1　幾何学 D (2010/10/06): 概要説明

本稿は, 2010 年度「幾何学 D」および「多様幾何基礎講義 B」の講義資料である.

概要説明

リー群入門を目指して, 以下のような流れで講義を行う:

[1] 線型リー群, 線型リー代数, その間の対応

[2] リー群, リー代数, その間の対応

[3] リー群の幾何への応用

特に [2] で紹介するリー群とリー代数の対応が, この講義の目的の一つである. しかしながら, 最初から一般のリー群を扱うと難しくなってしまうと思われるので, その導入として [1] において「行列で書けるような場合」を紹介する (この制約が実はそれほど強くないことは, 後に触れる予定). 最後の [3] では, リーマン幾何への応用, 特にリー群上の左不変計量の幾何の話題を紹介する.

線型リー群の章のあらすじ

$M_n(\mathbb{R})$ を $n \times n$ 実行列の全体とする.

(1) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) := \{g \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(g) \neq 0\}$ は, 行列の積に関して群を成し, $M_n(\mathbb{R})$ $(= \mathbb{R}^{n^2})$ からの相対位相によって位相空間になる.

(2) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の閉部分群を **線型リー群** と呼ぶ.

(3) $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) := M_n(\mathbb{R})$ は自然にベクトル空間となり, 積 $[X, Y] := XY - YX$ を持つ.

(4) $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ の部分空間で, 積 $[,]$ に関して閉じているものを **線型リー代数** と呼ぶ.

(5) 線型リー群と線型リー代数の対応は, 行列の指数写像によって与えられる.

リー群の章のあらすじ

多様体は全て C^∞-級多様体を意味するものとする.

(1) G が **リー群** とは, 群かつ多様体であり, 両者の構造が適合しているものである.

(2) 線型リー群はリー群である.

(3) $\mathfrak{g}$ が **リー代数** とは, ベクトル空間であり, 所定の性質を満たす積が定められているものである.

(4) 線型リー代数はリー代数である.

(5) リー群とリー代数の対応は, ベクトル場によって与えられる.

(6) 線型リー群と線型リー代数の対応は, その対応の特別な場合になっている.

2　幾何学 D (2010/10/13): 線型リー群

線型リー群の定義

定義 2.1. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) := \{g \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(g) \neq 0\}$ を **一般線型群** (**general linear group**) と呼ぶ. ここで $M_n(\mathbb{R})$ は $n \times n$ 実行列の全体を表す.

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ は群と位相空間の構造を自然に持つ. 群の積は行列の積で定め, 位相は $M_n(\mathbb{R})$ $(= \mathbb{R}^{n^2})$ の自然な位相からの相対位相を考える.

定義 2.2. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の閉部分群を **線型リー群** (**linear Lie group**) と呼ぶ.

線型リー群の例

例 2.3. 以下は線型リー群である:

(1) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$,

(2) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) := \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(g) = 1\}$ (**特殊線型群** (**special linear group**)),

(3) $\mathrm{O}(n) := \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t g g = I_n\}$ (**直交群** (**orthogonal group**)),

(4) $\mathrm{SO}(n) := \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(n)$ (**特殊直交群** (**special orthogonal group**)),

(5) 次で定義される群 H_3 (**ハイゼンベルグ群**):

$$H_3 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

命題 2.4. 次が成り立つ:

(1) $\mathrm{O}(n) = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \langle gX, gY \rangle = \langle X, Y \rangle \ (\forall X, Y \in \mathbb{R}^n)\}$,

(2) $\mathrm{SO}(2) = \{R(\theta) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$, ただしここで

$$R(\theta) := \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

線型リー群でない例

例 2.5. $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ とする. 次で定義される群 G_λ は, $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ の部分群だが閉集合ではない:

$$G_\lambda := \left\{ \begin{bmatrix} R(\pi\theta) & 0 \\ 0 & R(\lambda\pi\theta) \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R}) \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

3　幾何学 D (2010/10/20): 線型リー群 (2)

線型リー群の例: 複素行列の場合

定義 3.1. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) := \{g \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det(g) \neq 0\}$ を **複素一般線型群** と呼ぶ. ここで $M_n(\mathbb{C})$ は $n \times n$ 複素行列の全体を表す.

