平成 23 年度卒業論文

円錐曲線と 3 次ローレンツ群

広島大学理学部数学科
B060365 原憲文
指導教官 田丸博士 准教授

平成 24 年 2 月 10 日

目次

1 はじめに

本稿では円錐曲線について扱う．まず円錐と円錐曲線を定義する．

定義 1.1 円錐 M を以下のように定義する:

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 = 0 \right\} \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

また, 原点を通らない任意の平面で円錐を切断したときにえられる曲線を 円錐曲線 という.

円錐曲線について調べるにあたり, 以下で定義される **3 次ローレンツ群** $\mathrm{SO}(2,1)$ とどのような関係を持つかを調べた.

定義 1.2 $\mathrm{SO}(2,1) := \{ g \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R}) \mid {}^t g I_{2,1} g = I_{2,1}, \det(g) = 1 \}$.

行列 $I_{2,1}$ を

$$I_{2,1} := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$$

と定義する．3 次ローレンツ群 $\mathrm{SO}(2,1)$ は円錐 M に推移的に作用することが知られている.

定義 1.3 部分群 $H \subset \mathrm{SO}(2,1)$ と点 $p \in M$ に対して, $H.p := \{ h.p \mid h \in H \}$ を p を通る H による 軌道 という.

本稿では軌道が円錐曲線になる閉部分群 H をいくつか求めた．結果の一つとして, 以下が得られた.

命題 1.4 $\mathrm{SO}(2,1)$ の部分群 H を次で定めると, 任意の $p \in M$ に対して, 軌道 $H.p$ は円になる:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

2 準備

この章では本稿で扱う 3 次ローレンツ群 $\mathrm{SO}(2,1)$ について基本的な性質及び, 円錐との関連をいくつか述べる.

定義 2.1 $\mathbb{R}$ 上の n 次正方行列全体の集合を次のように表す :

$$\mathrm{M}(n,\mathbb{R}) = \{(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}\}.$$

定義 2.2 $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ の n 次正則行列全体の集合を次のように表す:

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \mid \det(g) \neq 0\}.$$

これは $\mathbb{R}$ 上の 一般線型群 とよばれる.

$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ は行列の積に関して群を成している.

命題 2.3 $\mathrm{SO}(2,1)$ は一般線型群 $\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$ の部分群になる.

証明 claim1:$^\forall g, h \in \mathrm{SO}(2,1)$, $gh \in \mathrm{SO}(2,1)$.
$^\forall g, h \in \mathrm{SO}(2,1)$ をとる. このとき,

$$^t g I_{2,1} g = {}^t h I_{2,1} h = I_{2,1}, \quad \det(g) = \det(h) = 1.$$

である. まず,

$$^t g I_{2,1} g = I_{2,1},$$

に対して両辺右から h をかけて,

$$^t g I_{2,1} g h = I_{2,1} h,$$

次に両辺左から$^t h$ をかけて,

$$\begin{aligned} {}^t h {}^t g I_{2,1} g h &= {}^t h I_{2,1} h, \\ {}^t (gh) I_{2,1} g h &= I_{2,1}. \end{aligned}$$

また行列式の性質より,

$$\det(gh) = \det(g)\det(h) = 1 \cdot 1 = 1.$$

よって $gh \in \mathrm{SO}(2,1)$.
次に ${}^\forall g \in \mathrm{SO}(2,1), g^{-1} \in \mathrm{SO}(2,1)$ を示す.
${}^\forall g \in \mathrm{SO}(2,1)$ をとる. このとき,

$$ {}^t g I_{2,1} g = I_{2,1}, \det(g) = 1 $$

である.

$$ {}^t g I_{2,1} g = I_{2,1}. $$

に両辺右から $g^{-1} \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$ をかけると

$$ \begin{aligned} {}^t g I_{2,1} g g^{-1} &= I_{2,1} g^{-1}, \\ {}^t g I_{2,1} &= I_{2,1} g^{-1}, \end{aligned} $$

一方, 両辺左から $({}^t g)^{-1}$をかけると,

$$ \begin{aligned} ({}^t g)^{-1} {}^t g I_{2,1} &= ({}^t g)^{-1} I_{2,1} g^{-1}, \\ I_{2,1} &= {}^t(g^{-1}) I_{2,1} g^{-1}. \end{aligned} $$

が成り立つ. また行列式の性質より,

$$ 1 = \det(I_3) = \det(g^{-1}g) = \det(g^{-1})\det(g) = \det(g^{-1}). $$

が成り立つ. よって, $g^{-1} \in \mathrm{SO}(2,1)$ である. 以上より $\mathrm{SO}(2,1)$ が $\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$ の部分群であることは示せた. □

定義 2.4　写像 $\Phi: G \times M \to M: (g,p) \mapsto \Phi(g,p) =: g.p$ が, G の M への <u>作用</u> とは次が成り立つこと:

i. ${}^\forall g, h \in G$, ${}^\forall p \in M$, $(gh).p = g.(h.p)$,
ii. ${}^\forall p \in M$, $e.p = p$ (ただし e は G の単位元).

