2009 年度数学通論 II・同演習 中間試験問題

2009/12/11,　担当: 田丸・松田・大和

注意

証明問題の解答においては, 以下に注意すること.

- **まず最初に「示すこと」を明確に宣言すること**. 示すことが論理記号で正しく書かれていない場合は, たとえそれ以外の証明が正しかったとしても, 減点します.
- **解答は読みやすく書くこと**. 示すことが最初に書かれていない, 証明の筋道が不明瞭である, あるいは文字が著しく読みにくい, などの場合には, 採点しない可能性があります.

定義

解答する時には, 以下を参考にしても良い:

- 写像が連続とは, 開集合の逆像が開集合となること.
- $(X, \mathcal{O})$ に対して, $A \subset X$ の相対位相は $\mathcal{O}_A := \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}\}$.
- X の密着位相は $\mathcal{O}^t := \{\emptyset, X\}$.
- X の離散位相は $\mathcal{O}^d :=$ “X の巾集合”.
- $\mathbb{R}$ の標準的な位相とは, 自然な距離から決まる位相のこと.
- x の近傍系とは, $\mathfrak{N}_x := \{A \subset X \mid \exists O \in \mathcal{O} : x \in O \subset A\}$.
- 内部とは, $A^\circ := \{x \in X \mid \exists V \in \mathfrak{N}_x : V \subset A\}$.
- 閉包とは, $\overline{A} := \{x \in X \mid \forall U \in \mathfrak{N}_x : A \cap U \neq \emptyset\}$.
- $x_1, x_2 \in X$ を結ぶ道とは, $c : [0,1] \to X$: 連続, $c(0) = x_1$, $c(1) = x_2$.
- 弧状連結とは, 任意の 2 点が道で結べること.
- 連結とは, 2 つの開集合に分けられないこと.
- コンパクトとは, 任意の開被覆に対して有限部分被覆が存在すること.

問題

以下, $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ は位相空間を表す.

[1] $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を連続写像とし, $A \subset X$ とする. このとき, 制限写像 $f|_A : (A, \mathcal{O}_A) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ が連続であることを示せ. ただし $\mathcal{O}_A$ は, $\mathcal{O}_X$ から決まる A の相対位相である. (20 点)

[2] $\mathbb{R}$ に対して, $\mathcal{O}^+ := \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$, $\mathcal{O}^t$ を密着位相, $\mathcal{O}^d$ を離散位相, $\mathcal{O}$ を標準的な位相とする. このとき, それぞれの位相に関して, $A := (0, 1]$ の内部と閉包を書け. (20 点, 証明不要)

[3] $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を連続な全射, $(X, \mathcal{O}_X)$ を弧状連結とする. このとき, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が弧状連結であることを示せ. ただし, 連続写像と連続写像の合成が連続であることは, 必要があれば証明抜きで使っても良い. (20 点)

[4] $(X, \mathcal{O}_X)$ から $\{1, 2\}$ への連続な全射が存在すると仮定する. このとき, $(X, \mathcal{O}_X)$ が非連結であることを示せ. ただし, $\{1, 2\}$ には離散位相が入っているものとする. (20 点)

[5] 以下の条件を全て満たす $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を挙げよ. (20 点, 証明不要)

(1) $(X, \mathcal{O}_X)$ は弧状連結でも連結でもコンパクトでもない,
(2) $(Y, \mathcal{O}_Y)$ は弧状連結かつ連結かつコンパクト,
(3) f は連続かつ全射.

[6] $(\mathbb{R}, \mathcal{O}^+)$ がコンパクトでないことを示せ. ただし $\mathcal{O}^+$ は, 問題 [2] で定義した位相である. (20 点)

[7] 講義および演習に対して, 意見・感想・注文・苦情・改善案などがあったら書いて下さい. (配点なし)