平成 22 年度卒業論文

実特殊線形リー群の基本群

広島大学理学部数学科
B070930 飯田隆太
指導教員 田丸博士 准教授

平成 23 年 2 月 10 日

目次

1　はじめに

私は数学を学ぶ中で関手に興味もったのでその一例である基本群を取り上げる. 基本群は位相から代数への関手である. 本論文では, 特殊直交群の基本群が既知であるとして, 特殊線形群の基本群を求める. 本論文の構成は以下のようになっている.

第 2 章では, 本論文で扱う対象である古典群の定義を述べ, 古典群に位相を入れる. そして, 古典群の弧状連結性, コンパクト性を述べる. 次に, 基本群を定義するために必要な諸概念を述べ, 基本群を定義する. さらに, 主定理の証明に必要な基本群の直積についての定理を示す.

第 3 章では, 特殊線形群と特殊直交群を関係づけるために必要な特殊線形群の極分解を示す. まず, そのために正値と行列の指数写像を定義し, 極分解を示すために様々な補題の証明を与える.

第 4 章では, これまでに示した定理などを用い, 特殊線形群の基本群と特殊直交群の基本群が位相空間として同型になることを示す.

2 準備

2.1 古典群

この節では, 本論文で取り上げる古典群の定義を述べ, 古典群に位相を入れる. そして, 古典群の弧状連結性, コンパクト性を述べる.

定義 2.1.1 $\mathbb{R}$ 上の n 次正方行列全体の集合を次のように表す:

$$M(n,\mathbb{R}) = \{(a_{ij})_{i,j=1,\cdots,n} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}\}.$$

定義 2.1.2 $M(n,\mathbb{R})$ の n 次正則行列全体の集合を次のように表す:

$$GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n,\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}.$$

これは $\mathbb{R}$ 上の **一般線形群** とよばれる. また,

$$SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$$

はその部分群をなし, **特殊線形群** とよばれる.

定義 2.1.3 $\mathbb{R}^n$ 上の内積を保つ直交行列全体の集合を次のように表す:

$$O(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid {}^t AA = I_n\}.$$

これは **直交群** とよばれる. また特に,

$$SO(n) = O(n) \cap SL(n,\mathbb{R})$$

は **特殊直交群** とよばれる.

$GL(n,\mathbb{R})$, $SL(n,\mathbb{R})$, $O(n)$, $SO(n)$ は, それぞれ行列の積に関して群を成している.

また, 次の行列のノルムから定まる位相を入れる.

定義 2.1.4 行列 $X = (x_{ij})$ に対して,**行列のノルム** を次のように定める:

$$||X|| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} (||x_{ij}||^2)}.$$

$M(n,\mathbb{R})$ の 2 点 A, B の距離を $d(A,B)=||A-B||$ と定義すると, $M(n,\mathbb{R})$ は距離空間になる. よって, 距離から位相を定める. また, $M(n,\mathbb{R})$ の部分空間である古典群 $GL(n,\mathbb{R})$, $SL(n,\mathbb{R})$, $O(n)$, $SO(n)$ も距離空間になるので, 距離から位相を定める.

$GL(n,\mathbb{R})$, $SL(n,\mathbb{R})$, $O(n)$, $SO(n)$ において, 弧状連結性, 弧状連結成分の個数, コンパクト性について以下の表のようになることが知られている:

群	弧状連結性	弧状連結成分の個数	コンパクト性
$GL(n,\mathbb{R})$	×	2	×
$SL(n,\mathbb{R})$	○	1	×
$O(n)$	×	2	○
$SO(n)$	○	1	○

2.2 基本群

この節では, 基本群を定義するために必要な諸概念を述べ, 基本群を定義する. さらに, 主定理の証明に必要な基本群の直積についての定理を示す. また以下 X, Y は位相空間とする.

定義 2.2.1

1. 閉区間 $I=[0,1]$ から X への連続写像 $u: I\to X$ を X の **道** という. また, $u(0)$ を道 u の始点, $u(1)$ を終点という. 道 u を $u(0)$ と $u(1)$ を結ぶ道ともいう.
2. $x_0, x_1 \in X$ に対して, 点 x_0 と x_1 を結ぶ道 $u: I\to X$ 全体の集合を $\Omega(X,x_0,x_1)$ で表す.
3. 道 $u\in\Omega(X,x_0,x_1)$ に対して, $u^{-1}(t)=u(1-t)$ を道 u の **逆道** という.
4. 道 u, v を X の中の道で $u(1)=v(0)$ とするとき, 道 $u*v$ を

$$u*v=\begin{cases} u(2t) & (0\leq t\leq \frac{1}{2}) \\ v(2t-1) & (\frac{1}{2}\leq t\leq 1)\end{cases}$$

と定義し u と v の道の **積** という.

写像 $\phi: X\to Y$ を連続写像, 道 $u\in\Omega(X,x_0,x_1)$ とすると, $\phi u\in\Omega(Y,\phi(x_0),\phi(x_1))$ となる.

定義 2.2.2 $x_0, x_1\in X$ とする. 集合 $\Omega(X,x_0,x_1)$ の 2 つの道 u, v に対して

$$\begin{cases} F(t,0)=u(t), \quad F(0,s)=x_0 \\ F(t,1)=v(t), \quad F(1,s)=x_1 \end{cases}$$

をみたす連続写像 $F: I \times I \to X$ が存在するとき, 道 u と v は **ホモトープ** であるといい, $u \sim v$ または $u \sim v(F)$ と表す. 連続写像 F を u と v を結ぶ **ホモトピー** という.

補題 2.2.3 $u, v \in \Omega(X, x_0, x_1)$ において

$$u \sim v \Leftrightarrow u \text{ と } v \text{ はホモトープ}$$

と定義すると関係 $\sim$ は同値法則をみたす.

(証明開始) (i) 反射律, (ii) 対称律, (iii) 推移律を順番に示す. $u, v, w \in \Omega(X, x_0, x_1)$ とする.

(i) 反射律を示す. つまり, $u \sim u$ を示す. 写像 $F: I \times I \to X$ を $F(t,s) = u(t)$ と定義すると $u \sim u(F)$ である.

