平成21年度卒業論文
曲率一定のシュートに対するキーパーの
最適な動き

広島大学　理学部　数学科
B054341　　　岡田　克哉
指導教官　　　田丸　博士

平成22年2月10日

目 次

1 はじめに 3

2 問題設定 4

3 シュートが直線の場合 5

4 シュートが曲率一定の曲線の場合
:キーパーが曲線の内部にいるとき 6

5 シュートが曲率一定の曲線の場合
:キーパーが曲線の外部にいるとき 9

6 終わりに 11

1　はじめに

　サッカーにおいて, シューターから放たれたシュートに対して, キーパーはどのように動いてボールを捕りに行くのが最適なのかを調べた. シューター, キーパーの周囲には誰もいないものとする.
　シュートの軌跡が直線の場合, キーパーは, キーパーとシューターを結ぶ直線に垂直に捕りに行くのがよいとされている.　(参考文献 [1])
　そこで今回は, シュートの軌跡が曲率一定の曲線の場合, キーパーはどのように動くのが最適であるかを調べ, 次の結果が得られた.

· シュートが曲率一定の曲線で, キーパーがその内部にいる場合, キーパーは, キーパーとシューターを結ぶ直線に垂直に捕りに行くよりも, 斜め後ろに捕りに行くほうがよい.
· シュートが曲率一定の曲線で, キーパーがその外部にいる場合, キーパーは, キーパーとシューターを結ぶ直線に垂直に捕りに行くよりも, 斜め前に捕りに行くほうがよい.

考え方としては, シューター, キーパー, キャッチポイントを点で, シュートは曲率一定の曲線, これらを平面で考え, シューターからキャッチポイントまでの距離, キーパーからキャッチポイントまでの距離の比でボールの捕りにくさを定義している. そして, ボールの捕りにくさを関数として考え, その最小値を求める問題に帰着させて解いている.

2 問題設定

ここで, 問題, 条件を設定し, 考え方を記しておく.

[**問題**]
サッカーにおいて, キーパーがボールを捕るための最適な動きは？
(1) シュートが直線の場合
(2) シュートが曲率一定の曲線の場合:キーパーが曲線の内部にいるとき
(3) シュートが曲率一定の曲線の場合:キーパーが曲線の外部にいるとき

問題を解くにあたって, 次のように条件を定める.

[条件]
· 高さは考えず, 二次元平面で考察する.
· シュートの軌跡の曲率は一定である
· シュートされたボールの速度とキーパーの動く速度は考えず, 距離のみで考察する.

問題の考え方は以下の通りである.
シューター (S), キーパー (G), キャッチポイント (C) を点とみなし, GC,$\overset{\frown}{SC}$ の比を調べ, キーパーがキャッチする最適な動きを求める.
ここで, シューターからキャッチポイントまでの距離よりキーパーからキャッチポイントまでの距離が長ければ, キーパーはボールを捕りにくいといえるので次を定義する.

定義 1. $\dfrac{GC}{\overset{\frown}{SC}}$ をボールの捕りにくさ と呼び, $\dfrac{GC}{\overset{\frown}{SC}}$ が最小となる点 C を最適なキャッチポイントと呼ぶ.

直線のときは,$\overset{\frown}{SC}$=SC として考える.

この条件のもとで問題を考察していく.

3　シュートが直線の場合

シュートが直線のとき, キーパーがボールを捕るための最適な動きを調べた.
この結果は参考文献 [1] から引用している.

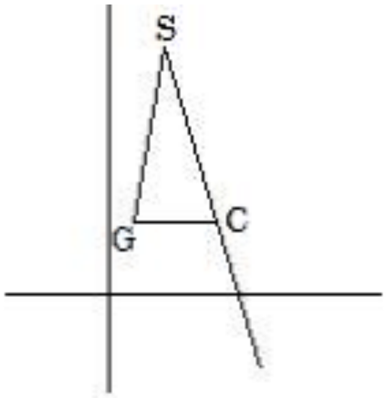
定理 2. シュートが直線の場合, キーパーは, キーパーとシューターを結ぶ直線に垂直に捕りに行くのが最適な動きである.

