1　数学通論 II (2009/10/06): ガイダンス

数学通論 II・同演習では, 位相空間について学ぶ. この授業の目的は,

「位相空間の諸概念を理解すること」

「論理記号の使い方を身に付けること」

の二つである. 既に数学通論 I で学んだように, 距離空間はユークリッド空間の一般化であった. この授業で扱う位相空間は, 距離空間の一般化である. 非常に抽象的だが, それだけに数学の多くの分野で登場するし, また論理記号などの使い方の訓練には非常に適している.

距離空間の復習

定義 1.1. 写像 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ が集合 X 上の **距離** であるとは, 次の (i)–(iii) を満たすこと:

(i) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$ かつ "$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$".

(ii) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$.

(iii) $\forall x, y, z \in X$, $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

また, 集合 X とその上の距離 d の組 (X, d) を **距離空間** と呼ぶ.

定義 1.2. (X, d) を距離空間とする. このとき,

(1) $a \in X$, $\varepsilon > 0$ に対して, $U(a; \varepsilon) := \{x \in X \mid d(x, a) < \varepsilon\}$ を **ε-近傍** と呼ぶ.

(2) $X \supset O$ が **開集合** とは, 次が成り立つこと: $\forall a \in O$, $\exists \varepsilon > 0 : U(a; \varepsilon) \subset O$.

(3) $\mathcal{O} := \{O \subset X \mid O$ は開集合 $\}$ を **開集合族** と呼ぶ.

例 1.3. $\mathbb{R}$ に自然な距離 d を入れた距離空間に対して, 次が成り立つ:

(1) $O := (0, +\infty)$ は開集合.

(2) $D := [0, +\infty)$ は開集合でない.

例 1.4. 距離空間 (X, d) の開集合族 $\mathcal{O}$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}$, $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.

(2) $\forall O_\lambda \in \mathcal{O}$ $(\lambda \in \Lambda)$, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$.

問題 1.5. 距離空間 (X, d) の開集合族を $\mathcal{O}$ とする. このとき「$\forall x \in X$, $\forall \varepsilon > 0$, $U(x; \varepsilon) \in \mathcal{O}$」が成り立つことを, 以下の手順に従って示せ:

(i) 示すべきことを, 論理記号を使って書け.

(ii) 示すべきことの順番に従って示せ.

2 数学通論 II (2009/10/13): 位相空間の定義・近傍系

位相空間の定義

定義 2.1. 集合 X の部分集合族 $\mathcal{O}$ が X の **位相** (**topology**) であるとは, 次を満たすこと:

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$.

(ii) $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}$, $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.

(iii) $\forall O_\lambda \in \mathcal{O}$ $(\lambda \in \Lambda)$, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$.

また, 集合 X と位相 $\mathcal{O}$ の組 $(X, \mathcal{O})$ を **位相空間** (**topological space**) と呼ぶ.

例 2.2. 次は位相である:

(1) 距離空間 (X, d) に対して, その開集合族 $\mathcal{O}_d := \{O \subset X \mid O$ は開集合 $\}$.

(2) 集合 X に対して, その巾集合 $\mathcal{O} := \mathfrak{P}(X)$ (これを **離散位相** と呼ぶ).

(3) 集合 X に対して, $\mathcal{O} := \{\emptyset, X\}$ (これを **密着位相** と呼ぶ).

(4) $\mathbb{R}$ に対して, $\mathcal{O} := \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

定義 2.3. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して, $X \supset A$ が **開集合** とは, 次が成り立つこと: $A \in \mathcal{O}$.

近傍系

以下では $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする.

定義 2.4. X の点 x に対して,

(1) A $(\subset X)$ が x の **近傍** とは, 次が成り立つこと: $\exists O \in \mathcal{O} : x \in O \subset A$.

(2) $\mathfrak{N}_x := \{A \subset X \mid A$ は x の近傍 $\}$ を x の **近傍系** と呼ぶ.

定義 2.5. A $(\subset X)$ に対して,

(1) $x \in X$ が A の **内点** とは, 次が成り立つこと: $\exists V \in \mathfrak{N}_x : V \subset A$.

(2) $A^\circ := \{x \in X \mid x$ は A の内点 $\}$ を A の **内部** と呼ぶ.

例 2.6. 例 2.2 (4) の位相に関して, 次が成り立つ: $[0, 1)^\circ = \emptyset$, $[0, +\infty)^\circ = (0, +\infty)$.