(ii) 対称律を示す. つまり, $u \sim v$ ならば $v \sim u$ を示す. $u \sim v(F)$ とすると, $F(t,0) = u(t)$ かつ $F(t,1) = v(t)$ であるから, $F': I \times I \to X$ を $F'(t,s) = F(t,1-s)$ と定義すると F' は連続であり, $F'(t,0) = F(t,1) = v(t)$ かつ $F'(t,1) = F(t,0) = u(t)$ となるので, $v \sim u(F')$ である.

(iii) 推移律を示す. つまり, $u \sim v$, $v \sim w$ ならば $u \sim w$ を示す. $u \sim v(F_1)$, $v \sim w(F_2)$ とすると, $F: I \times I \to X$ を

$$F(t,s) = \begin{cases} F_1(t, 2s) & (0 \leq s \leq \frac{1}{2}) \\ F_2(t, 2s-1) & (\frac{1}{2} \leq s \leq 1) \end{cases}$$

と定義すると F は連続で, $F(t,0) = F_1(t,0) = u(t)$ かつ $F(t,1) = F_2(t,1) = w(t)$ であるから F は u と w を結ぶホモトピーである. よって, $u \sim w(F)$ である. (証明終了)

位相空間 X の 1 点 x を固定し, $u: I \to X$ を $u(t) = x$ と定義すると, u は X の 1 つの道であるが, この道 u を 0_x または単に 0 で表し, 定値道という.

定義 2.2.4
1. X の道 u の始点と終点がともに x_0 であるとき, u を x_0 を **基点** とする **閉道**(または **ループ**) という.
2. $x \in X$ を基点とする閉道の同値類の集合 $\Omega(X, x, x)/\sim$ を $\pi_1(X, x)$ で表す. $\pi_1(X, x)$ を x を基点とする X の **基本群** という.
3. 任意の $x \in X$ に対して $\pi_1(X, x) = 0$ のとき X は **単連結** であるという.

基本群 $\pi_1(X, x)$ は $[u], [v] \in \pi_1(X, x)$ に対して, $[u][v] = [u * v]$ で定義される積をもち, 逆元は $[u]^{-1} = [u^{-1}]$ で与えられ, 単位元は $[0_x]$ である.

補題 2.2.5 $x_0, x_1 \in X$, $w \in \Omega(X, x_0, x_1)$ とする. このとき写像

$$w_* : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)\ ;\ w_*([u]) = [w][u][w^{-1}] = [w * u * w^{-1}]$$

は群同型写像である.

(証明開始) (i) w_* が群準同型写像であること, (ii) w_* は全単射を順番に示す.

(i) w_* が群準同型写像であることを示す. $[u], [v] \in \pi_1(X, x_1)$ をとる.

$$\begin{aligned} w_*([u])w_*([v]) &= [w][u][w^{-1}][w][v][w^{-1}] \\ &= [w][u][0_{x_1}][v][w^{-1}] \\ &= [w][u][v][w^{-1}] \\ &= [w][u * v][w^{-1}] \\ &= w_*([u][v]) \end{aligned}$$

となる.

(ii) w_* は全単射を示す. $[u] \in \pi_1(X, x_0)$ をとる. $w^{-1} \in \Omega(X, x_0, x_1)$ は群準同型写像

$$w_*^{-1} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)\ ;\ w_*^{-1}([u]) = [w^{-1} * u * w]$$

を誘導する. このとき,

$$\begin{aligned} w_*^{-1}w_*([u]) &= w_*^{-1}([w * u * w^{-1}]) \\ &= [w^{-1} * w * u * w^{-1} * w] \\ &= [0_{x_1} * u * 0_{x_1}] \\ &= [u] \end{aligned}$$

であるから, $w_*^{-1}w_* = 1$ である. 同様に $w_*w_*^{-1} = 1$ となる. よって, w_* は全単射である.

(証明終了)

X が弧状連結空間のとき, X の任意の 2 点 x_0, x_1 は道で結べるので, x_0, x_1 を基点とする X の基本群は群として同型である: $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$. したがってこの群は基点 x の取り方に関係せず X のみで定まる基本群と考えて $\pi_1(X)$ で表す.

補題 2.2.6 写像 $\phi : X \to Y$ を連続写像とする. このとき写像

$$\phi_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, \phi(x))\ ;\ \phi_*[u] = [\phi u]$$

は群準同型写像である.

(証明開始) (i) well-defined である, (ii) 群準同型であることを順番に示す.

(i) well-defined であることを示す. $u \sim v$ をみたすような $u, v \in \Omega(X, x, x)$ をとる. このとき $\phi u, \phi v \in \Omega(Y, \phi(x), \phi(x))$ である. ここで, $u \sim v$ より

$$\begin{cases} F(t,0) = u(t), & F(0,s) = x \\ F(t,1) = v(t), & F(1,s) = x \end{cases}$$

をみたす連続写像 $F : I \times I \to X$ が存在する. よって, 連続写像 $\phi F : I \times I \to Y$ は

$$\begin{cases} \phi F(t,0) = \phi u(t), & \phi F(0,s) = \phi(x) \\ \phi F(t,1) = \phi v(t), & \phi F(1,s) = \phi(x) \end{cases}$$

であり, ϕu と ϕv を結ぶホモトピーである. したがって, $\phi u \sim \phi v$ である.

(ii) 群準同型であることを示す. $\forall [u], [v] \in \pi_1(X, x)$ をとる. すると

$$\begin{aligned} \phi_*([u][v]) &= \phi_*([u * v]) \\ &= [\phi(u * v)] \\ &= [(\phi u) * (\phi v)] \\ &= [\phi u][\phi v] \\ &= \phi_*[u]\phi_*[v] \end{aligned}$$

となる. (証明終了)

これを連続写像 $\phi : X \to Y$ から **誘導された準同型** という.

補題 2.2.7 写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を連続写像とするとき, $(fg)_* = f_* g_*$ が成り立つ.

(証明開始) $\forall [u] \in \pi_1(X, x)$ をとる. すると

$$\begin{aligned} (fg)_*[u] &= [fgu] \\ &= f_*[gu] \\ &= f_* g_*[u] \end{aligned}$$

が成り立つ. (証明終了)

ここで, 主定理の証明に重要な基本群の直積の定理を示す.