[証明]

△SGC を考えると正弦定理より,

$$\frac{GC}{SC} = \frac{\sin \angle S}{\sin \angle G}$$

となり,$\angle S$ は固定なので $\sin \angle S$ は一定.
つまり $\dfrac{GC}{SC}$ が最小となるのは $\sin \angle G$ が最大のときとなる.
ここで $\sin \angle G$ が最大となるのは $\angle G = \pi/2$ のときである.

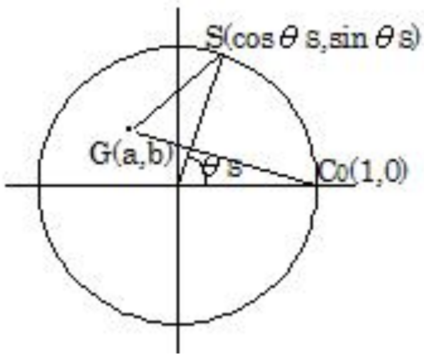


よって, キーパーは, キーパーとシューターを結ぶ直線に垂直に捕りに行くの最適な動きである. □

4　シュートが曲率一定の曲線の場合 :キーパーが曲線の内部にいるとき

シュートが曲率一定の曲線で, キーパーが曲線の内部にいるときのキーパーがボールを捕るための最適な動きを調べた.

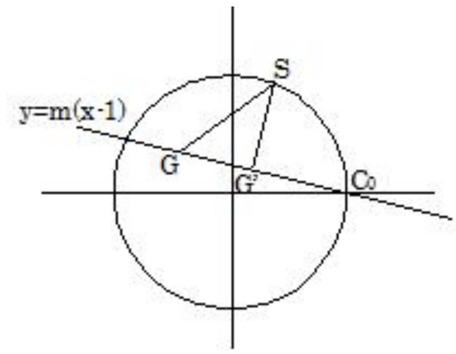
定理 3. シュートが曲率一定の曲線で, キーパーがその内部にいる場合, キーパーは, キーパーとシューターを結ぶ直線に垂直に捕りに行くよりも, 斜め後ろに捕りに行くのが最適な動きである.



補題 4. $S(\cos\theta_S, \sin\theta_S)(0<\theta_S<\pi)$,$G(a,b)(b>0)$,$C_0(1,0)$, $\angle SGC_0<\dfrac{\pi}{2}$ で,G は原点中心の単位円の内部にいるとき, $\dfrac{GC_0^2}{b}>\theta_S$ が成り立つ.

[補題 4 の証明]

step1　$\dfrac{GC_0^2}{b}>\dfrac{G'C_0^2}{b'}$ を示す.

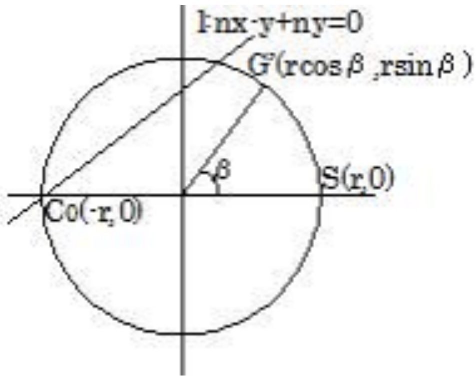


G,G' は y=m(x-1)(m $<$ 0) 上の点で,
$\angle SGC_0=\alpha(0<\alpha\leq\dfrac{\pi}{2})$,$\angle SG'C_0=\dfrac{\pi}{2}$.
G(t,m(t-1)),G'(t',m(t'-1))(t $<$ t') とする.
このとき,

$$\frac{GC_0^2}{b} - \frac{G'C_0^2}{b'} = \frac{(m^2+1)(t-t')}{m}>0$$

$$\therefore\ \frac{GC_0^2}{b}>\frac{G'C_0^2}{b'}.$$

step2　$\dfrac{G'C_0^2}{b'}>\dfrac{SC_0^2}{\sin\theta_S}$ を示す.



