1　数学概論 (2010/04/12): 等質な集合

集合 M が等質とは, 推移的な群作用を持つことである. 本章では, 集合 M が等質であることと $M = G/K$ と表示されることが同値である, という定理を紹介する. ここで G/K は, 群 G の部分群 K による剰余集合を表す. この定理により, 等質な集合 M を調べる (幾何的な) 問題は, 群と部分群の組 (G, K) を調べる (代数的な) 問題に帰着される.

1.1　群と集合の基本的な例

等質な集合に慣れるためには, 一般論だけでなく, 具体例を見ることが重要である. ここでは, 群や集合の基本的な例を紹介する. これらは, 推移的な作用や剰余集合の典型的な例を供給する.

定義 1.1. $M_n(\mathbb{R})$ を $n \times n$ の実行列全体の集合とする. このとき,

(1) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) := \{g \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(g) \neq 0\}$ を **一般線型群**,
(2) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) := \{g \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(g) = 1\}$ を **特殊線型群**,
(3) $\mathrm{O}(n) := \{g \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^t gg = E_n\}$ を **直交群**,
(4) $\mathrm{SO}(n) := \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(n)$ を **特殊直交群** と呼ぶ.

これらが群であることは, 簡単な線型代数の問題.

定義 1.2.

(1) $S^n := \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |v| = 1\}$ を **n 次元球面**,
(2) $\mathbb{R}\mathrm{P}^n := \{\ell \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid \ell$ は原点を通る直線 $\}$ を **n 次元実射影空間**,
(3) $G_k(\mathbb{R}^n) := \{V \subset \mathbb{R}^n \mid V$ は k 次元線型部分空間 $\}$ を **実グラスマン多様体**,
(4) $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ を **上半平面** と呼ぶ.

定義から $\mathbb{R}\mathrm{P}^n = G_1(\mathbb{R}^{n+1})$ である. これらの集合は全て等質になることを後に確かめる.

1.2　群作用

ここでは, 群 G の集合 M への作用を定義し, 球面やグラスマン多様体への作用の例を紹介する.

定義 1.3. 写像 $\Phi : G \times M \to M : (g, p) \mapsto \Phi(g, p) =: g.p$ が, G の M への **作用** (**action**) とは, 次が成り立つこと:

(i) $\forall g, h \in G$, $\forall p \in M$, $(gh).p = g.(h.p)$,
(ii) $\forall p \in M$, $e.p = p$　(ただし e は G の単位元).

ここで定義した作用は厳密には **左作用** と呼ばれるものである. 群 G が集合 M に作用することを, 記号 $G \curvearrowright M$ で表すことが多い.

例 1.4. 次は作用である:

(1) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $g.v := gv$ で定めたもの,

(2) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times G_k(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n)$ を $g.V := \{gv \mid v \in V\}$ で定めたもの,

(3) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2 \to \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ を次の一次分数変換で定めたもの:

$$\left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right].z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

問題 1.5. 例 1.4 (3) の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ に取り替えたものは作用にならない. 理由を述べよ.

作用であることを定義に従って証明するのは面倒であることが多い. 次の命題は, 既知の作用から新しい作用を作る方法を与える. これにより, 数多くの作用が得られる.

命題 1.6. 群 G が集合 M に作用しているとする. このとき,

(1) 全ての部分群 $G' \subset G$ は M に作用する,

(2) 部分集合 $M' \subset M$ が G によって保たれているとする (すなわち, $\forall g \in G$, $\forall p \in M'$, $g.p \in M'$). このとき, G は M' に作用する.

例 1.4 と命題 1.6 を組み合わせることにより, 新しい作用が得られる.

例 1.7.

(1) $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}^n$ に作用する,

(2) $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{O}(n)$ は球面 S^{n-1} に作用する,

(3) $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{O}(n)$ は実グラスマン多様体 $G_k(\mathbb{R}^n)$ に作用する.

1.3 推移的な作用

推移的な作用を定義する. 実は, 前節で挙げた作用の例の多くは, 推移的になる.

定義 1.8. 群 G の集合 M への作用が **推移的** とは, 次が成り立つこと: $\forall p, q \in M$, $\exists g \in G : g.p = q$. また, 集合 M が **等質** とは, M への推移的な群作用が存在すること.

作用が推移的であることを示すためには, 次の補題を用いると便利.