部分群 $G' \subset G$ 及び, 部分集合 $M' \subset M$ に対しては以下の命題が成立する.

命題 2.5　群 G が集合 M に作用しているとする. このとき,

i. すべての部分群 $G' \subset G$ は M に作用する.
ii. 部分集合 $M' \subset M$ が G により保たれているとする. このとき, G は M' に作用する.

証明　i を示す.
まず G' が定義 2.4 の i を満たすことを示す.

$$^\forall g, h \in G', {}^\forall p \in M$$

をとる. G' は G の部分群なので, $g, h \in G' \subset G$ よって

$$(gh).p = g.(h.p).$$

G' が定義 2.4 の ii を満たすことを示す.
　$^\forall p \in M$, $e.p = p$ は明らか. よって命題の i は示せた.
命題の ii を示す.
M' に対して定義 2.4 の i を満たすことを示す.

$$^\forall g, h \in G, {}^\forall p \in M'$$

をとる. $p \in M' \subset M$ より,

$$(gh).p = g.(h.p).$$

M' に対して定義 2.4 の ii を満たすことを示すが, $^\forall p \in M' \subset M$ なので, $e.p = p$ は明らか. よって命題は示せた. □

命題 2.6　一般線型群 $\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ は $\mathbb{R}^3$ に作用する. (作用を積で定義する.)

証明　写像 $\Phi : \mathrm{GL}(3, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (g, p) \mapsto \Phi(g, p) =: g.p$ とする.

$$^\forall g, h \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R}), {}^\forall p \in \mathbb{R}^3$$

をとる.

$$\begin{aligned}(gh).p &= (gh)p \\ &= g(hp) \\ &= g.(h.p).\end{aligned}$$

次に定義 2.4 の ii を示すが, これはあきらかである. よって, $\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ は $\mathbb{R}^3$ に作用することが分かった. □

$\mathrm{GL}(3, \mathbb{R}) \supset \mathrm{SO}(2, 1)$, $\mathbb{R}^3 \supset$ 円錐 M なので, $\mathrm{SO}(2, 1)$ が円錐 M に作用することは写像の well-defined 性を除いてわかる.

命題 2.7　群 $\mathrm{SO}(2, 1)$ は円錐 M に作用する.

証明　写像 $\Phi : \mathrm{SO}(2,1) \times M \to M : (g,p) \mapsto \Phi(g,p) =: g.p$ とする．写像 Φ の well-defined 性, i.e. $g.p \in M$ のみ示す．

$$^{\forall} g = (g_{ij}) \in \mathrm{SO}(2,1)$$

をとる.$(i, j = 1, 2, 3)$

$$^{\forall} p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \in M$$

をとる．
claim: $g.p \in M$, i.e. $(\text{第 1 成分})^2 + (\text{第 2 成分})^2 - (\text{第 3 成分})^2 = 0$.

$$g.p = \begin{pmatrix} p_1 g_{11} + p_2 g_{12} + p_3 g_{13} \\ p_1 g_{21} + p_2 g_{22} + p_3 g_{23} \\ p_1 g_{31} + p_2 g_{32} + p_3 g_{33} \end{pmatrix}$$

となり,

$$\begin{aligned} &(g.p\ \text{の第 1 成分})^2 + (g.p\ \text{の第 2 成分})^2 - (g.p\ \text{の第 3 成分})^2 \\ = &p_1^2(g_{11}^2 + g_{21}^2 - g_{31}^2) + p_2^2(g_{12}^2 + g_{22}^2 - g_{32}^2) + p_3^2(g_{13}^2 + g_{23}^2 - g_{33}^2) \\ &+2p_1p_2(g_{11}g_{12} + g_{21}g_{22} - g_{31}g_{32}) \\ &+2p_2p_3(g_{12}g_{13} + g_{22}g_{23} - g_{32}g_{33}) \\ &+2p_3p_1(g_{13}g_{11} + g_{23}g_{21} - g_{33}g_{31}). \end{aligned}$$

ここで, g=$(g_{ij}) \in \mathrm{SO}(2,1)$ より,

$$\begin{cases} g_{11}^2 + g_{21}^2 - g_{31}^2 = 1 \\ g_{12}^2 + g_{22}^2 - g_{32}^2 = 1 \\ g_{13}^2 + g_{23}^2 - g_{33}^2 = -1 \end{cases}, \begin{cases} g_{11}g_{12} + g_{21}g_{22} - g_{31}g_{32} = 0 \\ g_{12}g_{13} + g_{22}g_{23} - g_{32}g_{33} = 0 \\ g_{13}g_{11} + g_{23}g_{21} - g_{33}g_{31} = 0 \end{cases}$$