定理 2.2.8 点 $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ を与える. このとき, 次の 2 つの群は群として同型である:

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

(証明開始) (i) 群準同型写像を定めて, (ii) 群準同型写像が全単射であることを順番示す.

まず, 準備として次の写像を定める. X, Y への射影をそれぞれ

$$p : X \times Y \to X, \quad q : X \times Y \to Y$$

とする. また, 写像 $i : X \to X \times Y$, $j : Y \to X \times Y$ をそれぞれ,

$$i(x) = (x, y_0), \quad j(y) = (x_0, y)$$

と定義する. このとき

$$pi = 1,\ pj(y) = x_0,\ qj = 1,\ qi(x) = y_0$$

であるから, 補題 2.2.7 より,

$$p_*i_* = 1_*,\ p_*j_* = [0_{x_0}],\ q_*j_* = 1_*,\ q_*i_* = [0_{y_0}]$$

が成り立つ.

(i) 群準同型写像を定める. 写像 ϕ を

$$\phi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi(Y, y_0)\ ;\ \phi(\gamma) = (p_*(\gamma), q_*(\gamma))$$

と定義すると, p_* と q_* は準同型写像だから, ϕ は準同型写像である.

(ii) ϕ が全単射であることを示す.

まず, 全射を示す. $\forall(\alpha, \beta) \in \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ をとる. このとき $\gamma = i_*(\alpha)j_*(\beta) \in \phi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ とおく. すると,

$$\begin{aligned}
\phi(\gamma) &= (p_*(\gamma),\ q_*(\gamma)) \\
&= (p_*(i_*(\alpha)j_*(\beta)),\ q_*(i_*(\alpha)j_*(\beta))) \\
&= ((p_*i_*(\alpha))(p_*j_*(\beta)),\ (q_*i_*(\alpha))(q_*j_*(\beta))) \\
&= ((p_*i_*(\alpha))[0_{x_0}],\ [0_{y_0}](q_*j_*(\beta))) \\
&= (p_*i_*(\alpha),\ q_*j_*(\beta)) \\
&= (\alpha, \beta).
\end{aligned}$$

したがって, ϕ は全射である.

次に, 単射を示す. つまり $\mathrm{Ker}(\phi) = \{[0_{(x_0,y_0)}]\}$ となることを示す. 任意に $\gamma = [u] \in \mathrm{Ker}(\phi)$ をとる. 定義より $\phi(\gamma) = ([0_{x_0}], [0_{y_0}])$ である. すると,

$$\begin{aligned}
([0_{x_0}], [0_{y_0}]) &= \phi(\gamma) \\
&= \phi([u]) \\
&= (p_*[u], q_*[u]) \\
&= ([pu], [qu]).
\end{aligned}$$

よって, $pu \sim 0_{x_0}$, $qu \sim 0_{y_0}$ であるから,

$$\begin{cases} F_1(t,0) = pu(t), & F_1(0,s) = x_0, \\ F_1(t,1) = x_0, & F_1(1,s) = x_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} F_2(t,0) = qu(t), & F_2(0,s) = y_0, \\ F_2(t,1) = y_0, & F_2(1,s) = y_0 \end{cases}$$

をみたす, それぞれのホモトピー $F_1 : I \times I \to X$, $F_2 : I \times I \to Y$ が存在する. これらを用いて, $F : I \times I \to X \times Y$ を $F = F_1 \times F_2$ で定義すると,

$$\begin{cases} F(t,0) = (pu(t), qu(t)), & F(0,s) = (x_0, y_0), \\ F(t,1) = (x_0, y_0), & F(1,s) = (x_0, y_0) \end{cases}$$

が成り立つ. よって F は (pu, qu) と $0_{(x_0,y_0)}$ を結ぶホモトピーである. ここで, $u(t) = (pu(t), qu(t))$ より, F は u と $0_{(x_0,y_0)}$ を結ぶホモトピーである. したがって, $\gamma = [u] = [0_{(x_0,y_0)}]$ となり, ϕ は単射である. (証明終了)

命題 2.2.9 $\mathbb{R}$ は単連結である.

(証明開始) $\mathbb{R}$ は弧状連結であるから, $\pi_1(\mathbb{R}, 0) = 0$ を示せばよい. $\mathbb{R}$ の 0 における任意の閉道 $u : I \to \mathbb{R}$ をとる. このとき写像 $F : I \times I \to \mathbb{R}$; $F(t,s) = u(t)(1-s)$ は u と 0 を結ぶホモトピーである. よって, $u \sim 0$ であるから, $[u] = 0$ となる. したがって, $\mathbb{R}$ は単連結である. (証明終了)

また, 定理 2.2.8 より, その直積空間である $\mathbb{R}^n$ も単連結であることがわかる.

3 実特殊線形群の極分解

この章では, 実特殊線形群 $SL(n,\mathbb{R})$ の極分解を示す. そのためにまず, 正値と行列の指数写像を定義し, 極分解を示すために様々な補題の証明を与える.

3.1 正値

この節では, 正値の定義を述べ, 正値と同値な命題を示す.

定義 3.1.1 行列 $X \in M(n,\mathbb{R})$ が ${}^tX = X$ をみたすとき, X を n 次 $\mathbb{R}$ -**Hermite 行列**または, 実対称行列という. n 次 $\mathbb{R}$ -Hermite 行列全体の集合を次のように表すこととする:

$$\Im(n,\mathbb{R}) = \{X \in M(n,\mathbb{R}) \mid X = {}^tX\}.$$

定義 3.1.2 行列 $P \in \Im(n,\mathbb{R})$ が **正値** であるとは, 次をみたすことである.

$$\forall x \in (\mathbb{R}^n)^\times \text{に対して } \langle x, Px\rangle > 0.\ \ (\langle , \rangle \text{ は } \mathbb{R}^n \text{上の標準的内積.})$$

また, n 次正値 $\mathbb{R}$ -Hermite 行列全体の集合を $\Im_+(n,\mathbb{R})$ で表すこととする.

