} \\
&= X + X \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(uX)^{m-1}}{(m-1)!} \\
&= X \left(I + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(uX)^m}{m!} \right) \\
&= X e^{uX}.
\end{aligned}$$

□

注意 3.4 $X(-X) = (-X)X$ より, (1) から, $e^X e^{-X} = e^{X-X} = e^O = I$ なので, e^X は逆行列 e^{-X} をもつ. すなわち, $\exp(X) = e^X \in \mathrm{GL}$. したがって, 指数写像 exp は $\mathfrak{gl}(= M_n)$ から GL への写像になる.

3.3 リー群のリー環

一般に, リー群 G に対して, G のリー環 $\mathrm{Lie}(G)$ と G の単位元 e における接空間 T_eG は線型同型である. このことから, $\mathrm{Lie}(G)$ と T_eG を同一視することができる ([4]). したがって, 本論文では, 行列リー群 G に対して, $\mathrm{Lie}(G)$ と T_IG を同一視することにする.

例 3.5 Lie(GL) と $\mathfrak{gl}$ はリー環として同型.

証明. $T_I(\mathrm{GL}) = \mathfrak{gl}$ を示す. ($\subset$) は明らかなので, ($\supset$) のみ示す. 任意に $X \in \mathfrak{gl}$ をとる. 示すことは

$$\exists A : \text{GL 上のなめらかな道} : A(0) = I, A'(0) = X$$

である. 注意 3.4 より, $A : \mathbb{R} \to \mathrm{GL} : u \mapsto e^{uX}$ は GL 上のなめらかな道になる. また, 命題 3.3(3) より, $A(0) = e^O = I$, $A'(0) = Xe^O = X$. したがって, $X \in T_I(\mathrm{GL})$.

よって, $\mathrm{Lie(GL)} \cong T_I(\mathrm{GL}) = \mathfrak{gl}$. □

3.4　曲率の性質

Levi-Civita 接続 ∇, リーマン曲率 R の性質を調べる．そして最後に断面曲率の well-defined 性を確かめる．

命題 3.6 Levi-Civita 接続 ∇ は次を満たす:

(1) $\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X, Y]$,

(2) $\langle \nabla_X Y, Z \rangle = -\langle \nabla_X Z, Y \rangle$.

証明. (1)

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \frac{1}{2}[X, Y] + U(X, Y)\\ &= -\frac{1}{2}[Y, X] + U(Y, X)\\ &= \frac{1}{2}[Y, X] + U(Y, X) - [Y, X]\\ &= \nabla_Y X + [X, Y].\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}2\langle \nabla_X Y, Z \rangle &= \langle [X, Y], Z \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle\\ &= -\langle [Y, X], Z \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle\\ &= -(\langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, X], Z \rangle + \langle X, [Y, Z] \rangle)\\ &= -2\langle \nabla_X Z, Y \rangle.\end{aligned}$$

□

命題 3.7 Levi-Civita 接続 ∇ は双線型性をもつ．すなわち, 次が成り立つ:

(1) $\nabla_{a_1 X_1 + a_2 X_2} Y = a_1 \nabla_{X_1} Y + a_2 \nabla_{X_2} Y$,

(2) $\nabla_X (a_1 Y_1 + a_2 Y_2) = a_1 \nabla_X Y_1 + a_2 \nabla_X Y_2$.

証明. U と $[\cdot, \cdot]$ の双線型性から容易にわかる． □

命題 3.8 リーマン曲率 R は次を満たす:

(1) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$,

(2) $R(X, X)Z = 0$,

(3) $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(X, Y)W, Z \rangle$,

(4) $\langle R(X, Y)Z, Z \rangle = 0$.

証明. (1)

$$\begin{aligned}R(X, Y)Z &= \nabla_{[X,Y]} Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z\\ &= \nabla_{-[Y,X]} Z + \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z\\ &= -(\nabla_{[Y,X]} Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_X \nabla_Y Z)\\ &= -R(Y, X)Z.\end{aligned}$$

(2) (1) より明らか.

(3) 命題 3.6(2) を用いて,

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z,W\rangle &= \langle \nabla_{[X,Y]}Z,W\rangle - \langle \nabla_X\nabla_Y Z,W\rangle + \langle \nabla_Y\nabla_X Z,W\rangle \\ &= -\langle \nabla_{[X,Y]}W,Z\rangle + \langle \nabla_X W,\nabla_Y Z\rangle - \langle \nabla_Y W,\nabla_X Z\rangle \\ &= -\langle \nabla_{[X,Y]}W,Z\rangle - \langle Z,\nabla_Y\nabla_X W\rangle + \langle Z,\nabla_X\nabla_Y W\rangle \\ &= -(\langle \nabla_{[X,Y]}W,Z\rangle - \langle \nabla_X\nabla_Y W,Z\rangle + \langle \nabla_Y\nabla_X W,Z\rangle) \\ &= -\langle R(X,Y)W,Z\rangle.\end{aligned}$$

(4) (3) より明らか. □

命題 3.9 リーマン曲率 R は多重線型性をもつ. すなわち, 次が成り立つ:

(1) $R(a_1X_1+a_2X_2,Y)Z = a_1R(X_1,Y)Z + a_2R(X_2,Y)Z$,
(2) $R(X,a_1Y_1+a_2Y_2)Z = a_1R(X,Y_1)Z + a_2R(X,Y_2)Z$,
(3) $R(X,Y)(a_1Z_1+a_2Z_2) = a_1R(X,Y)Z_1 + a_2R(X,Y)Z_2$.

