1　幾何学 A (2010/04/15): 概要説明・平面曲線 (1)

概要説明

幾何学 A および同演習では, 多様体について学ぶ. 多様体とは, 大雑把に言うと「微分が定義できる位相空間」である. この講義では, 多様体に関して, 主に以下の事柄を紹介する.

[0] 曲線と曲面
[1] 多様体の定義
[2] 多様体での微分
[3] 多様体の接空間

曲線の助変数表示

以下, I は $\mathbb{R}$ の開集合を表すものとする.

定義 1.1. 写像 $c : I \to \mathbb{R}^2$ (またはその像 $c(I)$) が **なめらかな曲線** とは, 次が成り立つこと:

(i) c は C^∞-級,
(ii) $\forall t \in I$, $c'(t) \neq (0, 0)$.

例 1.2. 次の (1), (2) はなめらかな曲線であり, (3) はなめらかな曲線ではない:

(1) $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, 0)$,
(2) $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$,
(3) $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^3, t^2)$.

曲線の陽関数表示

定義 1.3. C^∞-写像 $f : I \to \mathbb{R}$ に対して,

(1) $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I\}$ を $y = f(x)$ **のグラフ**,
(2) $\{(f(y), y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in I\}$ を $x = f(y)$ **のグラフ** と呼ぶ.

命題 1.4. なめらかな曲線とグラフは以下の意味で対応する:

(1) グラフは, なめらかな曲線である,
(2) なめらかな曲線 $c : I \to \mathbb{R}^2$ は, 局所的にはグラフで表される
(すなわち, $\forall t \in I$, $\exists I' \subset I$ (t の開近傍) : $c(I')$ はグラフで表される).

問題 1.5. 例 1.2 (3) の曲線を, 局所的にグラフで表して, その概形を描け.

2　幾何学 A (2010/04/22): 平面曲線 (2)

曲線の陽関数表示 (補足)

命題 1.4 (2) の証明には, 次の逆関数定理を使う.

定理 2.1 (逆関数定理). 関数 $f : I \to \mathbb{R}$ を C^∞-級とし, $a \in I$ とする. もし $f'(a) \neq 0$ であるならば, f は a の周りで C^∞-級の逆関数を持つ.

曲線の陰関数表示

定義 2.2. U を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $F : U \to \mathbb{R}$ を関数とする. このとき, $F(x, y) = 0$ が, なめらかな曲線の **陰関数表示** とは, 次が成り立つこと:

(i) F は C^∞-級,

(ii) $F(x, y) = 0 \Rightarrow (JF)_{(x,y)} \neq (0, 0)$.

ここで $(JF)_{(x,y)}$ は Jacobi 行列を表す. すなわち,

$$(JF)_{(x,y)} := (F_x, F_y)_{(x,y)}, \quad \text{ただし } F_x := \frac{\partial F}{\partial x},\ F_y := \frac{\partial F}{\partial y}.$$

例 2.3. 次の (1), (2) はなめらかな曲線の陰関数表示であり, (3) はそうではない:

(1) $ax + by + c = 0$ (ただし $(a, b) \neq (0, 0)$),

(2) $x^2 + y^2 - 1 = 0$,

(3) $y^2 - x^3 - x^2 = 0$.

命題 2.4. グラフとなめらかな曲線の陰関数表示は, 以下の意味で対応する:

(1) グラフは, 陰関数表示することができる,

(2) $F(x, y) = 0$ をなめらかな曲線の陰関数表示とすると, 局所的にはグラフで表される (すなわち, $\forall (a, b) \in U\ (F(a, b) = 0)$, $\exists U' \subset U$ ((a, b) の開近傍) : $\{(x, y) \in U' \mid F(x, y) = 0\}$ はグラフで表される).

命題 2.4 (2) の証明には, 次の陰関数定理を使う.