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ は群と位相空間の構造を自然に持つ. 群の積は行列の積で定め, 位相は $M_n(\mathbb{C})$ $(= \mathbb{C}^{n^2})$ の自然な位相からの相対位相を考える. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を線型リー群と思うために, 次の写像を考える:

$$f : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}) : A + iC \mapsto \left[\begin{array}{c|c} A & -C \\ \hline C & A \end{array}\right].$$

命題 3.2. 上の写像 $f : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ に対して, 次が成り立つ:

(1) f は単射, 群準同型,
(2) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ と $\mathrm{Im}(f)$ は群としても位相空間としても同型,
(3) $\mathrm{Im}(f)$ は線型リー群.

補題 3.3. G を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 内の閉部分群とする. このとき, G は (正確に言うと, 上の写像 f による像 $f(G)$ は) 線型リー群になる.

例 3.4. 以下は (上の写像 f によって) 線型リー群である:

(1) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) := \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \det(g) = 1\}$ (**複素特殊線型群**),
(2) $\mathrm{U}(n) := \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{g}g = I_n\}$ (**ユニタリ群** (**unitary group**)),
(3) $\mathrm{SU}(n) := \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{U}(n)$ (**特殊ユニタリ群** (**special unitary group**)),
(4) 次で定義される群 $H_3^{\mathbb{C}}$ (**複素ハイゼンベルグ群**):

$$H_3^{\mathbb{C}} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{C} \right\}.$$

命題 3.5. 次が成り立つ:

(1) $\mathrm{U}(n) = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \langle gX, gY \rangle = \langle X, Y \rangle \ (\forall X, Y \in \mathbb{C}^n)\}$,
(2) $\mathrm{U}(1) = \{e^{i\theta} \in \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.
(3) $\mathrm{U}(1)$ と $\mathrm{SO}(2)$ は群としても位相空間としても同型.

4　幾何学 D (2010/10/20): 線型リー代数

線型リー代数の定義

定義 4.1. $M_n(\mathbb{R})$ に次で積 $[\cdot,\cdot]$ を定めたものを **一般線型リー代数** と呼び, $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ で表す: $[X,Y] := XY - YX$.

一般線型リー代数 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ は, ベクトル空間の構造と積を持つ (すなわち代数である).

定義 4.2. $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ の部分集合 $\mathfrak{g}$ が **線型リー代数** (**linear Lie algebra**) であるとは, 次が成り立つこと:

(i) $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ の線型部分空間,
(ii) $\mathfrak{g}$ は積に関して閉じている (すなわち, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$, $[X,Y] \in \mathfrak{g}$).

線型リー代数の例

例 4.3. 以下は線型リー代数である:

(1) $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$,
(2) $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) := \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$ (**特殊線型リー代数** (**special linear Lie algebra**)),
(3) $\mathfrak{o}(n) := \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tX + X = 0\}$ (**直交リー代数** (**orthogonal Lie algebra**)),
(4) 次で定義される $\mathfrak{h}_3$ (**ハイゼンベルグ・リー代数**):

$$\mathfrak{h}_3 := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

命題 4.4. 次が成り立つ:

(1) $\mathfrak{o}(n) \cap \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{o}(n)$,
(2) $\mathfrak{o}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid \langle Xv, w\rangle + \langle v, Xw\rangle = 0 \ (\forall v, w \in \mathbb{R}^n)\}$,
(3) $\mathfrak{o}(2) = \mathrm{span}\{J\}$, ただしここで

$$J := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

5 幾何学 D (2010/10/27): 線型リー代数 (2)

線型リー代数の例: 複素行列の場合

定義 5.1. $M_n(\mathbb{C})$ に次で積 $[\cdot,\cdot]$ を定めたものを **複素一般線型リー代数** と呼び, $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ で表す: $[X,Y] := XY - YX$.

複素一般線型リー代数 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ は, 複素ベクトル空間の構造と積を持つ. ただし以降では, $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ は実ベクトル空間であると思うことにする. また, $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ を線型リー代数と思うために, 次の写像を考える:

$$f : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{R}) : A + iC \mapsto \left[\begin{array}{c|c} A & -C \\ \hline C & A \end{array}\right].$$

命題 5.2. 上の写像 $f : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{R})$ に対して, 次が成り立つ:

(1) f は単射, 線型であり, 積を保つ,
(2) $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ と $\mathrm{Im}(f)$ は代数として同型,
(3) $\mathrm{Im}(f)$ は線型リー代数.

補題 5.3. $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ 内の (実) 部分空間であり, 積に関して閉じているとする. このとき, $\mathfrak{g}$ は (正確に言うと, 上の写像 f による像 $f(\mathfrak{g})$ は) 線型リー代数になる.