補題 1.9. M を集合とし, $o \in M$ を固定する. このとき, 群 G の M への作用が推移的であることは, 次と同値: $\forall p \in M$, $\exists g \in G : g.p = o$.

問題 1.10. 補題 1.9 を示せ.

例 1.11. 次の作用は推移的である:

(1) $\mathrm{O}(n+1)$, $\mathrm{SO}(n+1)$ の S^n への作用,

(2) $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$ の $G_k(\mathbb{R}^n)$ への作用,

(3) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ への作用.

1.4　剰余集合 G/K

群 G と部分群 K に対して, 剰余集合 G/K を定義する.

定義 1.12. 群 G と部分群 K に対して, G 上の同値関係 $\sim$ を次で定義する: $g{\sim}h :\Leftrightarrow g^{-1}h \in K$. このとき, G の $\sim$ による商集合を G/K で表し, G の K による **剰余集合** (**coset space**) と呼ぶ.

この $\sim$ が同値関係であることは容易に確かめられる. この同値関係による同値類を $[\cdot]$ で表すと, 次が成立する: $G/K = \{[g] \mid g \in G\}$.

注意 1.13. 定義から明らかに次が成り立つ: $[g] = gK := \{gk \mid k \in K\}$.

特に K が正規部分群の場合には, G/K が群となる (剰余群と呼ばれるもの). ここでは K は正規部分群とは限らないので, G/K は一般には群にならないことに注意する.

1.5　主定理

集合 M が等質であることと $M = G/K$ と表示されることが同値である, という定理を示す. 定理の主張を正確に述べると, 以下のようになる.

定理 1.14.

(1) G/K を剰余集合とする. このとき, 群 G が G/K に推移的に作用する.

(2) 集合 M が等質であるとする. M に推移的に作用する群を G とし, また $p \in M$ に対して $G_p := \{g \in G \mid g.p = p\}$ とおくと, 剰余集合 G/G_p と M との間に全単射が存在する.

上で定義された部分群 $G_p := \{g \in G \mid g.p = p\}$ を, G の p における **固定部分群** と呼ぶ. 等質な集合 M を G/K で表示するためには, 固定部分群 G_p を求めれば良いことになる.

例 1.15. 球面 S^n, 実グラスマン多様体 $G_k(\mathbb{R}^n)$, 上半平面 $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ は, 次のような剰余集合として表示される:

(1) $S^n = \mathrm{O}(n+1)/\mathrm{O}(n)$, ただしここで

$$\mathrm{O}(n) \cong \left\{ \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \alpha \end{array} \right] \mid \alpha \in \mathrm{O}(n) \right\},$$

(2) $G_k(\mathbb{R}^n) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/Q_k$, ただしここで

$$Q_k := \left\{ \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array} \right] \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{R}), D \in \mathrm{GL}_{n-k}(\mathbb{R}) \right\},$$

(3) $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$.

等質集合 M を剰余集合で表示するときに, その表示方法は一通りとは限らないことに注意する. その理由は, M に推移的に作用する群が一つとは限らないことである.

例 1.16. 実グラスマン多様体 $G_k(\mathbb{R}^n)$ は, $G_k(\mathbb{R}^n) = \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k)$ と剰余集合表示することもできる. ただしここで,

$$\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k) := \left\{ \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & D \end{array} \right] \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A \in \mathrm{O}(k), D \in \mathrm{O}(n-k) \right\} \subset \mathrm{O}(n).$$

1.6 等質な集合の例

最後に, 球面やグラスマン多様体以外の有名な等質集合の例を, いくつか挙げる.

例 1.17. $V_k(\mathbb{R}^n) := \{(v_1, \ldots, v_k) \mid \{v_1, \ldots, v_k\}$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交系 $\}$ を **Stiefel 多様体** と呼ぶ. $V_k(\mathbb{R}^n)$ には, $\mathrm{O}(n)$ が自然な方法で推移的に作用し, $V_k(\mathbb{R}^n) = \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-k)$ と表示できる.

ちなみに $k=1$ のときには $V_1(\mathbb{R}^n) = S^{n-1}$ が成り立つ.