定理 2.5 (陰関数定理). $F : U \to \mathbb{R}$ を C^∞-級関数とし, $F(a, b) = 0$ とする. もし $F_y(a, b) \neq 0$ ならば, $F(x, y) = 0$ は (a, b) の周りで $y = f(x)$ のグラフで表される.

問題 2.6. 例 2.3 (3) の曲線を, 局所的にグラフで表して, その概形を描け.

3 幾何学 A (2010/05/06): 空間内の曲面 (1)

曲面の助変数表示

以下, D は $\mathbb{R}^2$ の開集合を表すものとする.

定義 3.1. 写像 $p : D \to \mathbb{R}^3$ が **(なめらかな曲面の) 助変数表示** とは, 次が成り立つこと:

(i) p は C^∞-級,

(ii) $\forall (u,v) \in D$, $\mathrm{rank}(Jp)_{(u,v)} = 2$.

問題 3.2. 一般に, $(2,3)$-行列 $A = (x,y)$ に対して, $\mathrm{rank}(A) = 2$ となる必要十分条件は, $\{x,y\}$ が一次独立となることである. これを示せ. (ヒント: rank の定義は, 対応する線型写像の像の次元.)

例 3.3. 次の (1) は曲面の助変数表示であり, (2) はそうではない:

(1) (平面) $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto u\vec{a} + v\vec{b} + \vec{c}$ (ただし $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ は一次独立),

(2) (曲線) $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (x(u), y(u), z(u))$.

補題 3.4. なめらかな曲線 $c : I \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto c(t) = (x(t), z(t))$ が $\forall t \in I$, $x(t) > 0$ を満たすとする. このとき, 次は曲面の助変数表示である (これを c の **回転面** と呼ぶ):

$$p : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(u) & -\sin(u) & 0 \\ \sin(u) & \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(v) \\ 0 \\ z(v) \end{pmatrix}.$$

例 3.5. 次は曲面の助変数表示である:

(1) (円柱) $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (\cos(u), \sin(u), v)$,

(2) (球面) $p : \mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (\cos(u)\cos(v), \sin(u)\cos(v), \sin(v))$,

(3) (トーラス) $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (\cos(u)(2+\cos(v)), \sin(u)(2+\cos(v)), \sin(v))$.

曲面の陽関数表示

定義 3.6. C^∞-写像 $f : D \to \mathbb{R}$ に対して, **$z = f(x,y)$ のグラフ** を次で定義する: $\{(x, y, f(x)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D\}$. また, $x = f(y,z)$ や $y = f(x,z)$ のグラフも同様に定義する.

命題 3.7. なめらかな曲面の助変数表示とグラフは, 以下の意味で対応する:

(1) グラフは, なめらかな曲面の助変数表示を持つ,

(2) なめらかな曲面の助変数表示 $p : D \to \mathbb{R}^3$ は, 局所的にはグラフで表される
(すなわち, $\forall (u,v) \in D$, $\exists D' \subset D$ ((u,v) の開近傍) : $p(D')$ はグラフで表される).

4　幾何学 A (2010/05/13 前半): 空間内の曲面 (2)

曲面の陰関数表示

定義 4.1. U を $\mathbb{R}^3$ の開集合, $F : U \to \mathbb{R}$ を関数とする. このとき, $F(x, y, z) = 0$ が, なめらかな曲面の **陰関数表示** とは, 次が成り立つこと:

(i) F は C^∞-級,

(ii) $F(x, y, z) = 0 \Rightarrow (JF)_{(x,y,z)} \neq (0, 0, 0)$.

例 4.2. 次の (1), (2), (3) はなめらかな曲面の陰関数表示である:

(1) (平面) $ax + by + cz + d = 0$ (ただし $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$),

(2) (円柱) $x^2 + y^2 - 1 = 0$,

(3) (球面) $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

命題 4.3. グラフとなめらかな曲面の陰関数表示は, 以下の意味で対応する:

(1) グラフは, 陰関数表示することができる,

(2) $F(x, y, z) = 0$ をなめらかな曲面の陰関数表示とすると, 局所的にはグラフで表される (すなわち, $\forall (a, b, c) \in U$ $(F(a, b, c) = 0)$, $\exists U' \subset U$ ((a, b, c) の開近傍) : $\{(x, y, z) \in U' \mid F(x, y, z) = 0\}$ はグラフで表される).