定理 2.7. $A \subset X$ とする. $A \in \mathcal{O}$ であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $A = A^\circ$.

命題 2.8. 近傍系 $\mathfrak{N}_x$ は次を満たす:

(1) $U \in \mathfrak{N}_x \Rightarrow x \in U$,

(2) $U \in \mathfrak{N}_x, U \subset V \Rightarrow V \in \mathfrak{N}_x$,

(3) $U \in \mathfrak{N}_x, U \in \mathfrak{N}_x \Rightarrow U \cap V \in \mathfrak{N}_x$,

(4) $U \in \mathfrak{N}_x \Rightarrow \exists W \in \mathfrak{N}_x : W \subset U$, "$y \in W \Rightarrow W \in \mathfrak{N}_y$".

3　数学通論 II (2009/10/20): 閉集合

閉集合

定義 3.1. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して, $X \supset A$ が <u>**閉集合**</u> とは, 次が成り立つこと: $X - A \in \mathcal{O}$.

ここで $X - A := \{x \in X \mid x \notin A\}$ は差集合を表す. これは X の中での A の補集合 A^c と同じ.

例 3.2. 距離空間 (X, d) の閉集合は, 位相 $\mathcal{O}_d$ に関しても閉集合.

定義 3.3. $A\ (\subset X)$ に対して,

(1) $x \in X$ が A の <u>**触点**</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall U \in \mathfrak{N}_x : A \cap U \neq \emptyset$.
(2) $\overline{A} := \{x \in X \mid x$ は A の触点 $\}$ を A の <u>**閉包**</u> と呼ぶ.

例 3.4. 例 2.2 (4) の位相に関して, 次が成り立つ: $A = [0, 1)$ に対して $\overline{A} = (-\infty, 1]$.

定理 3.5. $A \subset X$ とする. A が閉集合であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $A = \overline{A}$.

証明には, 次の補題を用いる: $x \notin \overline{A} \Leftrightarrow x \in (X - A)^\circ$.

命題 3.6. 位相空間の閉集合全体の成す集合族 $\mathfrak{A}$ は次を満たす:

(1) $\emptyset, X \in \mathfrak{A}$.
(2) $\forall A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$, $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{A}$.
(3) $\forall A_\lambda \in \mathfrak{A}\ (\lambda \in \Lambda)$, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathfrak{A}$.

問題 3.7. $\mathbb{R}$ に, 例 2.2 (4) の位相を入れた位相空間を考える. $A := \{0\}$ に対して次を示せ:

(1) $-1 \in \overline{A}$,
(2) $1 \notin \overline{A}$.

4　数学通論 II (2009/10/27): 連続写像・同相

連続写像

位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ の間の写像を $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ によって表す.

定義 4.1. $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ が **連続** とは, 次が成り立つこと: $\forall O \in \mathcal{O}_Y,\ f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$.

例 4.2. $\mathbb{R}$ の密着位相を $\mathcal{O}^t$, 離散位相を $\mathcal{O}^d$ で表す. また id は恒等写像を表す. このとき,

(1) $\mathrm{id} : (\mathbb{R}, \mathcal{O}^d) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}^t)$ は連続,

(2) $\mathrm{id} : (\mathbb{R}, \mathcal{O}^t) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}^d)$ は連続でない.

命題 4.3. 写像 $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ に対して, 以下は互いに同値:

(1) f は連続,

(2) $\forall x \in X, \forall V \in \mathfrak{N}_{f(x)},\ \ f^{-1}(V) \in \mathfrak{N}_x$,

(3) $\forall F \in \mathfrak{A}_Y,\ \ f^{-1}(F) \in \mathfrak{A}_X$.

問題 4.4. 写像 $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ および $g : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ が連続のとき, 合成写像 $g \circ f$ も連続であることを示せ.

同相

定義 4.5. $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ が **同相写像** とは, 次が成り立つこと:

(1) f は全単射, (2) f は連続, (3) f^{-1} も連続.

定義 4.6. $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が **同相** とは, 次が成り立つこと: $\exists f : X \to Y$: 同相写像.

命題 4.7. 同相を $\cong$ で表す. このとき $\cong$ は同値関係である. すなわち,

(1) $(X, \mathcal{O}_X) \cong (X, \mathcal{O}_X)$,

(2) $(X, \mathcal{O}_X) \cong (Y, \mathcal{O}_Y) \Rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y) \cong (X, \mathcal{O}_X)$,

(3) $(X, \mathcal{O}_X) \cong (Y, \mathcal{O}_Y)$, $(Y, \mathcal{O}_Y) \cong (Z, \mathcal{O}_Z) \Rightarrow (X, \mathcal{O}_X) \cong (Z, \mathcal{O}_Z)$.