例 1.18. $F_{k_1,\ldots,k_r}(\mathbb{R}^n) := \{(V_{k_1}, \ldots, V_{k_r}) \mid V_{k_1} \subset \cdots \subset V_{k_r}$: 線型部分空間, $\dim V_{k_i} = k_i\}$ を **旗多様体** と呼ぶ. $F_{k_1,\ldots,k_r}(\mathbb{R}^n)$ には, $\mathrm{O}(n)$ が自然な方法で推移的に作用し, 次のように表示できる: $F_{k_1,\ldots,k_r}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(k_1) \times \mathrm{O}(k_2 - k_1) \times \cdots \times \mathrm{O}(k_r - k_{r-1}) \times \mathrm{O}(n - k_r)$.

ちなみに $r=1$ のときには $F_{k_1}(\mathbb{R}^n) = G_{k_1}(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ.

問題 1.19. 旗多様体 $F_{2,4}(\mathbb{R}^5)$ への $\mathrm{O}(5)$ の自然な作用を式で書け. また, 次のように剰余集合として表示されることを示せ: $F_{2,4}(\mathbb{R}^5) = \mathrm{O}(5)/\mathrm{O}(2) \times \mathrm{O}(2) \times \mathrm{O}(1)$. ただしここで, 自然な作用が推移的であることは認めて良い.

2　数学概論 (2010/04/19): 対称空間とカンドル

連結なリーマン多様体が対称空間であるとは, 各点に対して点対称が存在することである. またカンドルとは, 集合に所定の性質を満たす二項演算が定義されたものである. 本章では, 対称空間は等質なカンドルであることを紹介する. また, 等質な集合 G/K がカンドルになるための必要十分条件を, 組 (G, K) の言葉で述べる.

2.1　対称空間

ここでは対称空間を定義し, その例を紹介する. あまり深入りしないので, リーマン多様体は "距離が定義された多様体" のことだと思って構わない.

定義 2.1. 連結なリーマン多様体 M が **対称空間** であるとは, 各点 $p \in M$ に対して, 次を満たす写像 $s_p : M \to M$ が存在すること (このとき s_p を p における **点対称** と呼ぶ):

(i) s_p は等長変換 (すなわち, 距離を保つ微分同相写像),

(ii) $(s_p)^2 = \mathrm{id}$,

(iii) p は s_p の孤立固定点 (すなわち, $\mathrm{Fix}(s_p, M) := \{x \in M \mid s_p(x) = x\}$ 内で $\{p\}$ は開集合).

例 2.2. 次は対称空間である:

(1) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$, ただし $s_p(x) := 2p - x$,

(2) 円周 S^1, ただし $s_p(x) := 2\langle x, p\rangle p - x$,

(3) 球面 S^n, ただし s_p は (2) と同じ式で定義されるもの.

命題 2.3. M を対称空間とすると, 次が成り立つ:

(1) 等長変換群 $\mathrm{Isom}(M) := \{f : M \to M : \text{等長変換}\}$ が M に推移的に作用する,

(2) $\forall x, y \in M$, $s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$.

2.2　カンドル

ここでは, カンドルを定義し, その簡単な例を紹介する. 特に, 連結リーマン対称空間は自然にカンドルになる. カンドルは結び目の研究と深く関係するが, それについては本稿では触れない.

定義 2.4. X を集合, $* : X \times X \to X$ を写像とする. このとき $(X, *)$ が **カンドル** (あるいは, $*$ が X 上の **カンドル構造**) とは, 次が成り立つこと:

(i) $\forall x \in X$, $x * x = x$,

(ii) $\forall x, y \in X$, $\exists 1 z \in X : z * y = x$,

(iii) $\forall x, y, z \in X$, $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$.

例 2.5. 集合 X に対して, 演算 $*$ を $x * y := x$ で定義すると, $(X, *)$ はカンドルである (これを **自明カンドル** と呼ぶ).

命題 2.6. X を集合, 各点 $x \in X$ に対して写像 $s_x : X \to X$ が定まっているとする. このとき, $x * y := s_y(x)$ がカンドル構造となるための必要十分条件は, 次が成り立つこと:

(i)' $\forall x \in X,\ s_x(x) = x$,

(ii)' $\forall x \in X,\ s_x$ は全単射,

(iii)' $\forall x, y \in X,\ s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$.

上の条件 (i)'–(iii)' を満たすような $s : X \to \mathrm{Map}(X, X)$ も, 便宜的に **カンドル構造** と呼ぶ. ただしここで, $\mathrm{Map}(X, X) := \{f : X \to X : 写像\}$. また, カンドルを (X, s) で表すことにする.