5　幾何学 A (2010/05/13 後半): 多様体の定義 (1)

多様体 (正確に言うと可微分多様体) とは, 「微分が定義できる位相空間」である. 非常に粗く言うと, 多様体とは, 位相空間であって「局所的には $\mathbb{R}^m$ の開集合と同じ」ようなものである. 逆に考えて, 多様体とは「$\mathbb{R}^m$ の開集合を貼り合わせたもの」と思っても良い.

位相多様体の定義

定義 5.1. M を位相空間, U を M の開集合, $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ を写像とする. このとき, (U, φ) が M の m 次元 **局所座標** とは, 次が成り立つこと: $\exists U' \subset \mathbb{R}^m$ (開集合) s.t. $\varphi : U \to U'$ は同相写像.

定義 5.2. M を位相空間とする. このとき, M が m 次元 **位相多様体** とは, 次が成り立つこと:

(i) M はハウスドルフ空間,

(ii) $\forall p \in M$, $\exists (U, \varphi)$ (m 次元局所座標) s.t. $p \in U$.

例 5.3. 次の (1) は位相多様体であり, (2) はそうではない:

(1) C^∞-級関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に対して, $y = f(x)$ のグラフ,

(2) $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0$ または $y = 0\}$.

可微分多様体の定義

定義 5.4. M を位相多様体, $(U, \varphi), (V, \psi)$ を局所座標とし, $U \cap V \neq \emptyset$ とする. このとき, 次の写像を (U, φ) から (V, ψ) への **座標変換** と呼ぶ: $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$.

定義 5.5. M が m 次元 **可微分多様体** とは, 次が成り立つこと:

(i) M は m 次元位相多様体,

(ii) 全ての座標変換は C^∞-級.

例 5.6. C^∞-級関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に対して, $y = f(x)$ のグラフは 1 次元可微分多様体.

問題 5.7. 円周 $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ に対して, 次で定義される局所座標 (U_1, φ_1) から (U_2, φ_2) への座標変換が C^∞-級であることを示せ (定義域と値域も明記すること):

$$U_1 := \{(x, y) \in S^1 \mid x > 0\}, \quad \varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto y,$$
$$U_2 := \{(x, y) \in S^1 \mid y > 0\}, \quad \varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x.$$

6　幾何学 A (2010/05/20): 多様体の定義 (2)

位相多様体の定義の補足

命題 6.1. M を位相空間とする．このとき, M が m 次元位相多様体ための必要十分条件は, 次が成り立つこと:

(i) M はハウスドルフ空間,

(ii) $\exists\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ s.t. $\{U_\alpha\}$ は M の開被覆, かつ, 各 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ は m 次元局所座標.

条件 (ii) を満たす $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ を **局所座標系** と呼ぶ.

可微分多様体の例

例 6.2. $\mathbb{R}^m$ の開集合 $U(\neq \emptyset)$ は, m 次元可微分多様体である.

補題 6.3. U を $\mathbb{R}^m$ の開集合, $f : U \to \mathbb{R}^n$ を C^∞-級写像とし, f のグラフを次で定義する: $\mathrm{graph}(f) := \{(p, f(p)) \in \mathbb{R}^{m+n} \mid p \in U\}$. このとき,

(1) $\pi : \mathrm{graph}(f) \to \mathbb{R}^m : (p, f(p)) \mapsto p$ とおくと, $(\mathrm{graph}(f), \pi)$ は m 次元局所座標,

(2) この局所座標によって, $\mathrm{graph}(f)$ は m 次元可微分多様体.

例 6.4. $S^n := \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||p||^2 = 1\}$ は n 次元可微分多様体である (これを n **次元球面** と呼ぶ).