5　数学通論 II (2009/11/10): 相対位相・弧状連結

相対位相

定義 5.1. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$, 部分集合 $A \subset X$ に対して, $\mathcal{O}_A := \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}\}$ を, $(X, \mathcal{O})$ から決まる A の <u>**相対位相**</u> と呼ぶ.

定義より次が成り立つことに念のために注意: “$W \in \mathcal{O}_A \Leftrightarrow \exists O \in \mathcal{O} : W = O \cap A$”.

命題 5.2. 相対位相 $\mathcal{O}_A$ は A の位相.

問題 5.3. $A := [0, 2)$ に $\mathbb{R}$ の標準的な位相から決まる相対位相を入れる. このとき $[0, 1)$ が A の開集合であることを示せ.

命題 5.4. 連続写像 $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $A \subset X$ に対して, 制限写像 $f|_A : (A, \mathcal{O}_A) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ は連続.
(2) 値域を制限した写像 $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (f(X), \mathcal{O}_{f(X)})$ も連続.

系 5.5. 同相写像 $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ および $A \subset X$ に対して, 制限写像 $f|_A : (A, \mathcal{O}_A) \to (f(A), \mathcal{O}_{f(A)})$ も同相.

弧状連結

定義 5.6. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が <u>**弧状連結**</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall x_0, x_1 \in X$, $\exists c : [0, 1] \to X$: 連続, $c(0) = x_0$, $c(1) = x_1$.

上の定義の条件を満たす c を, x_0 と x_1 を結ぶ <u>**道**</u> と呼ぶ.

例 5.7. $\mathbb{R}^n$ に標準的な位相を入れた位相空間は弧状連結. $\mathbb{R}$ の区間, 円周 S^1 も弧状連結.

命題 5.8. 弧状連結な位相空間の連続写像による像は弧状連結である. すなわち, $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を連続写像, $(X, \mathcal{O}_X)$ を弧状連結とすると, $(f(X), \mathcal{O}_{f(X)})$ は弧状連結.

問題 5.9. 上の命題 5.8 の逆は成り立たない. すなわち, 連続写像による像が弧状連結だとしても, 定義域の位相空間が弧状連結とは限らない. 反例を挙げよ.

定理 5.10. 弧状連結性は同相で不変である. すなわち, $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が同相, $(X, \mathcal{O}_X)$ が弧状連結のとき, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ は弧状連結.

例 5.11. 直線 $\mathbb{R}$ と円周 S^1 は同相ではない. 直線 $\mathbb{R}$ と平面 $\mathbb{R}^2$ も同相ではない.

6　数学通論 II (2009/11/17): 連結 (1)

連結の定義

定義 6.1. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して,

(1) $(X, \mathcal{O})$ が <u>**非連結**</u> とは, 次が成り立つこと: $\exists O_1, O_2 \in \mathcal{O} : O_1 \cup O_2 = X$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, $O_1 \neq \emptyset$, $O_2 \neq \emptyset$.

(2) $(X, \mathcal{O})$ が <u>**連結**</u> とは, 次が成り立つこと: $(X, \mathcal{O})$ は非連結でない.

連結な位相空間の例

例 6.2. $(0,1) \cup [2,3)$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ は, $\mathbb{R}$ の標準的な位相から決まる相対位相に関して非連結.

命題 6.3. $X \subset \mathbb{R}$ とし, $\mathcal{O}_X$ を $\mathbb{R}$ の標準的な位相から決まる X の相対位相とする．このとき $(X, \mathcal{O}_X)$ が連結であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall a, b \in X$ $(a < b)$, $[a, b] \subset X$.

例 6.4. $\mathbb{R}$, $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ は, $\mathbb{R}$ の標準的な位相から決まる相対位相に関して連結.

連結と弧状連結の関係

命題 6.5. 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ は, 弧状連結ならば連結である.

注意 6.6. 上の命題の逆は成り立たない．すなわち, 連結だが弧状連結でない位相空間が存在する.