証明. (1)

$$\begin{aligned}&R(a_1X_1+a_2X_2,Y)Z \\ &= \nabla_{[a_1X_1+a_2X_2,Y]}Z - \nabla_{a_1X_1+a_2X_2}\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_{a_1X_1+a_2X_2}Z \\ &= \nabla_{a_1[X_1,Y]+a_2[X_2,Y]}Z - a_1\nabla_{X_1}\nabla_Y Z - a_2\nabla_{X_2}\nabla_Y Z + a_1\nabla_Y\nabla_{X_1}Z + a_2\nabla_Y\nabla_{X_2}Z \\ &= a_1\nabla_{[X_1,Y]}Z + a_2\nabla_{[X_2,Y]}Z - a_1\nabla_{X_1}\nabla_Y Z - a_2\nabla_{X_2}\nabla_Y Z + a_1\nabla_Y\nabla_{X_1}Z + a_2\nabla_Y\nabla_{X_2}Z \\ &= a_1(\nabla_{[X_1,Y]}Z - \nabla_{X_1}\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_{X_1}Z) + a_2(\nabla_{[X_2,Y]}Z - \nabla_{X_2}\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_{X_2}Z) \\ &= a_1R(X_1,Y)Z + a_2R(X_2,Y)Z.\end{aligned}$$

(2) (1) と命題 3.8(1) から容易にわかる.
(3) ∇ の双線型性から容易にわかる. □
断面曲率 K_σ が σ の正規直交基底の取り方に依らないことは, 次から保証される:

系 3.10 $\{X,Y\}$ と $\{X',Y'\}$ をともに $\mathfrak{g}$ の 2 次元部分空間 σ の正規直交基底とする. このとき, 次が成り立つ:

$$\langle R(X,Y)X,Y\rangle = \langle R(X',Y')X',Y'\rangle.$$

証明. $\{X,Y\}$ は基底だから,

$$\exists a_1,a_2,b_1,b_2 \in \mathbb{R} : X' = a_1X + a_2Y, Y' = b_1X + b_2Y.$$

さらに, $\{X,Y\}$ と $\{X',Y'\}$ は正規直交基底なので,

① $0 = \langle X',Y'\rangle = a_1b_1 + a_2b_2$,
② $1 = \langle X',X'\rangle = a_1^2 + a_2^2$,
③ $1 = \langle Y',Y'\rangle = b_1^2 + b_2^2$.

ここで, $(a_1b_2 - a_2b_1)^2 = 1$ を示す.

$$\begin{aligned}(a_1b_2 - a_2b_1)^2 &= a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2 \\ &= a_1^2b_2^2 + 2a_1^2b_1^2 + a_2^2b_1^2 \qquad (\because ①) \\ &= a_1^2(b_2^2 + b_1^2) + b_1^2(a_1^2 + a_2^2) \\ &= a_1^2 + b_1^2. \qquad (\because ②, ③)\end{aligned}$$

また, $\langle X, X' \rangle = a_1$, $\langle X, Y' \rangle = b_1$ なので, 命題 3.2(1) より, $X = a_1X' + b_1Y'$. よって,

$$1 = \langle X, X \rangle = \langle a_1X' + b_1Y', a_1X' + b_1Y' \rangle = a_1^2 + b_1^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2.$$

次に $R(X', Y')X'$ を計算する.

$$\begin{aligned}R(X', Y')X' &= a_1R(X, Y')X' + a_2R(Y, Y')X' \\ &= a_1b_2R(X, Y)X' + a_2b_1R(Y, X)X' \\ &= a_1^2b_2R(X, Y)X + a_1a_2b_2R(X, Y)Y + a_1a_2b_1R(Y, X)X + a_2^2b_1R(Y, X)Y \\ &= (a_1^2b_2 - a_1a_2b_1)R(X, Y)X + (a_1a_2b_2 - a_2^2b_1)R(X, Y)Y.\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}&\langle R(X', Y')X', Y' \rangle \\ &\quad = \langle (a_1^2b_2 - a_1a_2b_1)R(X, Y)X + (a_1a_2b_2 - a_2^2b_1)R(X, Y)Y, Y' \rangle \\ &\quad = (a_1^2b_2 - a_1a_2b_1)\langle R(X, Y)X, Y' \rangle + (a_1a_2b_2 - a_2^2b_1)\langle R(X, Y)Y, Y' \rangle \\ &\quad = b_2(a_1^2b_2 - a_1a_2b_1)\langle R(X, Y)X, Y \rangle + b_1(a_1a_2b_2 - a_2^2b_1)\langle R(X, Y)Y, X \rangle \\ &\quad = \{b_2(a_1^2b_2 - a_1a_2b_1) - b_1(a_1a_2b_2 - a_2^2b_1)\}\langle R(X, Y)X, Y \rangle \\ &\quad = (a_1b_2 - a_2b_1)^2\langle R(X, Y)X, Y \rangle \\ &\quad = \langle R(X, Y)X, Y \rangle. \qquad (\because (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = 1)\end{aligned}$$

□

4 双曲平面

この節では, 双曲平面 $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ の断面曲率を求める.

4.1 リー群 $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$

双曲平面 $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ がリー群であることを示す. さらに, ある行列リー群と同型になることを示す.

定義 4.1 $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y > 0 \right\}$ を **双曲平面** という.

注意 4.2 $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ は $\mathbb{R}^2$ の開部分集合であるから, (2 次元) 多様体構造が定まる. さらに, リーマン計量 $g = (1/y^2)(dx^2 + dy^2)$ を入れることによりリーマン多様体になる.

命題 4.3 $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ に次の積を入れるとリー群になる: $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 + y_1 x_2, y_1 y_2)$.