例 5.4. 以下は (上の写像 f によって) 線型リー代数である:

(1) $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) := \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$ (**複素特殊線型リー代数**),
(2) $\mathfrak{u}(n) := \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{X} + X = 0\}$ (**ユニタリ・リー代数**),
(3) $\mathfrak{su}(n) := \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \cap \mathfrak{u}(n)$ (**特殊ユニタリ・リー代数**),
(4) 次で定義される $\mathfrak{h}_3^{\mathbb{C}}$ (**複素ハイゼンベルグ・リー代数**):

$$\mathfrak{h}_3^{\mathbb{C}} := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{C} \right\}.$$

命題 5.5. 次が成り立つ:

(1) $\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid \langle Xv, w\rangle + \langle v, Xw\rangle = 0\ (\forall v, w \in \mathbb{C}^n)\}$,
(2) $\mathfrak{u}(1) = \mathrm{span}\{\sqrt{-1}\}$,
(3) $\mathfrak{u}(1)$ と $\mathfrak{o}(2)$ は代数として同型.

6　幾何学 D (2010/10/27): 線型リー群と線型リー代数の対応

行列の指数写像

行列の指数写像は, 次の $\mathbb{R}$ 上の指数関数を一般化したものである:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

補題 6.1. 行列 $A = (a_{ij})$ に対して, ノルムを $|(a_{ij})| = (\sum a_{ij})^{1/2}$ で定義する. このとき, 次が成り立つ:

(1) $\forall(i,j)$, $|a_{ij}| \leq |A|$,

(2) $|AB| \leq |A||B|$.

命題 6.2. $X \in M_n(\mathbb{R})$ に対して, 次は絶対収束する (この exp を **行列の指数写像** と呼ぶ):

$$\exp(X) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3!} + \cdots .$$

例 6.3. 次が成り立つ (これは $\mathfrak{o}(2)$ と $\mathrm{SO}(2)$ の間の対応を与える):

$$\exp(\begin{bmatrix} 0 & -s \\ s & 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \cos(s) & -\sin(s) \\ \sin(s) & \cos(s) \end{bmatrix}$$

.

線型リー群と線型リー代数の対応 (詳細は次回)

定理 6.4. G を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 内の線型リー群とする. このとき次の $\mathrm{Lie}(G)$ は $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ 内の線型リー代数である (これを **G に対応する線型リー代数** と呼ぶ):

$$\mathrm{Lie}(G) := \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid \exp(sX) \in G \ (\forall s \in \mathbb{R})\}.$$

問題 6.5 (第二回レポート). $\mathrm{Lie}(\mathrm{O}(2)) = \mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(2)) = \mathfrak{o}(2)$ を示せ.

7　幾何学 D (2010/11/10): 線型リー群と線型リー代数の対応 (2)

行列の指数写像の性質

補題 7.1. 行列の指数写像 exp は次をみたす:

(1) $\forall g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\exp(gXg^{-1}) = g\exp(X)g^{-1}$,

(2) $[X, Y] = 0$ ならば $\exp(X+Y) = \exp(X)\exp(Y)$,

(3) $\frac{d}{ds}\exp(sX) = X\exp(sX)$.

行列の指数写像の逆写像

命題 7.2. $A \in M_n(\mathbb{R})$ に対して, $|A| < 1$ の範囲で次は絶対収束する (この log を **行列の対数写像** と呼ぶ):

$$\log(I_n + A) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} A^n = A - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} - \cdots .$$

命題 7.3. 行列の指数写像 exp と対数写像 log は, 局所的に互いに逆写像である.

命題 7.4. 行列の指数写像 exp は次をみたす:

(1) $s \to 0$ のとき, $\exp(sX)\exp(sY) = \exp(s(X+Y) + O(s^2))$,

(2) $\lim_{m\to+\infty}(\exp((1/m)X)\exp((1/m)Y))^m = \exp(X+Y)$.

線型リー群と線型リー代数の対応

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 内の部分集合 G に対して, 次のように定義する:

$$\mathrm{Lie}(G) := \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid \exp(sX) \in G \ (\forall s \in \mathbb{R})\}$$

命題 7.5. G を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 内の線型リー群とすると, $\mathrm{Lie}(G)$ は $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ 内の線型部分空間である.