7 数学通論 II (2009/11/24): 連結 (2)

連結の同相不変性

命題 7.1. 連結な位相空間の連続写像による像は連結である．すなわち，$f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を連続写像，$(X, \mathcal{O}_X)$ を連結とすると，$(f(X), \mathcal{O}_{f(X)})$ は連結．

($\because$) 対偶を示す．
$(f(X), \mathcal{O}_{f(X)})$ が非連結と仮定する．
非連結の定義より，$\exists O_1, O_2 \in \mathcal{O}_{f(X)} : O_1 \cup O_2 = f(X)$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, $O_1 \neq \emptyset$, $O_2 \neq \emptyset$.
これらを用いて，$U_1 := f^{-1}(O_1)$, $U_2 := f^{-1}(O_2)$ と置けば良い．

問題 7.2. 上の続きを行い，命題 7.1 を証明せよ．ただしここで，$U_1, U_2 \in \mathcal{O}_X$ の証明には次を用いても良い: $f^{-1}(O' \cap f(X)) = f^{-1}(O')$.

問題 7.3. 上の命題 7.1 の逆は成り立たない．すなわち，連続写像による像が連結だとしても，定義域の位相空間が連結とは限らない．反例を挙げよ．

定理 7.4. 連結性は同相で不変である．すなわち，$(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が同相，$(X, \mathcal{O}_X)$ が連結のとき，$(Y, \mathcal{O}_Y)$ は連結．

連結性の応用

系 7.5 (中間値の定理). $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ を連続写像とし，$f(a) < f(b)$ とする．このとき次が成立: $\forall l \in (f(a), f(b))$, $\exists c \in [a, b] : l = f(c)$.

8 数学通論 II (2009/12/01): コンパクト

コンパクトの定義

定義 8.1. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して,

(1) $\mathfrak{U}$ $(\subset \mathcal{O})$ が X の **開被覆** (**open cover**) とは, 次が成り立つこと: $\bigcup \mathfrak{U} = X$.

(2) $(X, \mathcal{O})$ が **コンパクト** とは, 次が成り立つこと: $\forall \mathfrak{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$: 開被覆, $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ s.t. $X = \bigcup U_{\lambda_i}$.

コンパクトの例

命題 8.2 (復習). $X \subset \mathbb{R}^n$ とする. X が ($\mathbb{R}^n$ の標準的な位相から決まる相対位相に関して) コンパクトであるための必要十分条件は, X が有界閉集合であること.

例 8.3. $\mathcal{O}_d$ を X の離散位相とする. このとき, $(X, \mathcal{O}_d)$ がコンパクトであるための必要十分条件は, X が有限集合であること.

問題 8.4. X が有限集合のとき $(X, \mathcal{O}_d)$ がコンパクトであることを示せ.

命題 8.5. $(X, \mathcal{O})$ をコンパクトとし, $A(\subset X)$ を閉集合とする. このとき, A は相対位相に関してコンパクト.

コンパクトの同相不変性

命題 8.6. コンパクトな位相空間の連続写像による像はコンパクトである. すなわち, $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を連続写像, $(X, \mathcal{O}_X)$ をコンパクトとすると, $(f(X), \mathcal{O}_{f(X)})$ はコンパクト.

問題 8.7. 上の命題 8.6 の逆は成り立たない. すなわち, 連続写像による像がコンパクトだとしても, 定義域の位相空間がコンパクトとは限らない. 反例を挙げよ.

定理 8.8. コンパクト性は同相で不変である. すなわち, $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が同相, $(X, \mathcal{O}_X)$ がコンパクトのとき, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ はコンパクト.

レポート問題

問題 8.9. 以下に挙げるそれぞれのキーワードに対して, 関連する中間試験の問題を予想し, その問題と解答を書け:

(1) 開集合および閉集合, (2) 連続写像, (3) 弧状連結, (4) 連結, (5) コンパクト.

9　数学通論 II (2009/12/08): 分離公理

定義

定義 9.1. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して, 次の条件を <u>(T_1)**-分離公理**</u> と呼ぶ:

(T_1) $\forall x, y \in X\ (x \neq y),\ \exists O \in \mathcal{O} : x \in O,\ y \notin O.$

また, 次の条件を <u>(T_2)**-分離公理**</u> と呼び, これを満たす位相空間を <u>**ハウスドルフ空間**</u> と呼ぶ:

(T_2) $\forall x, y \in X\ (x \neq y),\ \exists O_1, O_2 \in \mathcal{O} : x \in O_1,\ y \in O_2,\ O_1 \cap O_2 = \emptyset.$

分離公理を満たす例と満たさない例

補題 9.2. 位相空間が条件 (T_2) を満たすなら, (T_1) も満たす.