証明. 多様体になることは確認したので, 上で定義した積に関して群を成すことを示す. 積に関して閉じていることは明らか. 結合則を確認する. 任意の $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ に対して,

$$\begin{aligned}((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3) &= (x_1 + y_1 x_2, y_1 y_2) \cdot (x_3, y_3) \\ &= (x_1 + y_1 x_2 + y_1 y_2 x_3, y_1 y_2 y_3) \\ &= (x_1, y_1) \cdot (x_2 + y_2 x_3, y_2 y_3) \\ &= (x_1, y_1) \cdot ((x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3)).\end{aligned}$$

また, 次から単位元 $(0, 1) \in \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ が存在する: 任意の $(x, y) \in \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ に対して,

$$(0, 1) \cdot (x, y) = (x, y) = (x, y) \cdot (0, 1).$$

最後に, 逆元の存在を示す. 任意に $(x, y) \in \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ をとる. 次から $(-xy^{-1}, y^{-1}) \in \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ が (x, y) の逆元になる:

$$(-xy^{-1}, y^{-1}) \cdot (x, y) = (0, 1) = (x, y) \cdot (-xy^{-1}, y^{-1}).$$

以上から, $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ は上で定義した積に関して群を成す. 積と逆元の操作が C^∞-級であることは明らか. したがって, $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ はリー群. □

命題 4.4 $M := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a > 0 \right\}$ は行列リー群.

証明. まず, M が $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の部分群になることを確かめる. 積に関して閉じていることだけ示す. 任意の $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & a_2^{-1} \end{pmatrix} \in M$ に対して,

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & a_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 a_2^{-1} \\ 0 & (a_1 a_2)^{-1} \end{pmatrix} \in M.$$

したがって, M は積に関して閉じている.

次に, M が行列リー群になることを示す. $\{A_n\} \subset M$, $\lim_{n\to\infty} A_n = A \in \mathrm{GL}$ とする. 示すことは $A \in M$ である. $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 0 & a_n^{-1} \end{pmatrix} \in M$ とおく.

- $A_n \in M$ より, $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$.
- $\lim_{n\to\infty} A_n = A \in \mathrm{GL}$ より, $\{a_n\}$, $\{a_n^{-1}\}$, $\{b_n\}$ は収束する.

したがって, $\{a_n\}$ と $\{a_n^{-1}\}$ がともに収束することから, $\{a_n\}$ は 0 には収束しないことに注意すると,

$$\exists a > 0, b \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

よって, $A = \lim_{n\to\infty} A_n = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in M$. □

命題 4.5 $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ と M はリー群として同型.

証明. 次の Φ がリー群の同型写像になることを確認する:

$$\Phi : M \to \mathbb{R}\mathrm{H}^2 : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mapsto (ab, a^2).$$

この Φ が C^∞-級であることは明らか. 群としての積を保つことを示す. 任意の $X := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1^{-1} \end{pmatrix}$, $Y := \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & a_2^{-1} \end{pmatrix} \in M$ に対して,

$$\begin{aligned}
\Phi(XY) &= \Phi(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & a_2^{-1} \end{pmatrix}) \\
&= \Phi(\begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 + b_1a_2^{-1} \\ 0 & (a_1a_2)^{-1} \end{pmatrix}) \\
&= (a_1^2a_2b_2 + a_1b_1, a_1^2a_2^2) \\
&= (a_1b_1, a_1^2) \cdot (a_2b_2, a_2^2) \\
&= \Phi(X) \cdot \Phi(Y).
\end{aligned}$$

したがって, Φ は群としての積を保つ.

また,

$$\Psi : \mathbb{R}\mathrm{H}^2 \to M : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix}$$

と定めると, これは明らかに Φ の逆写像であり, C^∞-級. したがって, Φ は C^∞-同相であり, リー群の同型写像. 以上から, 題意が示された. □

4.2 $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ のリー環

双曲平面 $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ のリー環を求める.

補題 4.6 $T_IM = \mathrm{span}_\mathbb{R}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}\right\}$.

証明. まず $(\subset)$ を示す. 任意に $X \in T_IM$ をとる. X は M の I における接ベクトルだから,

$$\exists A : M \text{ 上のなめらかな道} : A(0) = I, A'(0) = X.$$

$A(u) = \begin{pmatrix} x(u) & y(u) \\ 0 & x(u)^{-1} \end{pmatrix}$ とおく. すると, $A'(u) = \begin{pmatrix} x'(u) & y'(u) \\ 0 & -x(u)^{-2}x'(u) \end{pmatrix}$. $A(0) = I$ より, $x(0) = 1$ なので,

$$X = A'(0) = \begin{pmatrix} x'(0) & y'(0) \\ 0 & -x'(0) \end{pmatrix} \in \mathrm{span}_\mathbb{R}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}\right\}.$$

次に $(\supset)$ を示す．任意に $X := \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} \in \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \right\}$ をとる．示すことは

$$\exists A : M \text{ 上のなめらかな道} : A(0) = I, A'(0) = X$$

である．

claim $\forall u \in \mathbb{R}, e^{uX} \in M$ を示す．任意に $u \in \mathbb{R}$ をとる．

$$\begin{aligned} e^{uX} &= I + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(uX)^m}{m!} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + ua + \frac{(ua)^2}{2!} + \frac{(ua)^3}{3!} + \cdots & \frac{b}{a}\left[ua + \frac{(ua)^3}{3!} + \frac{(ua)^5}{5!} + \cdots\right] \\ 0 & 1 - ua + \frac{(ua)^2}{2!} - \frac{(ua)^3}{3!} + \cdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ua)^m}{m!} & \frac{b}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ua)^{2m+1}}{(2m+1)!} \\ 0 & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-ua)^m}{m!} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{ua} & \frac{b}{a}\sinh(ua) \\ 0 & e^{-ua} \end{pmatrix} \in M. \blacksquare \end{aligned}$$

claim より，$A : \mathbb{R} \to M : u \mapsto e^{uX}$ は M 上のなめらかな道になる．また，命題 3.3(3) より，$A(0) = e^O = I$, $A'(0) = Xe^O = X$. したがって，$X \in T_I M$. $\square$

命題 4.7 $\mathrm{Lie}(M)$ と $\mathrm{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \right\}$ はリー環として同型.