問題 6.5. 2 次元球面 S^2 に対して, 次で定義される局所座標 (U_1, φ_1) から (U_2, φ_2) への座標変換が C^∞-級であることを示せ (定義域と値域も明記すること):

$$U_1 := \{(x, y, z) \in S^2 \mid x > 0\}, \quad \varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto (y, z),$$
$$U_2 := \{(x, y, z) \in S^2 \mid y > 0\}, \quad \varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto (x, z).$$

7　幾何学 A (2010/05/27): 多様体の定義 (3)

可微分多様体の例 (続き)

可微分多様体であることを示す際に, 局所座標の数が多いと, 座標変換が C^∞-級であることを確かめるのが大変である. その困難を回避する一つの方法は, 「できるだけ少ない個数の局所座標で覆うこと」である.

例 7.1. 円周 S^1 は, 次の $\{(U_+, \varphi_+), (U_-, \varphi_-)\}$ によって 1 次元多様体になる:

$$p_\pm := (0, \pm 1), \quad U_\pm := S^1 \setminus \{p_\pm\}, \quad \varphi_\pm : U_\pm \to \mathbb{R}^m : (x, y) \mapsto \frac{x}{1 \mp y}.$$

幾何学的には, φ_+ は p_+ を中心とする x-軸への射影であり, φ_- は p_- を中心とする x-軸への射影である. これらの局所座標を **立体射影** と呼ぶ. これと全く同様の方法により, 高次元の球面も 2 枚の局所座標で覆うことができる.

例 7.2. m 次元球面 S^m は, 次の $\{(U_+, \varphi_+), (U_-, \varphi_-)\}$ によって m 次元多様体になる:

$$\begin{aligned} &p_\pm := (0, \ldots, 0, \pm 1), \quad U_\pm := S^m \setminus \{p_\pm\}, \\ &\varphi_\pm : U_\pm \to \mathbb{R} : (x_1, \ldots, x_{m+1}) \mapsto (\frac{x_1}{1 \mp x_{m+1}}, \ldots, \frac{x_m}{1 \mp x_{m+1}}). \end{aligned}$$

問題 7.3. $m = 2$ の場合に, 例 7.2 で与えられた局所座標について, (U_+, φ_+) から (U_-, φ_-) への座標変換を求めよ (定義域と値域も明記すること).

陰関数表示と可微分多様体

可微分多様体であることを示す際に最も便利な方法は, 以下で述べるような「陰関数表示を用いる方法」だと思われる.

命題 7.4. U を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $F : U \to \mathbb{R}$ を写像とし, $F(x, y) = 0$ をなめらかな曲線の陰関数表示とする. このとき, $M := \{(x, y) \in U \mid F(x, y) = 0\}$ は 1 次元可微分多様体になる.

なめらかな曲面の陰関数表示や, より次元の高い場合についても, 同様のことが成り立つ.

8 幾何学 A (2010/06/03): 多様体の定義 (4)

陰関数表示と可微分多様体 (続き)

命題 8.1. U を $\mathbb{R}^3$ の開集合, $F : U \to \mathbb{R}$ を写像とし, $F(x, y, z) = 0$ をなめらかな曲面の陰関数表示とする. このとき, $M := \{(x, y, z) \in U \mid F(x, y, z) = 0\}$ は 2 次元可微分多様体になる.

定理 8.2. U を $\mathbb{R}^m$ の開集合, $F : U \to \mathbb{R}^n$ を C^∞-級写像とし, $M := \{p \in U \mid F(p) = 0\}$ とおく. もし $\mathrm{rank}(JF)_p = k$ $(\forall p \in M)$ であるならば, M は $m - k$ 次元可微分多様体になる.

前に述べた曲線の陰関数表示に関する命題は, 定理 8.2 の $(m, n, k) = (2, 1, 1)$ の場合であり, 曲面の陰関数表示に関する命題は, 定理 8.2 の $(m, n, k) = (3, 1, 1)$ の場合である.