命題 7.6. G を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 内の部分群とし, $\mathrm{Lie}(G)$ は $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ 内の線型部分空間であるとする. このとき, $\mathrm{Lie}(G)$ は線型リー代数である.

以上により, G が線型リー群ならば $\mathrm{Lie}(G)$ が線型リー代数となることが示された. ちなみに, G が線型リー群であるという仮定は, 命題 7.6 のように弱くすることができる. 命題 7.6 の証明には, 次の写像を用いる:

定義 7.7. G を線型リー群とする. 各 $g \in G$ に対して, 次で与えられる写像を **随伴作用** と呼ぶ:

$$\mathrm{ad}_g : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(G) : X \mapsto gXg^{-1}.$$

8　幾何学 D (2010/11/24): 線型リー群と線型リー代数の対応 (3)

典型的な線型リー群に対応する線型リー代数

補題 8.1. $\forall X \in M_n(\mathbb{R})$ に対して, 次が成り立つ: $\det(\exp(X)) = e^{\mathrm{tr}(X)}$.

例 8.2. 次が成り立つ:

(1) $\mathrm{Lie}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})) = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$,

(2) $\mathrm{Lie}(\mathrm{O}(n)) = \mathfrak{o}(n)$.

線型リー群の同型

定義 8.3. 各 $a \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ に対して, 次で定義される写像 I_a を a による **内部自己同型** と呼ぶ: $I_a : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : g \mapsto aga^{-1}$.

線型リー群の同型は, 内部自己同型で移りあう, という性質によって定義される.

定義 8.4. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 内の線型リー群 G_1, G_2 が **同型** とは, 次が成り立つこと: $\exists a \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : I_a(G_1) = G_2$.

命題 8.5. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 内の線型リー群 G_1, G_2 が同型ならば, これらは群同型かつ同相である.

この命題の逆が成り立たない. その反例は次で与えられる.

例 8.6. 次の G_1, G_2 は, 線型リー群として同型ではない:

$$G_1 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} \mid x \neq 0 \right\}, \quad G_2 := \left\{ \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \mid y \neq 0 \right\}.$$

線型リー群の局所同型

線型リー群の局所同型は, 単位元の近傍同士が内部自己同型で移りあう, という性質によって定義される.

定義 8.7. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 内の線型リー群 G_1, G_2 が **局所同型** とは, 次が成り立つこと: U_1 (G_1 の単位元の近傍), U_2 (G_2 の単位元の近傍), $\exists a \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : I_a(U_1) = U_2$.

同型ならば局所同型であることは容易に分かるが, その逆は成立しない.

例 8.8. $\mathrm{O}(n)$ と $\mathrm{SO}(n)$ は局所同型だが同型ではない.

9　幾何学 D (2010/11/24): 線型リー群と線型リー代数の対応 (4)

線型リー代数の同型

線型リー代数の同型は, 随伴作用で移りあうという性質によって定義される. $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ の随伴作用は, $\mathrm{ad}_a : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) : X \mapsto aXa^{-1}$ によって定義されていた.

定義 9.1. $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ 内の線型リー代数 $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ が **同型** とは, 次が成り立つこと: $\exists a \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \mathrm{ad}_a(\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{g}_2$.

線型リー群と線型リー代数の対応の基本定理

定理 9.2. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 内の線型リー群 G_1, G_2 が局所同型であるための必要十分条件は, 対応するリー代数 $\mathrm{Lie}(G_1)$, $\mathrm{Lie}(G_2)$ が同型となることである.

この定理を証明することが, 本節の大きな目的である. 線型リー群の (局所) 同型と線型リー代数の同型が関係する最大の理由は, 次の公式である.

補題 9.3. 任意の $a \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ に対して, 次が成り立つ: $\exp \circ \mathrm{ad}_a = I_a \circ \exp$.

この補題を用いると, 「G_1, G_2 が同型ならば, 対応する線型リー代数 $\mathrm{Lie}(G_1)$, $\mathrm{Lie}(G_2)$ も同型である」ことの証明は容易. 仮定を局所同型に弱めるためには, 次が必要になる.

補題 9.4. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 内の線型リー群 G と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 次が成り立つ:

$$\mathrm{Lie}(G) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid \forall s \in (0, \varepsilon),\ \exp(sX) \in G\}.$$

問題 9.5 (第三回レポート). 補題 9.4 を用いて, G_1 と G_2 が局所同型ならば, 対応する線型リー代数 $\mathrm{Lie}(G_1)$ と $\mathrm{Lie}(G_2)$ は同型であることを示せ.