証明. $\mathrm{Lie}(M) \cong T_I M = \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \right\}$. $\square$

注意 4.8 以後，$X := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Y := \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$ とおく．また，$\mathrm{Lie}(M)$ には bracket 積 $[U, V] = UV - VU$ が入るので，

$$[X, Y] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -X.$$

bracket 積は双線型性をもつので，上の bracket だけわかれば十分である．

以上をまとめて，次を得る．

命題 4.9 次の $(\mathrm{H}(2), [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ は $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ のリー環と同型:
線型空間 $\mathrm{H}(2) := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{X, Y\}$ に対して，$\{X, Y\}$ が正規直交基底になるような内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ と，次を満たす bracket 積 $[\cdot,\cdot]$ を入れたもの: $[X, Y] = -X$.

4.3　$\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ の断面曲率

リー環 $(\mathrm{H}(2), [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を用いて双曲平面 $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ の断面曲率を計算する.

補題 4.10 リー環 $(\mathrm{H}(2), [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $U(X,X) = Y$,
(2) $U(Y,Y) = 0$,
(3) $U(Y,X) = -(1/2)X$.

証明. $U(X,X) = Y$ のみ示す.

- $\langle U(X,X), X\rangle = (1/2)(\langle [X,X], X\rangle + \langle X, [X,X]\rangle) = 0$.
- $\langle U(X,X), Y\rangle = (1/2)(\langle [Y,X], X\rangle + \langle X, [Y,X]\rangle) = \langle X, X\rangle = 1$.

したがって, 命題 3.2(1) より $U(X,X) = Y$. その他も同様に確かめることができる. □

補題 4.11 リー環 $(\mathrm{H}(2), [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $\nabla_X X = Y$,
(2) $\nabla_Y = 0$.

証明. bracket 積の定義及び補題 4.10 から簡単な計算により確かめることができる. □

補題 4.12 リー環 $(\mathrm{H}(2), [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ に対して, 次が成り立つ:

$$R(X,Y)X = -Y.$$

証明. $R(X,Y)X = \nabla_{[X,Y]}X - \nabla_X\nabla_Y X + \nabla_Y\nabla_X X = \nabla_{-X}X = -\nabla_X X = -Y$. □

定理 4.13 $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ の断面曲率は -1.

証明. $\mathrm{H}(2)$ の任意の 2 次元部分空間 σ をとる. $\{X, Y\}$ は σ の正規直交基底になるから,

$$K_\sigma = \langle R(X,Y)X, Y\rangle = \langle -Y, Y\rangle = -1.$$

□

5　3 次元球面

この節では, 3 次元球面 $\mathbb{S}^3$ の断面曲率を求める.

5.1　リー群 $\mathbb{S}^3$

3 次元球面 $\mathbb{S}^3$ がリー群とみなせることを示す.

定義 5.1 $\mathbb{S}^3 := \left\{ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, a^2+b^2+c^2+d^2 = 1 \right\}$ を <u>**3 次元球面**</u>という.

注意 5.2 $\mathbb{S}^3$ は 3 次元多様体であり, リーマン計量 $g = dx^2 + dy^2 + dz^2$ を入れることによりリーマン多様体になる.

注意 5.3 $\mathbb{S}^3$ は次の対応関係により $Sp(1)$ と同一視できる:

$$\mathbb{S}^3 \ni (a,b,c,d) \longleftrightarrow a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in Sp(1).$$

補題 5.4 $Sp(1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \,\middle|\, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$.

証明.

$$\begin{aligned} Sp(1) &= \left\{ a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \mathbb{H} \,\middle|\, a^2+b^2+c^2+d^2 = 1 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a+id & -b-ic \\ b-ic & a-id \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \,\middle|\, a^2+b^2+c^2+d^2 = 1 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \,\middle|\, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}. \end{aligned}$$

□

この補題を用いて次を示す.

命題 5.5 $Sp(1) = \mathrm{SU}(2)$.

証明. まず $(\subset)$ を示す. 任意に $x := \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in Sp(1)$ をとる. $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ なので,

- $\det(x) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$,
- ${}^t\overline{x}x = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \beta \\ -\overline{\beta} & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 & 0 \\ 0 & |\alpha|^2 + |\beta|^2 \end{pmatrix} = I_2$.

よって, $x \in \mathrm{SU}(2)$.

次に $(\supset)$ を示す. 任意に $x := \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2)$ をとる. α, β, γ, δ は次を満たす:

- $\alpha\delta + \beta\gamma = 1$,
- $|\alpha|^2 + |\gamma|^2 = |\beta|^2 + |\delta|^2 = 1$,
- $-\overline{\alpha}\beta + \overline{\gamma}\delta = 0$.

