2009 年度 先端数学

「幾何学と不変量」

田丸 博士 (広島大学)

2009/05/08

1 本講義の概要

1.1 目的

- 「不変量」の考え方を知ること:
  - 全ての数学に共通の「定石」,
  - 知っていると見通しが良くなる.
- 「不変量」の例を紹介すること:
  - 今までに習った概念のほとんどは不変量,
  - 高校数学でも登場.

1.2 たとえ話: 血液型

- **設定**:
  - $b : \{$ **人間全体の集合** $\} \to \{A, B, O, AB\}$,
  - $b(x) := [x$ **氏の血液型**$]$.
- **応用例** (**パターン** 1): **同一人物判定**
  - x_0 : **犯人** (**特定できないが** $b(x_0)$ **は分かってる**),
  - x_1 : **容疑者**,
  - $b(x_0) \neq b(x_1) \Rightarrow x_0 \neq x_1$.
- **応用例** (**パターン** 2): **占い**
  - $b(x)$ **から** x **の情報が得られる** (**例**: $b(x) = A \Rightarrow x$ **は几帳面**).
  - **注意**: **当たるかどうかは**, **今は気にしない**.

2 不変量の定義

▼ 設定:

- X, Y : 集合,
- $\sim$: X 上の同値関係.

▼ 定義:

- 写像 $f : X \to Y$ が (同値関係 $\sim$ に関する) <u>不変量</u>

  $$:\Leftrightarrow \ \forall x_1, x_2 \in X,\ \text{“}x_1 \sim x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)\text{”}.$$

▼ 注意:

- X は複雑な集合 (例: 人間全体),
- Y は比較的簡単な集合 (例: $\{A, B, O, AB\}$),
- 不変量のアイデア: 複雑な X のことが, 簡単な Y を見ると分かる.

3　不変量の例

3.1　2 次方程式

- **不変量:**
  - $X := \{f(x) = ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$,
  - $f(x) \sim g(x) :\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ s.t. $f(x) = g(x+t)$,
  - **このとき** $D := b^2 - 4ac$ **は不変量 (判別式).**
- **応用例 (パターン 2):**
  - D **の符号によって** $f(x) = 0$ **の実数解の個数が分かる.**

3.2 三角形

▼ 不変量:

- $X := \{$ 三角形全体 $\}$, $\sim$: 三角形の合同, に対し, 次は不変量:
- $f : X \to \mathbb{R}^3 : \triangle \mapsto (a, b, c)$ (三辺の長さ, ただし $a \geq b \geq c$).

▼ 注意:

- このとき誘導写像 $\widetilde{f} : X/\sim \longrightarrow \mathbb{R}^3$ は単射

  (すなわち, $f(\triangle_1) = f(\triangle_2) \Rightarrow \triangle_1$ と $\triangle_2$ は合同).

▼ 応用例 (パターン 2):

- $f(\triangle)$ によって $\triangle$ は完全に決まる,
- すなわち, $\triangle$ の性質は $f(\triangle)$ で表される,
- 例 (ヘロンの公式): $\triangle$ の面積は $f(\triangle)$ で書ける.

3.3 行列

- **不変量**:
  - $X := M_n(\mathbb{R})$: 実 (n, n) 行列全体,
  - $A \sim B :\Leftrightarrow \exists g \in M_n(\mathbb{R})$ $(\det(g) \neq 0)$ s.t. $A = g^{-1}Bg$,
  - トレース tr, 階数 rank, 行列式 det, 固有値, ... は不変量.
- **応用例** (パターン 2):
  - $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ は逆行列を持つ.

3.4 位相空間

- **不変量**:
  - X : 位相空間全体,
  - $A \sim B :\Leftrightarrow A$ と B は同相,
  - $X \to \{$ 連結, 非連結 $\}$ は不変量,
  - $X \to \{$ コンパクト, 非コンパクト $\}$ は不変量.
- **応用例 (パターン 1)**:
  - 直線 $\mathbb{R}$ と円周 S^1 は同相でない,
  - 直線 $\mathbb{R}$ と平面 $\mathbb{R}^2$ は同相でない.
- **応用例 (パターン 2)**:
  - とても難しい (例: ポアンカレ予想).

3.5 曲線

▼ **定義**:

- $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ **がなめらかな曲線の弧長パラメータ表示**

  $:\Leftrightarrow$ (1) c **は** C^∞**-級**, (2) $\forall t \in \mathbb{R}, \ |c'(t)| = 1.$

- c_1 **と** c_2 **が合同**

  $:\Leftrightarrow \ \exists A \in O(2), \ \exists v \in \mathbb{R}^2 \text{ s.t. } \forall t \in \mathbb{R}, \ c_2(t) = Ac_1(t) + v.$

▼ **不変量**:

- **曲率関数** $\kappa(t) := |c''(t)|$ **は曲線の合同に関する不変量**.

▼ **応用例**:

- **半径が異なる円周は合同ではない** (**パターン** 1).

- $\kappa(t) = 0$ $(\forall t)$ **ならば** c **は直線** (**パターン** 2).

4　レポート問題

▼ 問題 (以下から 4 題以上選択):

- 本講義でとりあげた以外の不変量の例を挙げよ. また, それが不変量であることを示せ.
- 高校数学で登場する不変量の例を挙げよ. また, それについて高校生向けの説明をせよ.
- 曲率関数が, 曲線の合同に関する不変量であることを示せ.
- 半径が異なる円周は合同ではないことを示せ (応用例パターン 1).
- $\kappa(t) = 0\ (\forall t)$ ならば c は直線であることを示せ (応用例パターン 2).