線型リー代数の同型から線型リー群の局所同型を導くためには, 次を用いる.

命題 9.6. 線型リー群 G に対して, 指数写像 $\exp : \mathrm{Lie}(G) \to G$ は局所的な同相を与える. すなわち, $\exists V$ ($\mathrm{Lie}(G)$ の 0 の近傍), $\exists U$ (G の単位元の近傍) : $\exp : V \to U$ は同相.

10 幾何学 D (2010/12/01): リー群

リー群の定義

定義 10.1. 次をみたす G を **リー群** と呼ぶ:

(i) G は群である,

(ii) G は C^∞-級多様体である,

(iii) 写像 $G \times G \to G : (g,h) \mapsto gh$ および $G \to G : g \mapsto g^{-1}$ は C^∞-級である.

例 10.2. 次はリー群である:

(1) 加法群 $\mathbb{R}^n$,

(2) 一般線型群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

線型リー群はリー群である

定理 10.3. 線型リー群 G はリー群である. 単位元 e の近傍における局所座標は, 行列の指数写像 $\exp : \mathrm{Lie}(G) \to G$ によって与えられる. よって特に, $\dim(G) = \dim \mathrm{Lie}(G)$ が成り立つ.

系 10.4. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 内の線型リー群 G に対して, 次が成り立つ:

$$\mathrm{Lie}(G) = T_e G := \{c'(0) \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G : C^\infty,\ c(0) = e\}.$$

リー群の同型と局所同型

定義 10.5. 写像 $f : G_1 \to G_2$ がリー群の **同型写像** であるとは, 次が成り立つこと: f は群同型かつ C^∞-同相. また, G_1 と G_2 が **同型** であるとは, これらの間に同型写像が存在すること.

定義 10.6. U_1, U_2 を, それぞれ G_1, G_2 の単位元の近傍とする. 写像 $f : U_1 \to U_2$ がリー群の **局所同型写像** であるとは, 次が成り立つこと:

(i) f は C^∞-同相写像,

(ii) $\forall g, h \in G_1$ $(gh \in U_1)$, $f(g)f(h) = f(gh)$.

また, G_1 と G_2 が **局所同型** であるとは, 次が成り立つこと: $\exists U_1$ (G_1 の単位元の近傍), $\exists U_2$ (G_2 の単位元の近傍), $\exists f : U_1 \to U_2$: 局所同型写像.

線型リー群として同型 (または局所同型) であれば, リー群としても同型 (または局所同型) である. しかし, これらの逆は成立しない.

例 10.7. 加法群 $\mathbb{R}$ と $\mathrm{SO}(2)$ は, 局所同型であるが, 同型ではない.

11　幾何学 D (2010/12/08): リー代数

リー代数の定義

定義 11.1. 線型空間 $\mathfrak{g}$ と積 $[,]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ の組 $(\mathfrak{g},[,])$ が **リー代数** とは, 次が成り立つこと:

(i) 積 $[,]$ は双線型,

(ii) $[X,Y]=-[Y,X] \quad (\forall X,Y\in\mathfrak{g})$,

(iii) $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0 \quad (\forall X,Y,Z\in\mathfrak{g})$.

条件 (ii) より $[X,X]=0$ が従う. 条件 (iii) を **ヤコビ律** と呼ぶ. 線型空間は, この講義では実線型空間の場合のみを考える. このことを強調して **実リー代数** と呼ぶこともある (複素線型空間の場合には複素リー代数と呼ぶ).

例 11.2. $\mathbb{R}^n$ に積を $[X,Y]:=0$ で定義したものはリー代数である (これを **可換リー代数** と呼ぶ).

命題 11.3. 線型リー代数はリー代数である.

リー代数の同型

定義 11.4. リー代数 $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ に対して,

(1) 写像 $f:\mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_2$ が **準同型** とは, 次が成り立つこと: f が線型, かつ積を保つ (すなわち $f([X,Y])=[f(X),f(Y)]$ が成り立つ),

(2) 写像 $f:\mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_2$ が **同型** とは, 次が成り立つこと: f が全単射かつ準同型,

(3) $\mathfrak{g}_1$ と $\mathfrak{g}_2$ が **同型** とは, 次が成り立つこと: $\exists f:\mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_2$: 同型写像.

容易に分かるように, 線型リー代数として同型であれば, リー代数として同型である. しかし, その逆は成り立たない.