命題 3.1.3 任意の行列 $P \in \Im(n,\mathbb{R})$ に対して, 次の 3 つの条件は同値である.

(1) 行列 P は正値 $\mathbb{R}$ -Hermite 行列.
(2) 行列 P のすべての固有値は正.
(3) $P = Q^2$ となるような $Q \in \Im_+(n,\mathbb{R})$ が存在する.

(証明開始) (1) から (2) を示す. 固有値 λ_k に対する固有値を x_k とする. ただし, $k = 1, 2, \ldots, n$. $\forall k$ に対して,

$$Px_k = \lambda_k x_k$$

が成り立つ. 両辺に ${}^tx_k$ をかけると

$${}^tx_k P x_k = \lambda_k ||x_k||^2,$$

$$\langle x_k, Px_k\rangle = \lambda_k ||x_k||^2$$

が成り立つ. 仮定と $||x_k||^2 > 0$ より,

$$\lambda_k > 0.$$

したがって, 正値 $\mathbb{R}$ -Hermite 行列 P のすべての固有値は正である.

(2) から (3) を示す. $\forall P \in \Im(n, \mathbb{R})$ は, ある $A \in O(n)$ を用いて, 次のように対角化可能である.

$$P = ADA^{-1}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_k \in \mathbb{R}$$

P のすべての固有値は正より, $\lambda_k > 0$ であるから,

$$Q = A \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} A^{-1}$$

とおくと, $Q \in \Im(n, \mathbb{R})$ であり, $P = Q^2$ である.

(3) から (1) を示す. $\forall x \in (\mathbb{R}^n)^\times$ をとる.

$$\begin{aligned} \langle x, Px \rangle &= {}^t x P x \\ &= {}^t x Q Q x \\ &= {}^t x {}^t Q Q x \quad (\because Q \in \Im(n, \mathbb{R})) \\ &= \langle Qx, Qx \rangle \geq 0 \end{aligned}$$

$\langle x, Px \rangle = 0$ となるのは, $x = 0$ のときのみである. $x \in (\mathbb{R}^n)^\times$ だから, $\langle x, Px \rangle > 0$ である. (証明終了)

3.2 指数写像

この節では, 行列の指数写像を定義し, 性質を証明する. まず, 定義 2.1.4 の行列のノルムについて, 次の性質が成り立つ.

補題 3.2.1 $\forall X, Y \in M(n, \mathbb{R})$ に対して, 次の不等式が成立する:

(1) $\forall (i, j), |a_{ij}| \leq ||X||$.
(2) $||XY|| \leq ||X||\ ||Y||$.

(証明開始)

(1) 行列のノルムの定義より明らか.
(2) $\forall X, Y \in M(n, \mathbb{R})$ をとる. $||X|| \geq 0, ||Y|| \geq 0$ であるから $||XY||^2 \leq ||X||^2 ||Y||^2$

を示す. $A = XY$ とする. すると,

$$\begin{aligned}||XY||^2 &= ||A||^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} (|x_{ik}||y_{kj}|) \right|^2 \\ &\leq \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_{ik}|^2 \sum_{l=1}^{n} |y_{lj}|^2 \right) (\because \text{シュワルツの不等式}) \\ &= \sum_{i,k=1}^{n} |x_{ik}|^2 \sum_{l,j=1}^{n} |y_{lj}|^2 \\ &= ||X||^2 ||Y||^2\end{aligned}$$

となる.

(証明終了)

定義 3.2.2 $X \in M_n(\mathbb{R})$ に対して, **行列の指数写像** exp を次のように定める:

$$\exp X = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{X^n}{n!} \right).$$

指数写像 exp を定義するには, 収束することを証明しなければならないので, 次の命題を考える.

命題 3.2.3 $X \in M(n, \mathbb{R})$ に対して $\exp X$ は絶対収束する.

(証明開始) $\forall (i, j)$ をとる.

$$\exp X_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(X^n)_{ij}}{n!} \right)$$

なので,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(X^n)_{ij}}{n!}\right| &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}|(X^n)_{ij}| \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}||X^n|| \qquad (\because \text{補題 } 3.2.1(1)) \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}||X||^n \qquad (\because \text{補題 } 3.2.1(2)) \\
&= \exp||X|| \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

したがって, $\exp X$ は絶対収束する. (証明終了)

次に, 行列の指数写像の基本的な性質を挙げる.

補題 3.2.4 任意の行列 $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$ に対して, 次が成立する:

(1) $\exp(AXA^{-1}) = A(\exp X)A^{-1}$ (ただし, $A \in GL(n, \mathbb{R})$).

(2) X の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ とすると, $\exp X$ の固有値は $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_n}$ である.

(3) $\det(\exp X) = e^{\mathrm{tr}(X)}$.

(証明開始)

(1) $(AXA^{-1})^k = AX^kA^{-1}$ であるから,

$$\exp(AXA^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(AXA^{-1})^k}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{AX^kA^{-1}}{n!} = A\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{X^k}{n!}\right)A^{-1} = A(\exp X)A^{-1}$$

となる.

(2) $X \in M(n, \mathbb{R})$ は三角化可能であるから, ある $B \in O(n)$ により, 次のように変形できる.

$$B^{-1}XB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

よって,

$$B^{-1}(\exp X)B = \exp(B^{-1}XB) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & * & * \\ & \ddots & * \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

となる. したがって, $\exp X$ の固有値は, $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_n}$ である.

(3) 前の (2) の証明と同じ記号を用いて示す.

$$\begin{aligned}\det(\exp X) &= \det(B^{-1}(\exp X)B)\\ &= \det(\exp(B^{-1}XB))\\ &= e^{\lambda_1}e^{\lambda_2}\cdots e^{\lambda_n}\\ &= e^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}\\ &= e^{\mathrm{tr}(B^{-1}XB)}\\ &= e^{\mathrm{tr}(XBB^{-1})}\\ &= e^{\mathrm{tr}(X)}\end{aligned}$$

となる. (証明終了)

3.3 特殊線形群の極分解

この節では, 実特殊線形群は特殊直交群とあるユークリッド空間の直積と位相空間として同型になることを示す. まず, 記号を導入する:

$$D\Im(n,\mathbb{R}) = \{X \in \Im(n,\mathbb{R}) \mid X \text{ は対角行列 }\},$$

$$D\Im_+(n,\mathbb{R}) = \{X \in \Im_+(n,\mathbb{R}) \mid X \text{ は対角行列 }\}.$$

補題 3.3.1 写像 $\exp : D\Im(n,\mathbb{R}) \to D\Im_+(n,\mathbb{R})$ は同相写像である.