命題 9.3. 距離から決まる位相 $\mathcal{O}_d$ に対して, $(X, \mathcal{O}_d)$ は (T_1) と (T_2) を満たす.

命題 9.4. $(X, \mathcal{O})$ が (T_1) を満たすための必要十分条件は, 一点集合が閉集合となること, すなわち, $\forall x \in X,\ \{x\} \in \mathfrak{A}$.

例 9.5. $(\mathbb{R}, \mathcal{O}^t)$ は (T_1) も (T_2) も満たさない. ただしここで $\mathcal{O}^t$ は密着位相.

分離公理の同相不変性

定理 9.6. 分離公理は同相で不変である. すなわち, $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が同相, $(X, \mathcal{O}_X)$ が (T_1) または (T_2) を満たすとき, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ も (T_1) または (T_2) を満たす.

例 9.7. $(\mathbb{R}, \mathcal{O}^t)$ は, 距離から決まる位相と同相ではない.

その他の分離公理

定義 9.8. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して, 次を <u>(T_3)**-分離公理**</u> および <u>(T_4)**-分離公理**</u> と呼ぶ:

(T_3) $\forall F \in \mathfrak{A},\ \forall x \notin F,\ \exists O_1, O_2 \in \mathcal{O} : x \in O_1,\ F \subset O_2,\ O_1 \cap O_2 = \emptyset.$

(T_4) $\forall F_1, F_2 \in \mathfrak{A}\ (F_1 \cap F_2 = \emptyset),\ \exists O_1, O_2 \in \mathcal{O} : F_1 \subset O_1,\ F \subset O_2,\ O_1 \cap O_2 = \emptyset.$

定義 9.9. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して,

(1) $(X, \mathcal{O})$ が <u>**正則空間**</u> であるとは, (T_1) と (T_3) を満たすこと.
(2) $(X, \mathcal{O})$ が <u>**正規空間**</u> であるとは, (T_1) と (T_4) を満たすこと.

定理 9.10. 位相空間に対して, 次が成立:　正規 $\Rightarrow$ 正則 $\Rightarrow$ ハウスドルフ $\Rightarrow$ (T_1).

10　数学通論 II (2009/12/15): 開基

開基は, 新しい位相空間を作る方法の一つである．その方法は「位相の一部分だけを指定して残りはそこから復元する」というものである．距離空間の場合には「ε-近傍があれば残りの開集合は自動的に決まる」が, 開基の考え方はその一般化である．

定義と例

定義 10.1. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．$\mathcal{O}^*$ $(\subset \mathcal{O})$ が **開基** とは, 次が成り立つこと: $\forall O \in \mathcal{O}$, $V_\lambda \in \mathcal{O}^*$ $(\lambda \in \Lambda) : O = \bigcup V_\lambda$.

例 10.2. 次は開基である:

(1) $\mathbb{R}$ の標準的な位相 $\mathcal{O}$ に対して, $\mathcal{O}^* := \{(a, b) \subset \mathbb{R} \mid a < b\}$.

(2) 距離空間 (X, d) の距離から決まる位相 $\mathcal{O}_d$ に対して, $\mathcal{O}_d^* := \{U(x; \varepsilon) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$.

開基から位相を復元する

定義 10.3. 集合 X の部分集合族 $\mathcal{O}'$ に対して, 次の $\langle \mathcal{O}' \rangle$ を **$\mathcal{O}'$ の生成する部分集合族** と呼ぶ:

$$\langle \mathcal{O}' \rangle := \{\emptyset\} \cup \{\bigcup_\lambda O_\lambda \mid O_\lambda \in \mathcal{O}'\}.$$

命題 10.4. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, $\mathcal{O}^*$ を開基とすると, 次が成り立つ: $\langle \mathcal{O}^* \rangle = \mathcal{O}$.

命題 10.5. X を集合, $\mathcal{O}'$ を X の部分集合族とする．このとき, $\langle \mathcal{O}' \rangle$ が位相になるための必要十分条件は, 次の (1) と (2) が成り立つこと:

(1) $\bigcup \mathcal{O}' = X$.

(2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{O}'$, $\forall x \in B_1 \cap B_2$, $\exists V \in \mathcal{O}' : x \in V \subset B_1 \cap B_2$.