という関係式が成り立つので,

$$(\text{第 1 成分})^2 + (\text{第 2 成分})^2 - (\text{第 3 成分})^2 = 0$$

すなわち, $g.p \in M$. よって写像 Φ は well-defined であることが示せた．すなわち, 群 $\mathrm{SO}(2,1)$ は円錐 M に作用することが示せた．

定義 2.8　群 G の集合 M への作用が <u>推移的</u> とは次が成り立つこと:$^{\forall} p, q \in M, {}^{\exists} g \in G$ s.t. $g.p = q$.

作用が推移的であることを示すために次を用いる.

補題 2.9 M を集合とし, $o \in M$ を固定する. このとき群 G の M への作用が推移的であることは, 次と同値: ${}^\forall p \in M$, ${}^\exists g \in G$ s.t. $g.p = o$.

命題 2.10 群 $\mathrm{SO}(2,1)$ の円錐 M への作用が推移的.

証明 claim:補題 2.9 より, $o \in M$ を固定し,${}^\forall p \in M$, ${}^\exists g \in \mathrm{SO}(2,1)$ s.t. $g.p = o$.
$o \in M$ とする. ${}^\forall p \in M$ をとる. ただし,

$$o = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

とする.
step1 claim: ${}^\exists g_1 \in \mathrm{SO}(2,1), {}^\exists p' \in M$ s.t. $g_1.p = p'$. ただし,

$$p' = \begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \\ p_3' \end{pmatrix}$$

とする.
$p_3 < 0$ のとき

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2,1),$$
$$p' = \begin{pmatrix} p_1 \\ -p_2 \\ -p_3 \end{pmatrix} \in M \qquad (p_3' > 0)$$

とすると,

$$\begin{aligned} g_1.p &= \begin{pmatrix} p_1 \\ -p_2 \\ -p_3 \end{pmatrix} \\ &= p'. \end{aligned}$$

$p_3 > 0$ のとき, 改めて書くと,

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2,1),$$
$$p' = p \in M$$

とすると,

$$
\begin{aligned}
g_1.p &= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \\
&= p'.
\end{aligned}
$$

よって step1 は示せた.

step2 $^\exists g_2 \in \mathrm{SO}(2,1)$ s.t. $g_2.p' = p''$. ただし,

$$
p'' = \begin{pmatrix} 0 \\ p'_3 \\ p'_3 \end{pmatrix}
$$

とする.

θ を $\cos\theta = \frac{p'_2}{p'_3}, \sin\theta = \frac{p'_1}{p'_3}$ をみたすものとする.

$$
g_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2,1)
$$

とすると,

$$
\begin{aligned}
g_2.p' &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p'_1\cos\theta - p'_2\sin\theta \\ p'_1\sin\theta + p'_2\cos\theta \\ p'_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ p'_3 \\ p'_3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

よって step2 は示せた.

step3 claim:$^\exists g_3 \in \mathrm{SO}(2,1)$ s.t. $g_3.p'' = o$.

t を $t = \log\frac{1}{p'_3}$ をみたすものとする.

$$
g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh t & \sinh t \\ 0 & \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2,1)
$$

とすると,

$$
\begin{aligned}
g_3 . \begin{pmatrix} 0 \\ p_3' \\ p_3' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh t & \sinh t \\ 0 & \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ p_3' \\ p_3' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ p_3'(\cosh t + \sinh t) \\ p_3'(\cosh t + \sinh t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ p_3' \cdot e^t \\ p_3' \cdot e^t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

よって step3 は示せた. 以上の 3step より, $\mathrm{SO}(2,1)$ の円錐 M への作用は推移的であることが示せた.

3　3 次元ローレンツ群の部分群による軌道

3 次元ローレンツ群の部分群による軌道が実際に円錐曲線になることをいくつか取り上げた.

3.1　軌道が円になる場合

円も楕円の特殊な場合として円錐曲線に含まれる.