発展的な話題

線型リー群はリー群であり, 線型リー代数はリー代数であった. これらの逆についてコメントしておく. リー群に対しては, 上の主張の逆は成立しない. すなわち, リー群 G であって, どのような線型リー群とも同型でないものが存在する. 一方で, リー代数に対しては, 実は上の主張の逆が成立する. すなわち, 次が成り立つ.

定理 11.5 (Ado の定理). 任意のリー代数 $\mathfrak{g}$ に対して, $\mathfrak{g}$ とリー代数として同型となる線型リー代数 $\mathfrak{g}'$ $(\subset\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}))$ が存在する.

12 幾何学 D (2010/12/15): リー群に対応するリー代数

一般の (線型とは限らない) リー群 G に対しても, リー代数 $\mathrm{Lie}(G)$ が構成できることを示す. ここでは, 以下の記号を断り無く用いる:

- M : C^∞-級多様体,
- $C^\infty(M) := \{f : M \to \mathbb{R} : C^\infty\}$,
- $(af + bg)(p) := af(p) + bg(p)$ (ここで $a, b \in \mathbb{R}$, $f, g \in C^\infty(M)$),
- $(fg)(p) := f(p)g(p)$ (ここで $f, g \in C^\infty(M)$).

多様体の接空間

定義 12.1. 写像 $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ が $p \in M$ における **接ベクトル** とは, 次が成り立つこと:

(i) v は線型写像,

(ii) 積の微分の公式をみたす, すなわち, $\forall f, g \in C^\infty(M),\ v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$.

点 $p \in M$ における接ベクトルの全体を T_pM で表し, これを **接空間** と呼ぶ.

例 12.2. 曲線の速度ベクトルは接ベクトルである. すなわち, C^∞-級写像 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ に対して, 次は $p := c(0)$ における接ベクトル:

$$c'(0) : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : f \mapsto (f \circ c)'(0).$$

例 12.3. 局所座標を用いて (ある点で) 偏微分する操作は接ベクトルである. すなわち, (U, φ) を M の局所座標とし, $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ と表すとき, 次は $p \in U$ における接ベクトル:

$$(\frac{\partial}{\partial x_i})_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : f \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)).$$

定理 12.4. 上と同様の設定の下で, 次が成り立つ:

$$T_pM = \{c'(0) \mid c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M : C^\infty,\ c(0) = p\} = \mathrm{span}\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_n})_p\}.$$

ベクトル場

定義 12.5. 写像 $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ が M 上の **ベクトル場** とは, 次が成り立つこと:

(i) X は線型写像,

(ii) 積の微分の公式をみたす, すなわち, $\forall f, g \in C^\infty(M),\ X(fg) = X(f)g + fX(g)$.

多様体 M 上のベクトル場の全体を $\mathfrak{X}(M)$ で表す.

命題 12.6. ベクトル場は, 各点に接ベクトルを対応させる. すなわち, X をベクトル場とすると, 各点 $p \in M$ に対して, 接ベクトル $X_p \in T_pM$ が次によって決まる:

$$X_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : f \mapsto (Xf)(p).$$

例 12.7. 局所座標を用いて偏微分する操作はベクトル場である. すなわち, (U, φ) を M の局所座標とし, $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ と表すとき, 任意の $f_i \in C^\infty(U)$ に対して次は U 上のベクトル場:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} : p \mapsto \sum_{i=1}^{n} f_i(p)(\frac{\partial}{\partial x_i})_p.$$

ベクトル場の bracket 積

ベクトル場の集合 $\mathfrak{X}(M)$ は (無限次元の) リー代数の構造が定まる. 和とスカラー倍は, 次によって定める:

$$aX + bY : C^\infty(M) \to C^\infty(M) : f \mapsto a(Xf) + b(Yf).$$

命題 12.8. X, Y を M 上のベクトル場とすると, $[X, Y] := X \circ Y - Y \circ X$ も M 上のベクトル場である (これをベクトル場の **bracket 積** と呼ぶ).

微分写像

定義 12.9. C^∞-級写像 $F : M \to N$ の $p \in M$ での **微分写像** を次で定義する:

$$(dF)_p : T_pM \to T_{F(p)}N : v \mapsto (dF)_p(v), \quad (dF)_p(v) : C^\infty(N) \to \mathbb{R} : f \mapsto v(f \circ F).$$

例 12.10. 接ベクトル $c'(0) \in T_pM$ (ただし $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$) に対して, C^∞-級写像 $F : M \to N$ の $p \in M$ での微分写像は次をみたす: $(dF)_p(c'(0)) = (F \circ c)'(0)$.