例 10.6. (X, d) を距離空間とし, $\mathcal{O}'$ を ε-近傍の全体とする．このとき, $\mathcal{O}'$ が 命題 10.5 の条件 (1) と (2) を満たすことを, 直接確かめよ．

第二可算公理

定義 10.7. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が **第二可算公理を満たす** とは, 次が成り立つこと: $\exists \mathcal{O}^*$: 開基 s.t. $\mathcal{O}^*$ は高々可算.

例 10.8. $\mathbb{R}$ に標準的な位相を入れた空間は, 第二可算公理を満たす.

定理 10.9 (Urysohn の距離付け可能定理). 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ は, 正規かつ第二可算公理を満たすならば, 距離空間と同相である.

11　数学通論 II (2009/12/22): 積位相 (1)

$(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする．このとき, 直積集合 $X \times Y$ の上に, 自然に位相が定義される．これにより, 既知の位相空間から新しい位相空間を作ることができる．

定義

命題 11.1. $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする．このとき, $\langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle$ は $X \times Y$ の位相である．

定義 11.2. 上の $\langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle$ を, $X \times Y$ の **積位相** と呼ぶ．また, $X \times Y$ に積位相を入れた空間を **積空間** と呼ぶ．

例 11.3. $\mathbb{R}^n$ の標準的な位相を $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ で表す．このとき, 次が成り立つ: $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^2} = \langle \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \rangle$.

他の性質との関係

補題 11.4. 自然な射影 $\pi : X \times Y \to X$ に関して, 次が成り立つ:

(1) π は連続である,

(2) π は開写像である, すなわち, 任意の開集合の像は開集合である,

(3) 各 $y \in Y$ に対して, $\pi|_{X \times \{y\}} : X \times \{y\} \to X$ は同相写像である．

上の補題において, $X \times Y$ には積位相を入れ, また, $X \times \{y\}$ には (積位相から決まる) 相対位相を入れている．

定理 11.5.

(1) $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を弧状連結とすると, 積空間も弧状連結である,

(2) $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を連結とすると, 積空間も連結である,

(3) $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ をコンパクトとすると, 積空間もコンパクトである．

12　数学通論 II (2010/01/12): 積位相 (2)

積位相の例

補題 12.1. X, Y, Z を位相空間とし, 写像 $f : X \to Y \times Z$ を考える. ただし, $Y \times Z$ には積位相 $\langle \mathcal{O}_Y \times \mathcal{O}_Z \rangle$ が入っているものとする. このとき, f が連続であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall O \in \mathcal{O}_Y \times \mathcal{O}_Z$, $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$.

例 12.2. 円柱 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ と $S^1 \times \mathbb{R}$ は同相である.

念のために, 円柱は $\mathbb{R}^3$ から決まる相対位相を入れたものを, $S^1 \times \mathbb{R}$ はそれぞれの標準的な位相 $\mathcal{O}_{S^1}$, $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ の積位相を入れたものを, それぞれ考えている.

例 12.3. 次で定義されるトーラス T と $S^1 \times S^1$ は同相である:

$$T := \{((2 + \cos\alpha)\cos\beta, (2 + \cos\alpha)\sin\beta, \sin\alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

上で定義されたトーラスは, xz-平面上の $(2, 0)$ を中心とする半径 1 の円を, z-軸を中心に回転させたものである. 次のように回転行列を使って書くと分かりやすい:

$$\begin{pmatrix} (2 + \cos\alpha)\cos\beta \\ (2 + \cos\alpha)\sin\beta \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 + \cos\alpha \\ 0 \\ \sin\alpha \end{pmatrix}.$$

13　数学通論 II (2010/01/19): 商集合

積位相とは, 直積集合の上に定まる位相であった. 商位相とは, 商集合の上に定まる位相である. 商位相の解説の前に, ここでは, 商集合の復習を行う. 商集合によって新しいものを作る, という手法は, 数学のあらゆる分野で登場する.

同値関係

集合 X を考える. 任意の $x, y \in X$ に対して $x \sim y$ であるかないかが (数学的に) 定まっているときに, $\sim$ を X 上の関係と呼ぶ.

定義 13.1. 集合 X 上の関係 $\sim$ が <u>**同値関係**</u> とは, 次が成り立つこと:

(1) $\forall x \in X$, $x \sim x$,

(2) $\forall x, y \in X$, $(x \sim y \Rightarrow y \sim x)$,

(3) $\forall x, y, z \in X$, $(x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow x \sim z)$.