問題 8.3. 定理 8.2 の $(m, n, k) = (3, 1, 1)$ の場合を考え, $p \in M$ の近傍 U_p が $x = f_p(y, z)$ のグラフで書け, また $q \in M$ の近傍 U_q が $y = f_q(x, z)$ のグラフで書けているとする. このとき, $U_p \cap U_q \neq \emptyset$ と仮定した上で, U_p から U_q への座標変換を求めよ.

例 8.4. 次の (1), (2) は, 定理 8.2 の条件を満たす写像 F を持つので, 可微分多様体になる:

(1) n 次元球面 S^n,

(2) 特殊線型群 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) := \{g \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(g) = 1\}$.

その他の可微分多様体の例

命題 8.5. M を m 次元可微分多様体, N を n 次元可微分多様体とする. このとき, 直積 $M \times N$ は $m + n$ 次元可微分多様体になる.

例 8.6. 曲面の章で紹介したトーラスは, $S^1 \times S^1$ と同相なので, 2 次元可微分多様体となる.

定義 8.7. $\mathbb{R}\mathrm{P}^n := \{\ell \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \in \ell : \text{直線}\}$ を n 次元の **実射影空間** と呼ぶ.

命題 8.8. 実射影空間 $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ について, 次が成り立つ:

(1) $X := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ の上の同値関係を $x \sim y :\Leftrightarrow \exists c \neq 0 : x = cy$ によって定める. このとき, 商集合 $X/\sim$ と $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ の間に全単射が存在する.

(2) $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ は n 次元可微分多様体の構造を持つ.

中間試験・事前救済レポート課題

問題 8.9. 以下のそれぞれのキーワードに関連する中間試験の問題を予想し, その問題と模範解答を書け: (1) 曲線, (2) 曲面, (3) 位相多様体, (4) 可微分多様体.

9　幾何学 A (2010/06/17): 多様体上の可微分写像 (1)

C^∞-級関数

定義 9.1. M を可微分多様体, $f : M \to \mathbb{R}$ を連続関数とする.

(1) f が $\underline{p \in M \text{ で } C^\infty\text{-級}}$ とは, 次が成り立つこと: $\exists (U, \varphi)$: 局所座標 s.t. $p \in U$ かつ $f \circ \varphi^{-1}$ は $\varphi(p)$ で C^∞-級.

(2) f が $\underline{C^\infty\text{-級}}$ とは, 次が成り立つこと: $\forall p \in M$, f は p で C^∞-級.

例 9.2. U を $\mathbb{R}^m$ の開集合とする (U は自然に可微分多様体となる). このとき, 関数 $f : U \to \mathbb{R}$ が, 定義 9.1 の意味で C^∞-級であることと, 通常の (微積分の) 意味で C^∞-級であることは同値.

命題 9.3. M を可微分多様体, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ を局所座標系とし, $f : M \to \mathbb{R}$ を連続写像とする.

(1) f が $p \in M$ で C^∞-級であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall \alpha$ $(p \in U_\alpha)$, $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ は $\varphi_\alpha(p)$ で C^∞-級.

(2) f が C^∞-級であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall \alpha$, $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ は C^∞-級.

例 9.4. 円周 S^1 の局所座標系をグラフによって定める. このとき, $f : S^1 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto y$ は C^∞-級関数.

問題 9.5. 円周 S^1 の局所座標系を立体射影によって定める. このとき, $f : S^1 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto y$ が C^∞-級関数であることを示せ.

陰関数表示と C^∞-級関数

U を $\mathbb{R}^m$ の開集合, $F : U \to \mathbb{R}^n$ を C^∞-級写像とし, $M := \{p \in U \mid F(p) = 0\}$ とおく. このとき, Jacobi 行列 $(JF)_p$ の階数が一定であるなら, M は可微分多様体となった (定理 8.2).

命題 9.6. 上記のような $M := \{p \in U \mid F(p) = 0\}$ を考える. このとき, $f : U \to \mathbb{R}$ が C^∞-級ならば, その制限 $f|_M : M \to \mathbb{R}$ も C^∞-級である.