左不変ベクトル場

定義 12.11. G をリー群とする. このとき,

(1) 各 $g \in G$ に対して, 次を g による **左移動** と呼ぶ: $L_g : G \to G : h \mapsto gh$,
(2) ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(G)$ が **左不変** とは, 次が成り立つこと: $\forall g \in G, \forall f \in C^\infty(G)$, $X(f \circ L_g) = (Xf) \circ L_g$.

命題 12.12. ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(G)$ に対して, 以下は互いに同値である:

(1) X は左不変,
(2) $\forall g, h \in G, \ (dL_g)_h(X_h) = X_{gh}$,
(3) $\forall g \in G, \ (dL_g)_e(X_e) = X_g$ (ただし e は単位元).

13 幾何学 D (2010/12/22): リー群に対応するリー代数 (2)

定理 13.1. G をリー群とすると, その上の左不変ベクトル場の全体はリー代数となる (これを **G に対応するリー代数** と呼び, $\mathfrak{g}$ で表す).

問題 13.2. 上の $\mathfrak{g}$ が bracket 積に関して閉じていることを示せ.

命題 13.3. リー群 G に対して, $\mathfrak{g} \to T_eG : X \mapsto X_e$ は線型同型. 特に $\dim \mathfrak{g} = \dim G$ が成り立つ.

随伴表現

定義 13.4. G をリー群とし, $g \in G$ とする.

(1) $I_g : G \to G : h \mapsto ghg^{-1}$ を g による **内部自己同型** と呼ぶ.
(2) $\mathrm{Ad}_g := (dI_g)_e : T_eG \to T_eG$ を g による **随伴作用** と呼ぶ.
(3) $\mathrm{ad} := (d\mathrm{Ad})_e : T_eG \to \mathfrak{gl}(T_eG)$ を **随伴表現** と呼ぶ. ただしここで, $\mathfrak{gl}(T_eG)$ は T_eG から T_eG への線型写像全体の成す線型空間を表す.

定理 13.5. リー群 G に対して, T_eG に積を $[u, v] := \mathrm{ad}_u(v)$ で定義した代数は, G のリー代数 $\mathfrak{g}$ と同型.

証明には次の補題を用いる. 各 $X \in \mathfrak{g}$ に対して, X_e を速度ベクトルに持つ曲線を c_X で表すことにする. すなわち, $c_X : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ は C^∞-級の曲線で, $c_X(0) = e$, $c'_X(0) = X_e$ をみたす (このような曲線は一意ではないが, 以下の議論には影響しない).

補題 13.6. $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$, $\forall f \in C^\infty(G)$, $\forall g \in G$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $(Xf)(g) = \frac{d}{dt} f(gc_X(t))|_{t=0}$,
(2) $([X, Y]f)(g) = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} f(gc_X(t)c_Y(s)(c_X(t))^{-1})|_{s=t=0}$.

応用

系 13.7. 線型リー群 G に対して, 対応する線型リー代数 $\mathrm{Lie}(G)$ と, リー群と考えた時に対応するリー代数 $\mathfrak{g}$ は, リー代数として同型.

系 13.8. リー群 G_1 と G_2 が局所同型ならば, 対応するリー代数 $\mathfrak{g}_1$ と $\mathfrak{g}_2$ は同型.

系 13.9. リー群 G が可換ならば対応するリー代数 $\mathfrak{g}$ も可換.

14　幾何学 D (2011/01/19): リー群に対応するリー代数 (3)

積分曲線

定義 14.1. M を C^∞-級多様体とし, $\mathbb{R} \supset I$ を開集合とする. なめらかな曲線 $c : I \to M$ がベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ の **積分曲線** とは, 次が成り立つこと: $\forall t \in I$, $c'(t) = X_{c(t)}$.

命題 14.2. 任意の $X \in \mathfrak{X}(M)$ と $p \in M$ に対して, 次が成り立つ: $\exists 1 c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M : C^\infty$ s.t. $c(0) = p$.

リー群の指数写像

定義 14.3. G をリー群とする. 写像 $c : \mathbb{R} \to G$ が **一径数部分群** (**one-parameter subgroup**) とは, 次が成り立つこと:

(i) c は C^∞-級,

(ii) c は群準同型.