したがって,

- $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}\alpha\delta + \overline{\alpha}\beta\gamma = |\alpha|^2\delta + \overline{\gamma}\delta\gamma = (|\alpha|^2 + |\gamma|^2)\delta = \delta$,
- $\overline{\gamma} = \overline{\gamma}\alpha\delta + \overline{\gamma}\beta\gamma = \alpha\overline{\alpha}\beta + |\gamma|^2\beta = (|\alpha|^2 + |\gamma|^2)\beta = \beta$.

すなわち,

- $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = |\alpha|^2 + |\gamma|^2 = 1$,
- $x = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

よって, $x \in Sp(1)$. □

命題 5.6 SU(2) は行列リー群.

証明. $\{A_n\} \subset \mathrm{SU}(2)$, $\lim_{n\to\infty} A_n = A \in \mathrm{GL}$ とする. 示すことは $A \in \mathrm{SU}(2)$ なので, 次の 2 つを示せばよい: ① $\det(A) = 1$, ② ${}^t\overline{A}A = I_2$.

- $A_n \in \mathrm{SU}(2)$ より, $\det(A_n) = 1$, ${}^t\overline{A_n}A_n = I_2$.
- $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ より, $\lim_{n\to\infty} {}^t\overline{A_n} = {}^t\overline{\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)} = {}^t\overline{A}$. (収束する.)

したがって,

① $\det(A) = \det\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \det(A_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$,

② ${}^t\overline{A}A = \left(\lim_{n\to\infty} {}^t\overline{A_n}\right)\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} {}^t\overline{A_n}A_n = \lim_{n\to\infty} I_2 = I_2$.

□

SU(2) は行列リー群 (リー群) であるから, $\mathbb{S}^3$ はリー群とみなせる.

5.2 $\mathbb{S}^3$ のリー環

3 次元球面 $\mathbb{S}^3$ のリー環を求める.

補題 5.7 $T_I(\mathrm{SU}(2)) = \mathfrak{su}(2)$.

証明. まず $(\subset)$ を示す. 任意に $X \in T_I(\mathrm{SU}(2))$ をとる. 示すことは $\mathrm{tr}(X) = 0$, $X + {}^t\overline{X} = O$ である. X は SU(2) の I における接ベクトルだから,

$$\exists A : \mathrm{SU}(2) \text{ 上のなめらかな道} : A(0) = I, A'(0) = X.$$

$A(u) = \begin{pmatrix} \alpha(u) & \beta(u) \\ \gamma(u) & \delta(u) \end{pmatrix}$ とおく. すると, $A(0) = I$ なので,

- $\alpha(0) = \delta(0) = 1$,
- $\beta(0) = \gamma(0) = 0$.

また,

$$X = A'(0) = \begin{pmatrix} \alpha'(0) & \beta'(0) \\ \gamma'(0) & \delta'(0) \end{pmatrix}.$$

$A(u) \in \mathrm{SU}(2)$ なので,

$$① \det(A(u)) = 1, \qquad ② {}^t\overline{A(u)}A(u) = I.$$

claim1 $\mathrm{tr}(X)=0$ を示す. ① より,

$$\alpha(u)\delta(u)-\beta(u)\gamma(u)=1.$$

両辺を微分すると,

$$\alpha'(u)\delta(u)+\alpha(u)\delta'(u)-\beta'(u)\gamma(u)-\beta(u)\gamma'(u)=0.$$

$u=0$ を代入すると,

$$\alpha'(0)+\delta'(0)=0.$$

よって,

$$\mathrm{tr}(X)=\alpha'(0)+\delta'(0)=0.\blacksquare$$

claim2 $X+{}^t\overline{X}=O$ を示す. ② より,

$$I={}^t\overline{A(u)}A(u)=\begin{pmatrix}\overline{\alpha(u)} & \overline{\gamma(u)}\\ \overline{\beta(u)} & \overline{\delta(u)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha(u) & \beta(u)\\ \gamma(u) & \delta(u)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha(u)\overline{\alpha(u)}+\gamma(u)\overline{\gamma(u)} & \overline{\alpha(u)}\beta(u)+\overline{\gamma(u)}\delta(u)\\ \alpha(u)\overline{\beta(u)}+\gamma(u)\overline{\delta(u)} & \beta(u)\overline{\beta(u)}+\delta(u)\overline{\delta(u)}\end{pmatrix}.$$

だから,

$$\alpha(u)\overline{\alpha(u)}+\gamma(u)\overline{\gamma(u)}=1.$$

両辺を微分すると,

$$\alpha'(u)\overline{\alpha(u)}+\alpha(u)\overline{\alpha'(u)}+\gamma'(u)\overline{\gamma(u)}+\gamma(u)\overline{\gamma'(u)}=0.$$

$u=0$ を代入すると,

$$\alpha'(0)+\overline{\alpha'(0)}=0.$$

同様にして,

$$\beta'(0)+\overline{\gamma'(0)}=\gamma'(0)+\overline{\beta'(0)}=\delta'(0)+\overline{\delta'(0)}=0.$$

よって,

$$X+{}^t\overline{X}=\begin{pmatrix}\alpha'(0) & \beta'(0)\\ \gamma'(0) & \delta'(0)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\overline{\alpha'(0)} & \overline{\gamma'(0)}\\ \overline{\beta'(0)} & \overline{\delta'(0)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha'(0)+\overline{\alpha'(0)} & \beta'(0)+\overline{\gamma'(0)}\\ \gamma'(0)+\overline{\beta'(0)} & \delta'(0)+\overline{\delta'(0)}\end{pmatrix}=O.\blacksquare$$

claim 1, 2 より, $X\in\mathfrak{su}(2)$.