例 9.7. 球面 S^n に対して, $f : S^n \to \mathbb{R} : (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto x_i$ は C^∞-級関数.

10　幾何学 A (2010/06/24): 多様体上の可微分写像 (2)

以下では M, N を可微分多様体とする.

C^∞-級写像

定義 10.1. 写像 $f : M \to N$ を連続とする.

(1) f が <u>$p \in M$ **で** C^∞**-級**</u> とは, 次が成り立つこと: $\exists(U, \varphi)$: M の局所座標, $\exists(V, \psi)$: N の局所座標 s.t. $p \in U$, $f(p) \in V$ かつ $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ は $\varphi(p)$ で C^∞-級.

(2) f が <u>C^∞**-級**</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall p \in M$, f は p で C^∞-級.

命題 10.2. 写像 $f : M \to N$ を連続とする. このとき, f が $p \in M$ で C^∞-級であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall(U, \varphi)$: M の局所座標 $(p \in U)$, $\forall(V, \psi)$: N の局所座標 $(f(p) \in V)$, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ は $\varphi(p)$ で C^∞-級.

例 10.3. $S^1(r)$ を, 半径 $r > 0$ の円周とする (すなわち, $S^1(r) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$). このとき, 次は C^∞-級写像である: $f : S^1(r_1) \to S^1(r_2) : p \mapsto (r_2/r_1)p$.

例 10.4. 次は C^∞-級写像である: $f : S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n : p \mapsto [p]$. ただしここで, $[p]$ は p を含む同値類 (すなわち 0 と p を通る直線) を表す.

命題 10.5. C^∞-級写像と C^∞-級写像の合成は, C^∞-級写像である.

C^∞-同相

定義 10.6. 写像 $f : M \to N$ が <u>C^∞**-同相写像**</u> であるとは, 次が成り立つこと:

(i) f は同相写像,

(ii) f と f^{-1} は C^∞-級写像.

M と N の間に C^∞-同相写像が存在するときに, M と N は <u>C^∞**-同相**</u> であるという.

例 10.7. 次が成り立つ:

(1) $S^1(r_1)$ と $S^1(r_2)$ は C^∞-同相,

(2) S^1 に, グラフを用いて局所座標系を定義した多様体を $(S^1)_1$, 立体射影を用いて局所座標系を定義した多様体を $(S^1)_2$ と便宜的に表す. このとき, $(S^1)_1$ と $(S^1)_2$ は C^∞-同相.

問題 10.8. 恒等写像 $\mathrm{id} : (S^1)_2 \to (S^1)_1$ が, 点 $p := (x, y)$ (ただし $x > 0$) において C^∞-級写像であることを示せ.

11　幾何学 A (2010/07/01): 多様体の接空間 (1)

曲線の接線

定義 11.1. M をなめらかな平面曲線とし, $p \in M$ とする. このとき,

(1) $v \in \mathbb{R}^2$ が M の p での **接ベクトル** とは, 次が成り立つこと:
$\exists \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2 : C^\infty$-級 s.t. $\gamma((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset M$, $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$.

(2) $T_pM := \{p + v \in \mathbb{R}^2 \mid v$ は p での接ベクトル $\}$ を M の p での **接線** と呼ぶ.

例 11.2. 円周 S^1 に対して次が成り立つ: $\forall a \in \mathbb{R}$, $(0, a)$ は $p = (1, 0)$ における接ベクトル.

命題 11.3. 曲線 M に対し, $c : I \to \mathbb{R}^2$ をその助変数表示, $F(x, y) = 0$ を陰関数表示とすると,

(1) $p = c(t_0)$ に対して次が成り立つ: $\{p + sc'(t_0) \mid s \in \mathbb{R}\} = T_pM = \{p + u \mid (JF)_p u = 0\}$,

(2) T_pM は直線 (すなわち 1 次元ベクトル空間) になる.