(証明開始)

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in D\Im(n,\mathbb{R})$$

ならば,

$$\exp D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \in D\Im_+(n,\mathbb{R})$$

である. したがって, 明らかに写像 $\exp : D\Im(n,\mathbb{R}) \to D\Im_+(n,\mathbb{R})$ は連続, 全単射である. また, 写像 exp の逆写像は

$$\log : D\Im_+(n,\mathbb{R}) \to D\Im(n,\mathbb{R})\ ;\ \log\begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \log\mu_n \end{pmatrix}$$

であるから, 明らかに連続である. (証明終了)

補題 3.3.2 $X \in \Im(n,\mathbb{R}), A \in O(n)$ に対して, $A(\exp X) = (\exp X)A$ ならば, $AX = XA$ が成り立つ.

(証明開始) まず, X が対角行列 $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ であるとき, 成り立つことを示す. $D \in \Im(n,\mathbb{R})$, $A = (a_{ij}) \in O(n)$ に対して, $\exp D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$ であるから,

$$A(\exp D) = (\exp D)A.$$

成分でみると,

$$(a_{ij}e^{\lambda_j}) = (e^{\lambda_i}a_{ij}).$$

すなわち, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$a_{ij}e^{\lambda_j} = e^{\lambda_i}a_{ij}$$

が成り立つ. ゆえに,

$$a_{ij}(e^{\lambda_j} - e^{\lambda_i}) = 0.$$

つまり,

$$a_{ij} = 0 \text{ または } (e^{\lambda_j} - e^{\lambda_i}) = 0$$

となるから,

$$a_{ij} = 0 \text{ または } (\lambda_j - \lambda_i) = 0.$$

よって,

$$a_{ij}(\lambda_j - \lambda_i) = 0,$$

$$a_{ij}\lambda_j = \lambda_i a_{ij}$$

となるので,

$$AD = DA.$$

次に, 一般の $X \in \Im(n,\mathbb{R})$ に対して示す. $X \in \Im(n,\mathbb{R})$ は対角化可能より, ある $B \in O(n)$ をとり, $B^{-1}XB = D \in D\Im(n,\mathbb{R})$ とできる. $A(\exp X) = (\exp X)A$ とすると,

$$A(\exp BDB^{-1}) = (\exp BDB^{-1})A$$

となる. 補題 3.2.4(1) より,

$$AB\exp(D)B^{-1} = B\exp(D)B^{-1}A$$

となり,

$$B^{-1}AB\exp(D) = \exp(D)B^{-1}AB$$

となる. ここで, $B^{-1}AB \in O(n)$ であるから, 前半で示したことより,

$$B^{-1}ABD = DB^{-1}AB.$$

したがって,

$$ABDB^{-1} = BDB^{-1}A$$

となり,

$$AX = XA.$$

(証明終了)

補題 3.3.3 (1) $\Im(n,\mathbb{R})$ は $M(n,\mathbb{R})$ の閉集合である.
(2) $D\Im_+(n,\mathbb{R})$ は $GL(n,\mathbb{R})$ の閉集合である.

(証明開始)

(1) 写像 $f : M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R}), f(X) = {}^tX - X$ は連続であり, かつ $\Im(n,\mathbb{R})$ は 1 点 $\{0\} \subset M(n,\mathbb{R})$ の f による逆像であるから,$\Im(n,\mathbb{R})$ は $M(n,\mathbb{R})$ の閉集合である.
(2) 集合 $D\Im'(n,\mathbb{R}) = \{D \in D\Im(n,\mathbb{R}) \mid D$ の対角成分の元$\lambda_k \geq 0, k = 1,2,\ldots\}$ は $M(n,\mathbb{R})$ の閉集合. そして, $D\Im_+(n,\mathbb{R}) = D\Im'(n,\mathbb{R}) \cap GL(n,\mathbb{R})$ より $D\Im_+(n,\mathbb{R})$ は $M(n,\mathbb{R})$ の閉集合である. (証明終了)

補題 3.3.4 $D_m \in D\Im(n,\mathbb{R}), m = 1,2,\ldots$ に対して, $\exp D_1, \exp D_2, \ldots, \exp D_m, \ldots$ が収束するならば, $D_1, D_2, \ldots, D_m, \ldots$ も収束する. そして, $\lim_{m\to\infty} \exp D_m = P, \lim_{m\to\infty} D_m = D$ とおくと $P \in D\Im_+(n,\mathbb{R}), D \in D\Im(n,\mathbb{R})$ でありかつ, $P = \exp D$ となる.

(証明開始) 補題 3.3.1 より, 写像 $\exp : D\Im(n,\mathbb{R}) \to D\Im_+(n,\mathbb{R})$ は同相写像であるから, この逆写像 $\log : D\Im_+(n,\mathbb{R}) \to D\Im(n,\mathbb{R})$ も連続である. したがって, $D_m \in D\Im(n,\mathbb{R}), m = 1,2,\ldots$ に対して, $\exp D_1, \exp D_2, \ldots, \exp D_m, \ldots$ が収束するならば, $D_1, D_2, \ldots, D_m, \ldots$ も収束する.

$P \in D\Im_+(n,\mathbb{R})$ であることを示す. $\exp D_m \in D\Im_+(n,\mathbb{R})$ であり, 補題 3.3.3 (2) より, $D\Im_+(n,\mathbb{R})$ は $GL(n,\mathbb{R})$ の閉集合である. よって, $D\Im(n,\mathbb{R})$ も $GL(n,\mathbb{R})$ の閉集合である. $\lim_{m\to\infty} \exp D_m = P$ とおくと $P \in D\Im_+(n,\mathbb{R})$ である.