次に $(\supset)$ を示す. 任意に $X\in\mathfrak{su}(2)$ をとる. 示すことは

$$\exists A:\mathrm{SU}(2)\text{ 上のなめらかな道}:A(0)=I, A'(0)=X$$

である. $X\in\mathfrak{su}(2)$ より,

$$①\mathrm{tr}(X)=0,\qquad ②X+{}^t\overline{X}=O.$$

claim $\forall u\in\mathbb{R}, e^{uX}\in\mathrm{SU}(2)$ を示す. 任意に $u\in\mathbb{R}$ をとる. 示すことは $\det(e^{uX})=1$, ${}^t\overline{e^{uX}}e^{uX}=I$ である.

$$\begin{aligned}\det(e^{uX})&=e^{\mathrm{tr}(uX)} &&(\because \text{命題 }3.3(2))\\ &=e^{u\mathrm{tr}(X)}\\ &=e^0 &&(\because ①)\\ &=1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^t\overline{e^{uX}}e^{uX} &= e^{u{}^t\overline{X}}e^{uX} \qquad (\because {}^t\overline{e^{uX}} = e^{u{}^t\overline{X}}) \\
&= e^{u{}^t\overline{X}+uX} \qquad (\because \text{②より } (u{}^t\overline{X})(uX) = (uX)(u{}^t\overline{X}) \text{ だから, 命題 3.3(1) より}) \\
&= e^O \qquad (\because \text{②}) \\
&= I. \blacksquare
\end{aligned}$$

claim より, $A : \mathbb{R} \to \mathrm{SU}(2) : u \mapsto e^{uX}$ は SU(2) 上のなめらかな道になる. また, 命題 3.3(3) より, $A(0) = e^O = I$, $A'(0) = Xe^O = X$. したがって, $X \in T_I(\mathrm{SU}(2))$. □

命題 5.8 Lie(SU(2)) と $\mathfrak{su}(2)$ はリー環として同型.

証明. $\mathrm{Lie}(\mathrm{SU}(2)) \cong T_I(\mathrm{SU}(2)) = \mathfrak{su}(2)$. □

命題 5.9 $\mathfrak{su}(2) = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

証明. まず ($\subset$) を示す. 任意に $x := \begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ e+if & -a-ib \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(2)$ をとる.

$$O = \begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ e+if & -a-ib \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a-ib & e-if \\ c-id & -a+ib \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & (c+e)+i(d-f) \\ (c+e)+i(f-d) & -2a \end{pmatrix}.$$

よって, $a = 0$, $e = -c$, $f = d$. したがって,

$$\begin{aligned}
x &= \begin{pmatrix} ib & c+id \\ -c+id & -ib \end{pmatrix} \\
&= -c\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - d\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\
&= -c\mathbf{i} - d\mathbf{j} + b\mathbf{k} \in \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}.
\end{aligned}$$

次に ($\supset$) を示す. 任意に $x := a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} \in \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ をとる.

$$x = a\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ic & -a-ib \\ a-ib & -ic \end{pmatrix}.$$

よって,

- $\mathrm{tr}(x) = ic - ic = 0$,
- $x + {}^t\overline{x} = \begin{pmatrix} ic & -a-ib \\ a-ib & -ic \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -ic & a+ib \\ -a+ib & ic \end{pmatrix} = O$.

したがって, $x \in \mathfrak{su}(2)$. □

注意 5.10 $\mathrm{Im}(\mathbb{H}) := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ の元を **純虚四元数** という. 以後, $X := \mathbf{i}$, $Y := \mathbf{j}$, $Z := \mathbf{k}$ とおく. また, $\mathfrak{su}(2)$ には bracket 積 $[U, V] = UV - VU$ が入るので,

- $[X, Y] = \mathbf{ij} - \mathbf{ji} = \mathbf{k} + \mathbf{k} = 2Z$,
- $[Y, Z] = \mathbf{jk} - \mathbf{kj} = \mathbf{i} + \mathbf{i} = 2X$,
- $[Z, X] = \mathbf{ki} - \mathbf{ik} = \mathbf{j} + \mathbf{j} = 2Y$.

bracket 積は双線型性をもつので, 上の bracket だけわかれば十分である.

以上をまとめて, 次を得る.

命題 5.11 次の $(\mathrm{S}(3), [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ は $\mathbb{S}^3$ のリー環と同型:
線型空間 $\mathrm{S}(3) := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{X, Y, Z\}$ に対して, $\{X, Y, Z\}$ が正規直交基底になるような内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ と, 次を満たす bracket 積 $[\cdot,\cdot]$ を入れたもの: $[X, Y] = 2Z$, $[Y, Z] = 2X$, $[Z, X] = 2Y$.

5.3 $\mathbb{S}^3$ の断面曲率

リー環 $(\mathrm{S}(3), [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を用いて $\mathbb{S}^3$ の断面曲率を計算する.

補題 5.12 リー環 $(\mathrm{S}(3), [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ に対して, 次が成り立つ:

$$\forall A, B \in \{X, Y, Z\}, U(A, B) = 0.$$

証明. $U(X, Y) = 0$ のみ示す.