多様体の接ベクトル

可微分多様体 M に対して, $C^\infty(M) := \{f : M \to \mathbb{R} : C^\infty$-級 $\}$ と定める.

定義 11.4. M を可微分多様体とし, $C^\infty(M) := \{f : M \to \mathbb{R} : C^\infty$-級 $\}$ と定める. このとき,

(1) C^∞-級写像 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ に対し, 次で定義される $c'(0)$ を c の 0 における **速度ベクトル** (または **方向微分**) と呼ぶ: $c'(0) : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : f \mapsto \frac{d}{dt}(f \circ c)(0)$.

(2) $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ が p における **接ベクトル** とは, 次が成り立つこと: $\exists c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M : C^\infty$-級 s.t. $c(0) = p$, $c'(0) = v$.

例 11.5. $M = \mathbb{R}^n$, その座標を $(x_1, \ldots, x_n)$ と表す. このとき,

$$(\tfrac{\partial}{\partial x_i})_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : f \mapsto \tfrac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

に対して, 次が成り立つ: $\forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_1(\frac{\partial}{\partial x_1})_p + \cdots + a_n(\frac{\partial}{\partial x_n})_p$ は p での接ベクトル.

例 11.6. (U, φ) を M の局所座標, $p \in U$ とし, $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ と表す. このとき,

$$(\tfrac{\partial}{\partial x_i})_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : f \mapsto \tfrac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$$

に対して, 次が成り立つ: $\forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_1(\frac{\partial}{\partial x_1})_p + \cdots + a_n(\frac{\partial}{\partial x_n})_p$ は p での接ベクトル.

問題 11.7. 例 11.6 の状況の下で, $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M : t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + t(a_1, \ldots, a_n))$ が C^∞-級であることを示せ. ただしここで, ε は十分小さく, $c((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset U$ を満たしているとして良い.

12　幾何学 A (2010/07/08): 多様体の接空間 (2)

多様体の接ベクトル (補足)

記号 $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ について補足説明する．局所座標 (U, φ) の定義より $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ であったので, $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ は, $\mathbb{R}^n$ の座標を用いて φ を表したものである．すなわち, 自然な射影 $\pi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_j$ を用いると, 次のように表される;

$$x_j := \pi_j \circ \varphi : U \to \mathbb{R}.$$

多様体の接空間

定義 12.1. 可微分多様体 M の $p \in M$ での **接空間** (**tangent space**) T_pM を次で定義する:

$$\begin{aligned} T_pM := &\{v : C^\infty(M) \to \mathbb{R} \mid v \text{ は } p \text{ での接ベクトル } \} \\ = &\{c'(0) : C^\infty(M) \to \mathbb{R} \mid c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M : C^\infty,\ c(0) = p\}. \end{aligned}$$

定理 12.2. (U, φ) を M の局所座標, $p \in U$ とし, $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ と表す．このとき, 次が成り立つ:

(1) $T_pM = \mathrm{span}\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_n})_p\}$,
(2) $T_pM = \{v : C^\infty(M) \to \mathbb{R} \mid$ 線型, 積の微分の公式を満たす $\}$.

ここで, 次を積の微分の公式と呼ぶ: $\forall f, g \in C^\infty(M)$, $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$

問題 12.3. 次を示せ: $\forall v \in T_pM$, v は積の微分の公式を満たす.

系 12.4. 可微分多様体 M が n 次元のとき, T_pM は n 次元ベクトル空間になる.

13 幾何学 A (2010/07/15): 多様体の接空間 (3)

問題 13.1. 曲線 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ の $c(0) = p$ での速度ベクトル $c'(0)$ を考える. M の p を含む局所座標を (U, φ) とし, $\varphi = (x_1, \ldots, x_m)$ と表し, ${}^t(a_1, \ldots, a_m) := J(\varphi \circ c)_0$ とおく. このとき, 次を示せ: $c'(0) = \sum a_i (\frac{\partial}{\partial x_i})_p$.