例 2.7. 次はカンドルである:

(1) 連結リーマン対称空間に, カンドル構造を点対称で定めたもの,

(2) $R_n := \{(\cos(2k\pi/n), \sin(2k\pi/n)) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ に, S^1 上の点対称を制限してカンドル構造を定めたもの (これを **二面体カンドル** と呼ぶ).

2.3 等質なカンドル

カンドルが等質とは, 自己同型群が推移的に作用することと定義する. 全てのカンドルが等質とは限らないが, 等質なカンドルは群を使って調べることができる.

定義 2.8. カンドル X, Y に対して,

(1) 写像 $f : X \to Y$ が **準同型** とは, 次が成り立つこと: $\forall x \in X,\ f \circ s_x = s_{f(x)} \circ f$,

(2) 写像 $f : X \to Y$ が **同型** とは, 全単射かつ準同型であること,

(3) $\mathrm{Aut}(X) := \{f : X \to X : 同型\}$ を X の **自己同型群** と呼ぶ,

(4) X が **等質カンドル** とは, $\mathrm{Aut}(X)$ が X に推移的に作用すること.

定義 2.9. G を群, K をその部分群, $s_o \in K$ とする. このとき (G, K, s_o) が **カンドル組** とは, 次が成り立つこと: $s_o \in Z(K)$.

ここで $Z(K) := \{k \in K \mid \forall h \in K, kh = hk\}$ である. これを K の **中心** と呼ぶ.

定理 2.10. 等質なカンドルとカンドル組は対応する. すなわち,

(1) (X, s) を等質なカンドルとすると, $\forall x \in X,\ (\mathrm{Aut}(X), \mathrm{Aut}(X)_x, s_x)$ はカンドル組である,

(2) (G, K, s_o) をカンドル組とすると, $\exists 1 s :\ G/K$ 上のカンドル構造 s.t. $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ かつ $s_{[e]} = s_o$.

問題 2.11. 定理 2.10 (2) において, カンドル構造の存在は $s_{[g]} := g s_o g^{-1}$ とおくことによって示される. この $s_{[g]}$ が well-defined であることを示せ.

例 2.12. G を群, K をその部分群とする. このとき,

(1) (G, K, e) はカンドル組である (これを **自明なカンドル組** と呼ぶ). 対応するカンドルは自明カンドルである.

(2) (G, K, s_o) がカンドル組であるとすると, (G, K, s_o^{-1}) もカンドル組である (これを元のカンドル (G, K, s_o) の **共役カンドル組** と呼ぶ).

最後に注意. 対称空間は等質なカンドルであったので, カンドル組が対応する. 一方で, 等質なカンドルは対称空間になるとは限らないので, (G, K, s_o) から得られるカンドルが対称空間になるためには, もう少し条件が必要になる (例えば, 多様体構造を定義するために, 少なくとも G がリー群であることが必要).

2.4 カンドル組の例

ここでは, カンドルの例を紹介する. 特に, いくつかの対称空間をカンドルと見たときに, 対応するカンドル組を紹介する.

例 2.13. 球面 S^n に対応するカンドル組は, 次で与えられる:

$$(\mathrm{O}(n+1), \mathrm{O}(n), \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \hline & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{array}\right)).$$

問題 2.14. 円周 S^1 の場合に, 例 2.13 と例 2.2 (2) が一致していることを確かめよ. すなわち, カンドル組

$$(\mathrm{O}(2), \mathrm{O}(1), \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix})$$

から定理 2.10 (2) の方法で構成したカンドル構造が, 例 2.2 (2) で与えられた対称空間の構造と一致することを示せ.

例 2.15. 二面体カンドル R_n (例 2.7 参照) に対応するカンドル組 (G, K, s_o) は, 次で与えられる:

$$G := N_{\mathrm{O}(2)}(R_n) := \{g \in \mathrm{O}(2) \mid g(R_n) = R_n\}, \ s_o := \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \ K := G_{e_1} = \{e, s_o\}.$$

例 2.16. グラスマン多様体 $G_k(\mathbb{R}^n)$ に対応するカンドル組は, 次で与えられる:

$$(\mathrm{O}(n), \mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k), \begin{pmatrix} E_k & \\ & -E_{n-k} \end{pmatrix}).$$