- $\langle U(X,Y), X\rangle = (1/2)(\langle [X,X], Y\rangle + \langle X, [X,Y]\rangle) = (1/2)\langle X, 2Z\rangle = 0.$
- $\langle U(X,Y), Y\rangle = (1/2)(\langle [Y,X], Y\rangle + \langle X, [Y,Y]\rangle) = (1/2)\langle -2Z, Y\rangle = 0.$
- $\langle U(X,Y), Z\rangle = (1/2)(\langle [Z,X], Y\rangle + \langle X, [Z,Y]\rangle) = (1/2)(\langle 2Y, Y\rangle + \langle X, -2X\rangle) = 0.$

したがって, 命題 3.2(1) より $U(X, Y) = 0$. その他も同様に確かめることができる. □

補題 5.13 リー環 $(\mathrm{S}(3), [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $\nabla_X X = \nabla_Y Y = \nabla_Z Z = 0,$
(2) $\nabla_X Y = Z, \nabla_Y Z = X, \nabla_Z X = Y,$
(3) $\nabla_X Z = -Y, \nabla_Y X = -Z, \nabla_Z Y = -X.$

証明. bracket 積の定義及び補題 5.12 から簡単な計算により確かめることができる. □

補題 5.14 リー環 $(\mathrm{S}(3), [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $R(X,Y)X = Y, R(Y,Z)Y = Z, R(Z,X)Z = X,$
(2) $R(X,Y)Y = -X, R(Y,Z)Z = -Y, R(Z,X)X = -Z,$
(3) $R(X,Y)Z = R(Y,Z)X = R(Z,X)Y = 0.$

証明. $R(X, Y)X = Y$ のみ示す.

$$R(X,Y)X = \nabla_{[X,Y]}X - \nabla_X\nabla_Y X + \nabla_Y\nabla_X X = 2\nabla_Z X + \nabla_X Z = 2Y - Y = Y.$$

その他も同様にして確かめることができる. □

定理 5.15 $\mathbb{S}^3$ の断面曲率は 1.

証明. S(3) の任意の 2 次元部分空間 σ をとり, $\{U, V\}$ を σ の正規直交基底とする. $\{X, Y, Z\}$ は $\mathrm{S}(3) \supset \sigma$ の基底だから,

$$\exists u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R} : U = u_1 X + u_2 Y + u_3 Z, V = v_1 X + v_2 Y + v_3 Z.$$

さらに, $\{U, V\}$ は σ の正規直交基底なので,

- $0 = \langle U, V \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$,
- $1 = \langle U, U \rangle = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$,
- $1 = \langle V, V \rangle = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$.

よって,

$$\begin{aligned}
R(U, V)U &= u_1 R(X, V)U + u_2 R(Y, V)U + u_3 R(Z, V)U \\
&= u_1 v_2 R(X, Y)U + u_1 v_3 R(X, Z)U \\
&\qquad + u_2 v_1 R(Y, X)U + u_2 v_3 R(Y, Z)U \\
&\qquad + u_3 v_1 R(Z, X)U + u_3 v_2 R(Z, Y)U \\
&= (u_1 v_2 - u_2 v_1) R(X, Y)U \\
&\qquad + (u_2 v_3 - u_3 v_2) R(Y, Z)U \\
&\qquad + (u_3 v_1 - u_1 v_3) R(Z, X)U \\
&= (u_1 v_2 - u_2 v_1)(u_1 Y - u_2 X) \\
&\qquad + (u_2 v_3 - u_3 v_2)(u_2 Z - u_3 Y) \\
&\qquad + (u_3 v_1 - u_1 v_3)(u_3 X - u_1 Z) \\
&= (u_3^2 v_1 - u_1 u_3 v_3 - u_1 u_2 v_2 + u_2^2 v_1) X \\
&\qquad + (u_1^2 v_2 - u_1 u_2 v_1 - u_2 u_3 v_3 + u_3^2 v_2) Y \\
&\qquad + (u_2^2 v_3 - u_2 u_3 v_2 - u_1 u_3 v_1 + u_1^2 v_3) Z \\
&= (u_3^2 v_1 + u_1^2 v_1 + u_2^2 v_1) X \\
&\qquad + (u_1^2 v_2 + u_2^2 v_2 + u_3^2 v_2) Y \\
&\qquad + (u_2^2 v_3 + u_3^2 v_3 + u_1^2 v_3) Z \\
&= v_1 X + v_2 Y + v_3 Z \\
&= V.
\end{aligned}$$

したがって, 断面曲率 K_σ は次のようになる:

$$K_\sigma = \langle R(U, V)U, V \rangle = \langle V, V \rangle = 1.$$

□

6　3 次元実双曲空間

この節では, 3 次元実双曲空間の断面曲率を求める.

6.1　リー群 $\mathbb{R}\mathrm{H}^3$

定義 6.1 $\mathbb{R}\mathrm{H}^3 := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z > 0 \right\}$ を <u>3 **次元実双曲空間**</u> という.

注意 6.2 $\mathbb{R}\mathrm{H}^3$ は, リーマン計量 $g = (1/z^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ を入れることによりリーマン多様体になる. さらに, 双曲平面 $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ と同様にリー群とみなすことができる.

6.2　$\mathbb{R}\mathrm{H}^3$ のリー環

3 次元実双曲空間 $\mathbb{R}\mathrm{H}^3$ のリー環は次で表すことができる:

命題 6.3 次の $(\mathrm{H}(3), [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ は $\mathbb{R}\mathrm{H}^3$ のリー環と同型:
線型空間 $\mathrm{H}(3) := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{A, X, Y\}$ に対して, $\{A, X, Y\}$ が正規直交基底になるような内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ と, 次を満たす bracket 積 $[\cdot,\cdot]$ を入れたもの: $[A, X] = X$, $[A, Y] = Y$, $[X, Y] = 0$.

6.3　$\mathbb{R}\mathrm{H}^3$ の断面曲率

リー環 $(\mathrm{H}(3), [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を用いて $\mathbb{R}\mathrm{H}^3$ の断面曲率を計算する.