微分写像

以下では, 写像 $f : M \to N$ を C^∞-級とし, $p \in M$ とする.

定義 13.2. 次で定義される写像 $(df)_p : T_pM \to T_{f(p)}N : v \mapsto (df)_p v$ を, f の p での **微分写像** と呼ぶ:

$$(df)_p v : C^\infty(N) \to \mathbb{R} : \xi \mapsto v(\xi \circ f).$$

ここで $(df)_p v \in T_{f(p)}N$ が成り立つことは示す必要がある.

命題 13.3. 微分写像 $(df)_p$ に関して, 次が成り立つ:

(1) 曲線 c が $c'(0) \in T_pM$ を満たすとき, 次が成立: $(df)_p(c'(0)) = (f \circ c)'(0)$.

(2) M の p を含む局所座標を (U, φ), N の $f(p)$ を含む局所座標を (V, ψ) とする. また, $\varphi = (x_1, \ldots, x_m)$, $\psi = (y_1, \ldots, y_n)$ と表す. このとき, 次が成立:

$$(df)_p(\textstyle\sum a_i (\frac{\partial}{\partial x_i})_p) = \sum b_j (\frac{\partial}{\partial y_j})_{f(p)},$$

ただしここで, ${}^t(b_1, \ldots, b_n) = J(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \cdot {}^t(a_1, \ldots, a_m)$.

系 13.4. 微分写像 $(df)_p$ は線型写像である.

微分写像の性質

命題 13.5. 微分写像 $(df)_p$ に関して, 次が成り立つ:

(1) 合成写像の微分は, それぞれの微分の合成と一致する. すなわち, $f : M \to N$ および $g : N \to L$ が C^∞-級写像であるとき, 次が成り立つ: $\forall p \in M$, $d(g \circ f)_p = (dg)_{f(p)} \circ (df)_p$.

(2) 恒等写像 $\mathrm{id} : M \to M$ の微分写像は, 恒等写像である,

(3) C^∞-同相写像 $f : M \to N$ の微分写像は, 線型同型写像である.

系 13.6. M と N が C^∞-同相であるなら, 次元は一致する.

14　幾何学 A (2010/07/22): 多様体の接空間 (4)

ベクトル場

ベクトル場とは, 可微分多様体の各点に接ベクトルが付いているような状況を表すものである.

定義 14.1. 可微分多様体 M に対して,

(1) $TM := \coprod_{p \in M} T_pM$ (ただし $\coprod$ は非交和を表す) を **接ベクトル束** と呼ぶ,

(2) $X : M \to TM$ が M 上の **ベクトル場** とは, 次が成り立つこと: $\forall p \in M$, $X_p \in T_pM$.

例 14.2. U を $\mathbb{R}^n$ 内の開集合とする. このとき, 次が成立する: $\forall f_i \in C^\infty(U)$, $X := \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ は U 上のベクトル場.

例 14.3. (U, φ) を M の局所座標とし, $\varphi = (x_1, \ldots, x_m)$ と表す. また X を M 上のベクトル場とする. このとき, 次が成立する: $\exists f_i : U \to \mathbb{R}$: $X|_U = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

命題 14.4. X を M 上のベクトル場とし, $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M) : f \mapsto Xf$ を次で定義する:

$$Xf : M \to \mathbb{R} : p \mapsto X_p f.$$

このとき, 次が成り立つ:

(1) $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ は線型,

(2) $\forall f, g \in C^\infty(M)$, $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$.

期末試験・事前救済レポート課題

問題 14.5. 以下のそれぞれのキーワードに関連する期末試験の問題を予想し, その問題と模範解答を書け: (1) 可微分多様体の定義, (2) C^∞-級写像, (3) 接空間, (4) 微分写像, (5) 曲線と曲面.
ただし, レポートには表紙は付けず, 1 ページ目に学生番号・氏名・全ての予想問題を書き, 2 ページ目以降に模範解答を書くこと.