2009 年度数学通論 II・同演習 期末試験問題

2010/02/05,　担当: 田丸・松田・大和

注意

証明問題の解答においては, 以下に注意すること.

- **まず最初に「示すこと」を明確に宣言すること**. 示すことが論理記号で正しく書かれていない場合は, たとえそれ以外の証明が正しかったとしても, 減点します.
- **解答は読みやすく書くこと**. 示すことが最初に書かれていない, 証明の筋道が不明瞭である, あるいは文字が著しく読みにくい, などの場合には, 採点しない可能性があります.

定義

解答する時には, 以下を参考にしても良い:

- $(X, \mathcal{O})$ に対して, $A \subset X$ の相対位相は $\mathcal{O}_A := \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}\}$.
- コンパクトとは, 任意の開被覆に対して有限部分被覆が存在すること.
- 写像が連続とは, 開集合の逆像が開集合となること.
- ハウスドルフとは, 点と点が開集合で分けられること.
- 積位相とは, $\langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle := \{\bigcup O_\lambda \mid O_\lambda \in \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y\}$.
- 開写像とは, 開集合の像が開集合となること.
- X の同値関係 $\sim$ に関する商集合とは, $X/\sim := \{[x] \mid x \in X\}$. ただしここで $[x]$ は x を含む同値類.
- 全射 $\pi : X \to Y$ による商位相とは, $\mathcal{O}^\pi := \{O \subset Y \mid \pi^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X\}$.

問題

以下, $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ は位相空間を表す.

[1] $X := (0, 2]$ がコンパクトでないことを示せ. ただし X には, $\mathbb{R}$ の自然な位相から決まる相対位相が入っているものとする. (20 点)

[2] 有限集合 X は, どのような位相に関してもコンパクトであることを示せ. (20 点)

[3] 写像 $f : X \to Y$ を連続な単射, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ をハウスドルフ空間とする. このとき $(X, \mathcal{O}_X)$ がハウスドルフ空間であることを示せ. (20 点)

[4] 積空間 $X \times Y$ に対して, 写像 $f : X \times Y \to X : (x, y) \mapsto x$ を考える.

(1) f が連続であることを示せ. (20 点)

(2) f が開写像であることを示せ. (20 点)

[5] 積空間 $X \times Y$ の上の同値関係を $(x, y) \sim (x', y') :\Leftrightarrow x = x'$ で定める. このとき, 商空間 $(X \times Y)/\sim$ が X と同相であることを示せ. ここで, 問題 [4] に述べられている性質は, 証明無しで使って良い. (30 点)

[6] 講義および演習に対して, 意見・感想・注文・苦情・改善案などがあったら書いて下さい. (配点なし)