考えやすくするため, 次の状況で考察する.
S(r,0),$G(r\cos\beta, r\sin\beta)$,$C_0$(-r,0),
直線 l:nx-y+nr=0 .(0 $<$ r $<$ 1) (0 $<\beta<\pi$) (n $>$ 0).
このとき,$\dfrac{G'C_0^2}{d(G,l)}>\dfrac{SC_0^2}{d(S,l)}$ を示す.

$$\frac{G'C_0^2}{d(G,l)}-\frac{SC_0^2}{d(S,l)}=2r\sqrt{n^2+1}\left(\frac{1+\cos\beta}{n(1+\cos\beta)-\sin\beta}-\frac{1}{n}\right)$$

ここで,$\dfrac{\sin\beta}{1+\cos\beta}>0$ であるので,

$$\frac{\sin\beta}{1+\cos\beta}>0 \Longleftrightarrow n-\frac{\sin\beta}{1+\cos\beta}<n$$

$$\Longleftrightarrow \frac{n(1+\cos\beta)-\sin\beta}{1+\cos\beta}<n$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1+\cos\beta}{n(1+\cos\beta)-\sin\beta}>\frac{1}{n}$$

よって $\dfrac{G'C_0^2}{d(G,l)}-\dfrac{SC_0^2}{d(S,l)}>0$

$\therefore \dfrac{G'C_0^2}{d(G,l)}>\dfrac{SC_0^2}{d(S,l)}$.

step3 $\dfrac{SC_0^2}{\sin\theta_S}>\theta_S$ を示す.

$g(\theta_S)=\dfrac{SC_0^2}{\sin\theta_S}-\theta_S=\dfrac{2-2\cos\theta_S}{\sin\theta_S}-\theta_S$ とする.

$g'(\theta_S)=\dfrac{(\cos\theta_S-1)^2}{\sin^2\theta_S}>0$ より $g(\theta_S)$ は単調増加.

ここで, ロピタルの定理より $\theta_S\longrightarrow 0$ のとき $g(\theta_S)\longrightarrow 0$ であるので,

$g(\theta_S)>0$ となり $\dfrac{SC_0^2}{\sin\theta_S}>\theta_S$.

以上より $\dfrac{GC_0^2}{b}>\theta_S$ が示された. □

[定理 3 の証明]
示すこと：$\overset{\frown}{SC}$ 間には最適キャッチポイントはない.

一般的な状況を座標軸上で考える. それらを, 平行移動, 回転, 縮小・拡大させても本質的には変わらないので,
$S(\cos\theta_S, \sin\theta_S)(0<\theta_S<\pi)$,G(a,b)(b >0) で固定し,
$C(\cos\theta, \sin\theta)(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2})$ とする.
このとき $f(\theta) = (\frac{GC}{\overset{\frown}{SC}})^2$ とすると,

$$f(\theta) = \frac{-2a\cos\theta - 2b\sin\theta + a^2 + b^2 + 1}{(\theta_S - \theta)^2}$$

$$f'(\theta) = \frac{(2a\sin\theta - 2b\cos\theta)(\theta_S - \theta) + 2(-2a\cos\theta - 2b\sin\theta + a^2 + b^2 + 1)}{(\theta_S - \theta)^3}$$

ここで,θ=0 のとき $C_0(1,0)$ とすると,

$$f'(0) = \frac{-2b\theta_S - 4a + 2a^2 + 2b^2 + 2}{(\theta_S)^3} > 0$$

$$\Longleftrightarrow GC_0^2 > b\theta_S$$

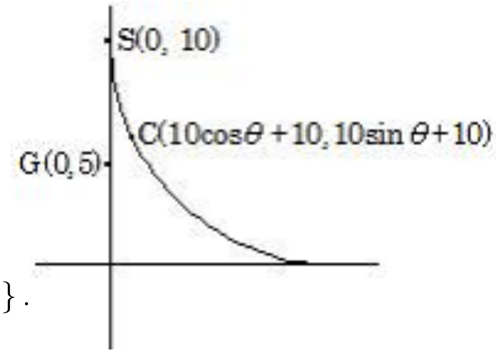
$$\Longleftrightarrow \frac{GC_0^2}{b} > \theta_S$$

補題 4 より $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ で $f'(\theta) > 0$ がいえる.
よって $\overset{\frown}{SC}$ 間には最適キャッチポイントはない.