$D \in D\Im(n,\mathbb{R})$ と $P = \exp D$ となることを示す. $\lim_{m\to\infty} \exp D_m = P$ に $\log$ を施すと, $\lim_{m\to\infty} D_m = \log P$ となる. したがって, $\lim_{m\to\infty} D_m = D$ とおくと, $P = \exp D$ となり, かつ $D \in D\Im(n,\mathbb{R})$ となる. (証明終了)

写像 $\exp : M(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$ は連続であることを示す前に次の補題を与える.

補題 3.3.5 $X, X_1, X_2, \ldots, X_m, \ldots \in M(n,\mathbb{R})$ に対して $||X|| \leq a, ||X_m|| \leq a$ $(m = 1, 2, \cdots)$ をみたす $a \in \mathbb{R}$ が存在するとき, 次が成り立つ.

$$||{X_m}^n - X^n|| = na^{n-1}||X_m - X||.$$

(証明開始)

$$\begin{aligned}
||{X_m}^n - X^n|| &= \left|\left|X_m({X_m}^{n-1} - X^{n-1} + (X_m - X)X^{n-1})\right|\right| \\
&\leq (||X_m||||{X_m}^{n-1} - X^{n-1}|| + ||X_m - X||||X^{n-1}||) \\
&\leq (a||{X_m}^{n-1} - X^{n-1}|| + ||X_m - X||a^{n-1}) \\
&\leq \cdots \\
&\leq (a(n-1)a^{n-2}||X_m - X|| + ||X_m - X||a^{n-1}) \\
&= ((n-1)a^{n-1} + a^{n-1})||X_m - X||) \\
&= na^{n-1}||X_m - X||
\end{aligned}$$

(証明終了)

命題 3.3.6 写像 $\exp : M(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$ は連続である.

(証明開始) $\lim_{m\to\infty} X_m = X$ ならば, $\lim_{m\to\infty} \exp X_m = \exp X$ となることを示す. 任意の行列の点列 $\{X_m\}_{m=1}^{\infty} \subset M(n,\mathbb{R})$ をとる. $X \in M(n,\mathbb{R})$ に対して, $\lim_{m\to\infty} X_m = X$ とすると, $X_1, X_2, \ldots, X_m, \ldots$ は収束するので, 有界である. すなわち, $||X|| \leq a$, $||X_m|| \leq a$ $(m = 1, 2, \ldots)$ をみたす $a \in \mathbb{R}$ が存在する. ここで,

$$
\begin{aligned}
\left\|\sum_{n=0}^{N}\frac{{X_m}^n}{n!}-\sum_{n=0}^{N}\frac{X^n}{n!}\right\| &= \left\|\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}({X_m}^n-X^n)\right\| \\
&\leq \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}\,||({X_m}^n-X^n)|| \\
&= \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}na^{n-1}||X_m-X|| \quad (\because \text{補題 3.3.5}) \\
&= \sum_{n=0}^{N}\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}||X_m-X||
\end{aligned}
$$

$N\to\infty$ とすると, $||\exp X_m-\exp X||\leq e^a||X_m-X||$ を得る. さらに, この式において $m\to\infty$ とすると $||\exp X_m-\exp X||\to 0$ すなわち, $\lim_{m\to\infty}\exp X_m=\exp X$ となり示せた. (証明終了)

これらの補題をを用いて写像 $\exp:\Im(n,\mathbb{R})\to\Im_+(n,\mathbb{R})$ は同相写像であることを示す.

命題 3.3.7 写像 $\exp:\Im(n,\mathbb{R})\to\Im_+(n,\mathbb{R})$ は同相写像である.

(証明開始) 命題 3.3.6 で, 連続写像であることは既に示したので, (i) 全射, (ii) 単射, (iii) 逆写像が連続であることを順番に示す.

(i) 全射を示す. $\forall P\in\Im_+(n,\mathbb{R})$ をとる. P は対角化可能より, ある $A\in O(n)$ をとり, $A^{-1}PA\in D\Im_+(n,\mathbb{R})$ とできる. ここで, $\exp:D\Im(n,\mathbb{R})\to D\Im_+(n,\mathbb{R})$ は全射であるから, $A^{-1}PA\in D\Im_+(n,\mathbb{R})$ に対して, $D\in D\Im(n,\mathbb{R})$ を $\exp D=A^{-1}PA$ となるようにとる. $X=ADA^{-1}$ とおくと, $X\in\Im(n,\mathbb{R})$ であり,

$$
\begin{aligned}
\exp X &= \exp(ADA^{-1}) \\
&= A\exp(D)A^{-1} \\
&= AA^{-1}PAA^{-1} \\
&= P
\end{aligned}
$$

となる.

(ii) 単射を示す. $X,Y\in\Im(n,\mathbb{R})$ に対して, $\exp X=\exp Y(=P)$ であるとする. X,Y は対角化可能より, ある $A,B\in O(n)$ をとり, $X=AD_XA^{-1},Y=BD_YB^{-1}$ とできる. $\exp D_X=A^{-1}PA$, $\exp D_Y=B^{-1}PB$ であるから, $\exp D_X$ と $\exp D_Y$ は同じ固有値を持つ. ゆえに, D_X の対角成分を入れ替えて, D_Y と一致させることができる. すなわ

ち, $C \in O(n)$ をとり, $CD_XC^{-1} = D_Y$ とできる. ここで,

$$\begin{aligned}\exp X &= \exp Y \\ &= \exp(BD_YB^{-1}) \\ &= \exp(BCD_XC^{-1}B^{-1}) \\ &= \exp(BCA^{-1}XAC^{-1}B^{-1}) \\ &= \exp((BCA^{-1})X(BCA^{-1})^{-1}) \\ &= (BCA^{-1})\exp(X)(BCA^{-1})^{-1}\end{aligned}$$

となり, $BCA^{-1} \in O(n)$ より補題 3.3.2 を用いて, $X = (BCA^{-1})X(BCA^{-1})^{-1}$ を得る. したがって,

$$\begin{aligned}X &= (BCA^{-1})X(BCA^{-1})^{-1} \\ &= BCA^{-1}XAC^{-1}B^{-1} \\ &= BCD_XC^{-1}B^{-1} \\ &= BD_YB^{-1} \\ &= Y\end{aligned}$$

となる.