例 13.2. 以下で定義される関係 $\sim$ は同値関係である:

(1) $\mathbb{Z}$ 上で, $m \sim n :\Leftrightarrow m - n \in 2\mathbb{Z}$.

(2) $\mathbb{R}$ 上で, $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$.

(3) $\mathbb{R}^2$ 上で, $(x, y) \sim (x', y') :\Leftrightarrow x - x' \in \mathbb{Z}$, $y = y'$.

(4) $\mathbb{R}^2$ 上で, $(x, y) \sim (x', y') :\Leftrightarrow x - x' \in \mathbb{Z}$, $y - y' \in \mathbb{Z}$.

商集合

定義 13.3. 集合 X に同値関係 $\sim$ が定義されているとする. このとき,

(1) $[x] := \{y \in X \mid y \sim x\}$ を $x \in X$ を含む <u>**同値類**</u> と呼ぶ.

(2) $X/\sim := \{[x] \mid x \in X\}$ を X の $\sim$ による <u>**商集合**</u> と呼ぶ.

(3) 写像 $\pi : X \to X/\sim : x \mapsto [x]$ を <u>**自然な射影**</u> と呼ぶ.

同値類 $[x]$ は, $C(x)$ または $\overline{x}$ と書かれることも多い.

例 13.4. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を, 例 13.2 (1) で定義された同値関係による $\mathbb{Z}$ の商集合とすると, 次が成り立つ: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{[0], [1]\}$.

例 13.5. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ を, 例 13.2 (2) で定義された同値関係による $\mathbb{R}$ の商集合とすると, 次が成り立つ: $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ (すなわち, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と S^1 の間に全単射が存在する).

問題 13.6. $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ を, 例 13.2 (3) で定義された同値関係による $\mathbb{R}^2$ の商集合とするとき, 次が成り立つことを示せ: $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ と円柱の間に全単射が存在する.

14　数学通論 II (2010/01/26): 商位相

集合 X に同値関係 $\sim$ があると, 自然な射影 $\pi : X \to X/\sim$ が考えられる．このとき, π は全射である．X に位相があれば, π を用いて $X/\sim$ にも位相が定義される．

商位相の定義と性質

補題 14.1. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, $f : X \to Y$ を全射とする．このとき, 次は Y の位相である: $\mathcal{O}^f := \{O \subset Y \mid f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X\}$.

定義 14.2. 上の補題の $\mathcal{O}^f$ を **f から誘導される位相** または **商位相** と呼ぶ．また, 集合 Y に商位相 $\mathcal{O}^f$ を入れた位相空間を **商空間** と呼ぶ．

定理 14.3. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, $f : X \to Y$ を全射とする．このとき,

(1) $(X, \mathcal{O}_X)$ がコンパクトならば, 商空間 $(Y, \mathcal{O}^f)$ もコンパクトである．
(2) $(X, \mathcal{O}_X)$ が連結ならば, 商空間 $(Y, \mathcal{O}^f)$ も連結である．
(3) $(X, \mathcal{O}_X)$ が弧状連結ならば, 商空間 $(Y, \mathcal{O}^f)$ も弧状連結である．

商空間の例

例 14.4. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ を, 例 13.2 (2) で定義された同値関係による $\mathbb{R}$ の商集合とすると, 次が成り立つ: $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ (同相).

写像 $f : \mathbb{R} \to S^1 : t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ から誘導された写像 $\overline{f} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1 : [t] \mapsto f(t)$ が同相写像になる．写像 $\overline{f}$ が連続であることは f が連続であることから, 逆写像 $\overline{f}^{-1}$ が連続であることは f が開写像であることから, それぞれ従う．

例 14.5. $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ を, 例 13.2 (3) で定義された同値関係による $\mathbb{R}^2$ の商集合とするとき, 次が成り立つ: $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ と円柱は同相.

商空間によって, トーラスやメビウスの帯が得られる．メビウスの帯を切っても繋がっている (弧状連結である) ことは, 商空間の考え方を使うと証明することができる．

レポート問題

問題 14.6. 以下に挙げるそれぞれのキーワードに対して, 関連する期末試験の問題を予想し, その問題と解答を書け．ただし, 問題をレポートの一枚目に, 解答は二枚目以降に書くこと．

(1) コンパクト, (2) 分離公理, (3) 積位相, (4) 商位相, (5) 中間試験の範囲のもの．