補題 6.4 リー環 $(\mathrm{H}(3), [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $U(A, A) = U(X, Y) = 0$,
(2) $U(A, X) = -(1/2)X, U(A, Y) = -(1/2)Y$,
(3) $U(X, X) = U(Y, Y) = A$.

証明. $U(X, Y) = 0$ のみ示す.

- $\langle U(X, Y), A\rangle = (1/2)(\langle [A, X], Y\rangle + \langle X, [A, Y]\rangle) = \langle X, Y\rangle = 0$.
- $\langle U(X, Y), X\rangle = (1/2)(\langle [X, X], Y\rangle + \langle X, [X, Y]\rangle) = 0$.
- $\langle U(X, Y), Y\rangle = (1/2)(\langle [Y, X], Y\rangle + \langle X, [Y, Y]\rangle) = 0$.

したがって, 命題 3.2(1) より $U(X, Y) = 0$. その他も同様に確かめることができる. □

補題 6.5 リー環 $(\mathrm{H}(3), [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $\nabla_A A = \nabla_A X = \nabla_A Y = \nabla_X Y = \nabla_Y X = 0$,
(2) $\nabla_X A = -X, \nabla_Y A = -Y$,
(3) $\nabla_X X = \nabla_Y Y = A$.

証明. bracket 積の定義及び補題 6.4 から簡単な計算により確かめることができる. □

補題 6.6 リー環 $(\mathrm{H}(3), [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $R(A, X)A = -X, R(X, Y)X = -Y, R(Y, A)Y = -A$,
(2) $R(A, X)X = A, R(X, Y)Y = X, R(Y, A)A = Y$,
(3) $R(A, X)Y = 0, R(X, Y)A = 0, R(Y, A)X = 0$.

証明. $R(X,Y)X = -Y$ のみ示す.

$$R(X,Y)X = \nabla_{[X,Y]}X - \nabla_X\nabla_Y X + \nabla_Y\nabla_X X = \nabla_Y A = -Y.$$

その他も同様にして確かめることができる. □

定理 6.7 $\mathbb{R}\mathrm{H}^3$ の断面曲率は -1.

証明. $\mathrm{H}(3)$ の任意の 2 次元部分空間 σ をとり, $\{U,V\}$ を σ の正規直交基底とする. $\{A,X,Y\}$ は $\mathrm{H}(3) \supset \sigma$ の基底だから,

$$\exists u_1,u_2,u_3,v_1,v_2,v_3 \in \mathbb{R} : U = u_1A + u_2X + u_3Y, V = v_1A + v_2X + v_3Y.$$

さらに, $\{U,V\}$ は σ の正規直交基底なので,

- $0 = \langle U,V\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$,
- $1 = \langle U,U\rangle = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$,
- $1 = \langle V,V\rangle = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$.

よって,

$$\begin{aligned}
R(U,V)U &= u_1R(A,V)U + u_2R(X,V)U + u_3R(Y,V)U \\
&= u_1v_2R(A,X)U + u_1v_3R(A,Y)U \\
&\qquad + u_2v_1R(X,A)U + u_2v_3R(X,Y)U \\
&\qquad + u_3v_1R(Y,A)U + u_3v_2R(Y,X)U \\
&= (u_1v_2 - u_2v_1)R(A,X)U \\
&\qquad + (u_2v_3 - u_3v_2)R(X,Y)U \\
&\qquad + (u_3v_1 - u_1v_3)R(Y,A)U \\
&= (u_1v_2 - u_2v_1)(u_2A - u_1X) \\
&\qquad + (u_2v_3 - u_3v_2)(u_3X - u_2Y) \\
&\qquad + (u_3v_1 - u_1v_3)(u_1Y - u_3A) \\
&= (u_1u_2v_2 - u_2^2v_1 - u_3^2v_1 + u_1u_3v_3)A \\
&\qquad + (u_2u_3v_3 - u_3^2v_2 - u_1^2v_2 + u_1u_2v_1)X \\
&\qquad + (u_1u_3v_1 - u_1^2v_3 - u_2^2v_3 + u_2u_3v_2)Y \\
&= (-u_1^2v_1 - u_2^2v_1 - u_3^2v_1)A \\
&\qquad + (-u_2^2v_2 - u_3^2v_2 - u_1^2v_2)X \\
&\qquad + (-u_3^2v_3 - u_1^2v_3 - u_2^2v_3)Y \\
&= -(v_1A + v_2X + v_3Y) \\
&= -V.
\end{aligned}$$

したがって, 断面曲率 K_σ は次のようになる:

$$K_\sigma = \langle R(U,V)U, V\rangle = \langle -V, V\rangle = -1.$$

□

謝辞

最後になりましたが, 本論文を作成するにあたり, ご多忙にもかかわらず, 助言やご指導を頂いた指導教官の田丸博士准教授をはじめ, 研究室の皆様に感謝致します.

参考文献

[1] 硲野敏博, 加藤芳文, **理工系の基礎線形代数学**. 学術図書出版社, 2006.

[2] 児玉広志, **あるリー群の左不変計量に関する曲率について**. 広島大学理学部 2006 年度卒業論文, 2007.

[3] Stillwell, John, ***Naive Lie Theory***. Springer, 2008.

[4] 田丸博士, **等質空間の幾何学入門**. 熊本大学集中講義資料, 2006.

[5] 田丸博士, **可微分多様体入門**. 広島大学 2009 年度幾何学 A 講義資料, 2009.

[6] 田丸博士, **曲線・曲面とリーマン多様体**. 広島大学 2009 年度幾何学 C・多様幾何基礎講義 A 講義資料, 2009.