(iii) exp の逆写像が連続であることを示す. そのために, exp は閉写像であることをを示す。つまり, F を $\Im(n,\mathbb{R})$ の閉集合とし, $\exp F$ が $\Im_+(n,\mathbb{R})$ の閉集合であることを示す. そのためには, 点列 $X_1, X_2, \ldots, X_m, \ldots \in F$ に対して, $\lim_{m\to\infty} \exp X_m = P, P \in \Im_+(n,\mathbb{R})$ ならば, ある $X \in F$ が存在して $P = \exp X$ と表されることを示せばよい. 各 X_m に対して対角化可能より, ある $A_m \in O(n)$ をとり,

$$A_m{}^{-1}X_mA_m = D_m \in D\Im(n,\mathbb{R})$$

とできる. $O(n)$ はコンパクトであるから点列 $A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots$ から収束する部分列点列 $A_{k1}, A_{k2}, \ldots, A_{km}, \ldots$ を選びだせる. $\lim_{m\to\infty} A_{km} = A$ とおく. いま, 点列 $X_1, X_2, \ldots, X_m, \ldots$ の部分列 $X_{k1}, X_{k2}, \ldots, X_{km}, \ldots$ に対して,

$$A_{km}^{-1}X_{km}A_{km} = D_{km} \in D\Im(n,\mathbb{R})$$

が成り立っている. このとき,

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} \exp D_{km} &= \lim_{m\to\infty} \exp(A_{km}^{-1}X_{km}A_{km}) \\ &= \lim_{m\to\infty} A_{km}^{-1}(\exp X_{km})A_{km} \\ &= A^{-1}PA\end{aligned}$$

となる． ゆえに，$D_{k1}, D_{k2}, \ldots, D_{km}, \ldots$ は収束するので，$D_1, D_2, \ldots, D_m, \ldots$ も収束する．また，$\lim_{m\to\infty} D_{km} = D$ とおくと，補題 3.3.4 より，$\exp D = A^{-1}PA$ となる．$X = ADA^{-1}$ とおくと，

$$\exp X = \exp(ADA^{-1}) = A(\exp D)A^{-1} = AA^{-1}PA^{-1}A = P$$

である．ここで，

$$\lim_{m\to\infty} X_{km} = \lim_{m\to\infty} A_{km}D_{km}A_{km}^{-1} = ADA^{-1} = X$$

であるが，F が $\Im(n,\mathbb{R})$ の閉集合となるので，部分列 $X_{k1}, X_{k2}, \ldots, X_{km}, \ldots$ の極限 X は，点列 $X_1, X_2, \ldots, X_m, \ldots \in F$ の極限であり F の元である．したがって，exp は閉写像である．

(証明終了)

記号を導入する:

$$\Im^0(n,\mathbb{R}) = \{P \in \Im(n,\mathbb{R}) | \mathrm{tr}(P) = 0\},$$

$$\Im^0_+(n,\mathbb{R}) = \{P \in \Im_+(n,\mathbb{R}) | \det P = 1\}.$$

定理 3.3.8 $A \in SL(n,\mathbb{R})$ は

$$A = RP,\ R \in SO(n),\ P \in \Im^0_+(n,\mathbb{R})$$

の形に一意に表すことができる．

(証明開始) (i) P を定める，(ii) R を定める，(iii) 一意性を順番に示す．

(i) P を定める．$\forall A \in SL(n,\mathbb{R})$ をとる．行列 A に対して，${}^tAA$ を考えると，これは正値実対称行列である．なぜなら，

$${}^t({}^tAA) = {}^tA{}^t({}^tA) = {}^tAA$$

が成り立つので対称行列であり，$\forall x \in (\mathbb{R}^n)^\times$ に対して

$$\langle x, {}^tAAx\rangle = {}^tx{}^tAAx = \langle Ax, Ax\rangle > 0$$

が成り立つので正値である．したがって，${}^tAA \in \Im_+(n,\mathbb{R})$． ${}^tAA$ の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ とする． 命題 3.1.3(2) より，正値実対称行列の固有値は正の実数であるから，$\lambda_k > 0$ $(k = 1, \ldots, n)$ である．${}^tAA$ をある $B \in O(n)$ で対角化すると

$${}^tAA = B\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}B^{-1}.$$

ここで,

$$P = B \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} B^{-1}$$

と定めると, $P \in \Im_+(n, \mathbb{R})$ である. なぜなら, 対称行列であることは明らで, P のすべての固有値が正であるから正値である.

ここで, $\det P = 1$ であることを示す.

$$\begin{aligned} P^2 &= B \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} B^{-1} B \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} B^{-1} \\ &= B \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} B^{-1} \\ &= {}^t AA \end{aligned}$$

となり, $\det P^2 = \det({}^t AA) = 1$. つまり $\det P = \pm 1$ であるが, P のすべての固有値が正であるから $\det P = 1$

(ii) R を定める. $R = AP^{-1}$ と定める. $R \in O(n)$ である. なぜなら,

$$\begin{aligned} {}^t RR &= {}^t (AP^{-1}) \\ &= {}^t P^{-1} {}^t AAP^{-1} \\ &= {}^t P^{-1} P^2 P^{-1} ({}^t AA = P^2) \\ &= {}^t P^{-1} {}^t PPP^{-1} (P^2 = {}^t PP) \\ &= I_n. \end{aligned}$$

また, $R \in SO(n)$ である. なぜなら, $RP = A$ に対して, $\det(RP) = \det A = 1$ であり, $\det P = 1$ であったから $\det R = 1$.