したがって, キーパーは, キーパーとシューターを結ぶ直線に垂直に捕りに行くよりも, 斜め後ろに捕りに行くのが最適な動きである. □

5　シュートが曲率一定の曲線の場合 :キーパーが曲線の外部にいるとき

　シュートが曲率一定の曲線で, キーパーが曲線の外部にいるときのキーパーがボールを捕るための最適な動きを調べた.



例 5. *S(10,0)*,*G(5,0)*,$C(\cos\theta+10,\sin\theta+10)$ $(\pi<\theta\leq\dfrac{3\pi}{2})$ として, $f(\theta)=(\dfrac{GC}{\overset{\frown}{SC}})^2$ とすると,

$$f(\theta)=\frac{225+200\cos\theta+100\sin\theta}{100(\theta-\pi)^2}$$

$f'(\theta)$ の分子は,
$5000(\theta-\pi)4\left\{(-\theta+\pi-1)\sin\theta+2(\theta-\pi-4)\cos\theta-9\right\}$.
これを $g(\theta)$ とすると,$g'(\theta)>0(\pi<\theta\leq\dfrac{3\pi}{2})$.
つま $f'(\theta)$ はこの範囲で単調増加. ここで,

$$f'(\frac{13\pi}{12})<0,\ f'(\frac{7\pi}{6})>0$$

よって,$\dfrac{13\pi}{12}<\theta<\dfrac{7\pi}{6}$ で $f(\theta)$ は最小となる.

したがって, この場合キーパーは, キーパーとシューターを結ぶ直線に垂直に捕りに行くよりも, 斜め前に捕りに行くのが最適な動きである.

定理 6. シュートが曲率一定の曲線で, キーパーがその外部にいる場合, キーパーは, キーパーとシューターを結ぶ直線に垂直に捕りに行くよりも, 斜め前に捕りに行くのが最適な動きである.

補題 7. $S(\cos\theta_S, \sin\theta_S)(0 < \theta_S < \pi)$,$G(a,b)(b>0)$,$C_0(1,0)$, $\angle SGC_0 < \frac{\pi}{2}$ で,G は原点中心の単位円の外部にいるとき, $\frac{GC_0^2}{b} < \theta_S$ が成り立つ.

[定理 6 の証明]
一般的な状況を座標軸上で考える. それらを, 平行移動, 回転, 縮小・拡大させても本質的には変わらないので,
$S(\cos\theta_S, \sin\theta_S)(0 < \theta_S < \pi)$,G(a,b)(b > 0) で固定し,
$C(\cos\theta, \sin\theta)(-\pi/2 < \theta < \pi/2)$ とする.
このとき $f(\theta) = (\frac{GC}{\overset{\frown}{SC}})^2$ とすると,

$$f(\theta) = \frac{-2a\cos\theta - 2b\sin\theta + a^2 + b^2 + 1}{(\theta_S - \theta)^2}$$

$$f'(\theta) = \frac{(2a\sin\theta - 2b\cos\theta)(\theta_S - \theta) + 2(-2a\cos\theta - 2b\sin\theta + a^2 + b^2 + 1)}{(\theta_S - \theta)^3}$$

ここで,θ=0 のとき $C_0(1,0)$ とすると,

$$f'(0) = \frac{-2b\theta_S - 4a + 2a^2 + 2b^2 + 2}{(\theta_S)^3} < 0$$

$$\iff GC_0^2 < b\theta_S$$

$$\iff \frac{GC_0^2}{b} < \theta_S$$

補題 7 より $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$ で $f'(\theta) < 0$ がいえる.
よって,$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$ の範囲には最適なキャッチポイントはない.

したがって, キーパーは, キーパーとシューターを結ぶ直線に垂直に捕りに行くよりも, 斜め前に捕りに行くのが最適な動きである.

6　終わりに

最後になりましたが, この場を借りて, 多くの助言を下さった田丸先生, その他いろいろ助けていただいた田丸ゼミに参加していた方々に感謝を述べさせていただきます.

参考文献

[1] 与儀勉「幾何学とサッカー:シュートコースに関する考察」広島大学理学部 2007 年度卒業論文,2008