命題 14.4. G のリー代数を $\mathfrak{g}$ とすると, 次が成り立つ: $\forall X \in \mathfrak{g}$, $\exists 1 c_X : \mathbb{R} \to G$: 一径数部分群 s.t. $c'_X(0) = X_e$.

線型リー群の場合には, $c_X(t) = \exp(tX)$ が一径数部分群を与えている. このことから, 次で与えるリー群の指数写像の定義は, 線型リー群の指数写像の一般化になっていることが分かる.

定義 14.5. $\exp : \mathfrak{g} \to G : X \mapsto c_X(1)$ をリー群 G の **指数写像** と呼ぶ.

対応の基本定理

命題 14.6. リー群の指数写像 exp は C^∞-級写像であり, $\mathfrak{g}$ の 0 の近傍から G の e の近傍への局所 C^∞-同相を与える.

定理 14.7 (Baker - Campbell - Hausdorff). $t \to 0$ のとき, $\exp(tX)\exp(tY) = \exp(Z(t))$ とおくと, $Z(t)$ は X, Y とその括弧積だけで書ける.

ちなみに具体的に書くと $Z(t) = t(X+Y) + (t^2/2)[X,Y] + (t^3/12)[X-Y,[X,Y]] + \cdots$ である. この級数の一般項も書こうと思えば書ける.

定理 14.8. 対応するリー代数 $\mathfrak{g}_1$ と $\mathfrak{g}_2$ が同型ならば, リー群 G_1 と G_2 が局所同型である.

証明の方針は以下の通り: G_1 の e での近傍と G_2 の e での近傍の間の C^∞-同相は, 指数写像を使って与えられる. これが群構造を保つことは, 群構造がリー代数の構造で決まる (定理 14.7) ことから分かる.

15 幾何学 D (2011/02/02): リー群上の左不変計量

リーマン計量

定義 15.1. C^∞-級多様体 M に対して, g が **リーマン計量** とは, 次が成り立つこと: 各 $p \in M$ に対して, $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ が内積.

C^∞-級多様体 M とリーマン計量 g の組 (M, g) を **リーマン多様体** と呼ぶ. リーマン計量を用いると, 接ベクトルの長さの積分によって曲線の長さが定義できる. 曲線の長さを使うと, 多様体上の距離が定義される.

左不変計量

定義 15.2. リー群 G 上のリーマン計量 g が **左不変** とは, 次が成り立つこと: $\forall a \in G, \forall X_e, Y_e \in T_eG$, $g_e(X_e, Y_e) = g_a((dL_a)_e(X_e), (dL_a)_e(Y_e))$.

命題 15.3. リー群 G 上の左不変計量全体の集合と, 対応するリー代数上の内積全体の集合は, $1:1$ に対応する.

内積付きリー代数

以下では, 内積付きリー代数 $(\mathfrak{g}, \langle , \rangle)$ が与えられているものとして, 話を進める.

定義 15.4. 双線型写像 $\nabla : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} : (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ が **Levi-Civita 接続** であるとは, 次が成り立つこと: 任意の $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ に対して,

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle.$$

定義 15.5. 次で定義される $R : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} : (X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z$ を **リーマン曲率** と呼ぶ:

$$R(X, Y)Z := \nabla_{[X,Y]} Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z.$$

定義 15.6. $\mathfrak{g}$ 内の 2 次元部分空間 σ に対して, 次を σ に関する **断面曲率** と呼ぶ: $K_\sigma := \langle R(X, Y)X, Y \rangle$, ただしここで $\{X, Y\}$ は σ の正規直交基底.

定義 15.7. 次で定義される $\mathrm{ric} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を **リッチ曲率** と呼ぶ: $\mathrm{ric} := \sum \langle R(X, E_i)Y, E_i \rangle$, ただしここで $\{E_i\}$ は $\mathfrak{g}$ の正規直交基底. また $(\mathfrak{g}, \langle , \rangle)$ が **アインシュタイン** であるとは, ric が内積の定数倍になること.

例 15.8. 直交リー代数 $\mathfrak{o}(3)$ に内積 $\langle X, Y \rangle = (1/2)\mathrm{tr}({}^t XY)$ を入れる. このとき次が成り立つ: $K_\sigma \equiv 1/4$ かつ $\mathrm{ric}(X, Y) = (1/2)\langle X, Y \rangle$. すなわち, 断面曲率は定数であり, アインシュタインとなる.