(iii) 一意性を示す. $A \in SL(n, \mathbb{R})$ に対して, $R, S \in SO(n)$, $P, Q \in \Im_+(n, \mathbb{R})$ として, $A = RP$, $A = SQ$ となるとすると,

$$\begin{aligned} P^2 &= P^t RRP \\ &= {}^t (RP) RP \\ &= {}^t AA \end{aligned}$$

となる. 同様に $Q^2 = {}^t AA$ となる. よって, $P^2 = Q^2$ である. ここで命題 3.3.7 より, 写像 $\exp : \Im(n, \mathbb{R}) \to \Im_+(n, \mathbb{R})$ は全射であるから, $P = \exp X$, $Q = \exp Y$ となるような

$X, Y \in \Im(n, \mathbb{R})$ が存在する．$P^2 = Q^2$ より, $\exp 2X = \exp 2Y$．また, exp は単射より, $2X = 2Y$. よって, $X = Y$．したがって, $P = Q$. これにより, $R = S$ も従う．

(証明終了)

記号を確認する:

$$\Im^0(n, \mathbb{R}) = \{P \in \Im(n, \mathbb{R}) | \mathrm{tr}(P) = 0\},$$

$$\Im^0_+(n, \mathbb{R}) = \{P \in \Im_+(n, \mathbb{R}) | \det P = 1\}.$$

命題 3.3.9 次の空間は位相空間として同型である:

$$SL(n, \mathbb{R}) \cong SO(n) \times \Im^0_+(n, \mathbb{R}).$$

(証明開始) 写像 $f : SO(n) \times \Im^0_+(n, \mathbb{R}) \to SL(n, \mathbb{R}); f((R, P)) = RP$ は同相写像であることを示す．定理 3.3.8 で, f は全単射であることを示している. また, 2 つの行列 R, P をかける写像は連続である. したがって, f の逆写像が連続であることを示す．f の逆写像 $g : SL(n, \mathbb{R}) \to SO(n) \times \Im_+(n, \mathbb{R})$ を明示する.

$$\text{写像 } h : SL(n, \mathbb{R}) \to {\Im_+}^0(n, \mathbb{R}) \ ; \ h(A) = \sqrt{{}^tAA}$$

と定義すると, h は連続である. したがって,

$$\text{写像 } k : SL(n, \mathbb{R}) \to SO(n) \ ; \ k(A) = A(h(A)^{-1})$$

も連続である．そして, f の逆写像 g は $g(A) = (k(A), h(A))$ で与えられるので, g は連続である．よって, f は同相写像であるである. (証明終了)

補題 3.3.10 次の空間は位相空間として同型である:

$$\Im^0(n, \mathbb{R}) \cong \Im^0_+(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}}$$

(証明開始) (i) $\Im^0(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}}$, (ii) $\Im^0(n, \mathbb{R}) \cong \Im^0_+(n, \mathbb{R})$ を順番に示す.

(i) $\Im^0(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}}$ を示す．$\Im^0(n, \mathbb{R})$ は $\Im(n, \mathbb{R})$ の次元より 1 を引いた次元のベクトル空間である．$\Im(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ であることから, $\Im^0(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}}$ である.

(ii)$X \in \Im(n, \mathbb{R})$ をとる．$\mathrm{tr}(X) = 0$ ならば, 補題 3.2.4 より,

$$\det(\exp X) = e^{\mathrm{tr}(X)} = e^0 = 1$$

であるから, 写像 $\exp : \Im(n, \mathbb{R}) \to \Im_+(n, \mathbb{R})$ は写像

$$\exp^0 : \Im^0(n, \mathbb{R}) \to \Im^0_+(n, \mathbb{R})$$

を誘導する．$\exp^0$ が同相写像であることを示す．そのためには, 命題 3.3.7 より, $\exp : \Im(n,\mathbb{R}) \to \Im_+(n,\mathbb{R})$ は同相写像であるから, $\exp^0$ が全射であることを示せばよい. $P \in \Im^0_+(n,\mathbb{R})$ をとる．exp は全射であるから, $P = \exp X$ となる $X \in \Im(n,\mathbb{R})$ が存在する．行列式をとると,

$$1 = \det P = \det(\exp X) = e^{\mathrm{tr}(X)} (\because \text{補題 } 3.2.4)$$

である．よって,$\mathrm{tr}(X) = 0$ となり $X \in \Im^0(n,\mathbb{R})$ である．したがって, 写像 $\exp^0 : \Im^0(n,\mathbb{R}) \to \Im^0_+(n,\mathbb{R})$ は同相写像である. (証明終了)

補題 3.3.9 と補題 3.3.10 より, 実一般線形群の極分解を得る.

定理 3.3.11 次の空間は位相空間として同型である:

$$SL(n,\mathbb{R}) \cong SO(n) \times \mathbb{R}^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}}.$$

4 主定理

この章では, これまで示した定理などを用いて, 特殊線形群 $SL(n,\mathbb{R})$ の基本群と特殊直交群 $SO(n)$ の基本群が群として同型になることを示す.

定理 4.0.12 (主定理) 次の基本群は群として同型である:

$$\pi_1(SL(n,\mathbb{R})) \cong \pi_1(SO(n)).$$

(証明開始) 定理 3.1.3 $SL(n,\mathbb{R})$ の極分解より, $SL(n,\mathbb{R}) \cong SO(n) \times \mathbb{R}^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}}$ である. 基本群を考えると定理 2.2.8 により,

$$\pi_1(SL(n,\mathbb{R})) \cong \pi_1(SO(n)) \times \pi_1(\mathbb{R}^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}})$$

となる. ここで, 命題 2.2.9 より $\pi_1(\mathbb{R}^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}}) = 0$ であるから, $\pi_1(SL(n,\mathbb{R})) \cong \pi_1(SO(n))$ が示せる. (証明終了)

主定理からわかるよいことを挙げる. $SO(n)$ の基本群は以下の表のようになることが知られている:

群	基本群
$SO(1) = \{1\}$	0
$SO(2) \cong S^1$	$\mathbb{Z}$
$SO(n) \quad (n \geq 3)$	$\mathbb{Z}_2$

したがって主定理より, $SL(n,\mathbb{R})$ の基本群がわかる. 特に, $n \neq 1$ のとき, $SL(n,\mathbb{R})$ は単連結でないことがわかる.

おわりに

最後になりましたが, 本論文をつくるにあたって, 指導教員の田丸博士先生をはじめ, 渋谷一博先生, 先輩方には, 御多忙にもかかわらず, 助言や御指導をいただきました. この場を借りて深く御礼申し上げます.

参考文献

[1] Brian C. Hall, 『Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction』, Springer, 2000 年.

[2] 横田一郎, 『群と位相』, 裳華房, 1971 年.