命題 3.1　$\mathrm{SO}(2,1)$ の部分群 H_1 を次で定めると, 任意の $p \in M$ に対して, 軌道 $H_1.p$ は円になる:

$$
H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}.
$$

証明　${}^{\forall} p \in M$ をとる. ただし,

$$
p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}
$$

とする.

claim:$H_1.p = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in M \mid x_1^2 + x_2^2 = p_3^2,\ x_3 = p_3\ (p_3 \neq 0) \right\}.$

($\subset$) ${}^\forall h_1 \in H_1$ をとる.

$$h_1.p = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{とする.}$$

このとき ${}^\exists \theta \in \mathbb{R}$ s.t.

$$\begin{aligned} h_1.p &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_1\cos\theta - p_2\sin\theta \\ p_1\sin\theta + p_2\cos\theta \\ p_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

なので, $x_3 = p_3$ は明らかで,

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (p_1\cos\theta - p_2\sin\theta)^2 + (p_1\sin\theta + p_2\cos\theta)^2 \\ &= p_1^2\cos^2\theta + p_2^2\sin^2\theta + p_1^2\sin^2\theta + p_2^2\cos^2\theta \\ &= p_1^2 + p_2 \\ &= p_3. \end{aligned}$$

よって, (左辺)$\subset$(右辺).

($\supset$) ${}^\forall x \in$(右辺) をとる. ただし,

$${}^\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

とする. 次のように $h_1 \in H_1$ を定める:

$$h_1 = \frac{1}{p_3^2} \begin{pmatrix} p_1x_1 + p_2x_2 & p_2x_1 - p_1x_2 & 0 \\ p_1x_2 - p_2x_1 & p_1x_1 + p_2x_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}.$$

すると,

$$\begin{aligned} h_1.p &= \frac{1}{p_3^2} \begin{pmatrix} p_1x_1 + p_2x_2 & p_2x_1 - p_1x_2 & 0 \\ p_1x_2 - p_2x_1 & p_1x_1 + p_2x_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

となり, (右辺)⊂(左辺). よって, 双方の包含関係が成立したので $H_1.p$ は円. □

3.2 軌道が双曲線になる場合

命題 3.2 SO(2,1) の部分群 H_2 を次で定めると, 任意の $p \in M$ $(p_1 \neq 0)$ に対して, 軌道 $H_2.p$ は双曲線になる:

$$H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh t & \sinh t \\ 0 & \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

証明 ${}^\forall p \in M$ をとる. ただし,

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

とする.

claim:$H_2.p = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in M \mid x_2^2 - x_3^2 = -p_1^2,\ x_1 = p_1 \right\}$.

(⊂) ${}^\forall h_2 \in H_2$ をとる.

$$h_2.p = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

とおく. このとき, ${}^\exists t \in \mathbb{R}$ s.t.

$$h_2.p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \cosh t + p_3 \sinh t \\ p_2 \sinh t + p_3 \cosh t \end{pmatrix}$$

である. よって, $x_1 = p_1$ は明らかなので,

$$\begin{aligned} x_2^2 - x_3^2 &= +(p_2 \cosh t + p_3 \sinh t)^2 - (p_2 \sinh t + p_3 \cosh t)^2 \\ &= p_2^2 \cosh^2 t + p_3^2 \sinh t - p_2^2 \sinh^2 t + p_3^2 \cosh^2 t \\ &= p_2^2(\cosh^2 t - \sinh^2 t) - p_3^2(\cosh^2 t - \sinh^2 t) \\ &= p_2^2 - p_3^2 \\ &= -p_1^2. \end{aligned}$$

よって, (左辺)$\subset$(右辺).
($\supset$)$^\forall x \in$(右辺) をとる. ただし,

$$^\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

とする. 次のように $h_2 \in H_2$ を定める:

$$h_2 = -\frac{1}{p_1^2} \begin{pmatrix} -p_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & p_2x_2 + p_3x_3 & p_3x_2 - p_2x_3 \\ 0 & p_3x_2 - p_2x_3 & p_2x_2 + p_3x_3 \end{pmatrix}.$$

すると,

$$\begin{aligned} h_2.p &= -\frac{1}{p_1^2} \begin{pmatrix} -p_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & p_2x_2 + p_3x_3 & p_3x_2 - p_2x_3 \\ 0 & p_3x_2 - p_2x_3 & p_2x_2 + p_3x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

となり, (右辺)$\subset$(左辺).
よって, 双方の包含関係が成立したので $H_2.p$ は双曲線. $\square$

軌道 $H.p$ が楕円の特殊な場合である円と (軸に垂直な) 双曲線となる部分群 H を求めることはできたが, 一般の楕円と放物線を求めることはできなかった.

おわりに

最後になりましたが, 本論文をつくるにあたって, 指導教員の田丸博士先生をはじめ, 澁谷一博先生, 先輩方には, 御多忙にもかかわらず, 助言や御指導をいただきました. この場を借りて深く御礼申し上げます.

参考文献

[1] 熊原啓作, 『行列・群・等質空間』, 日評数学選書, 2001.

[2] 田丸博士, 『幾何学 C・多様幾何基礎講義 A (講義資料)』, 広島大学, 2011.

[3] 横田一郎, 『古典単純リー群』, 現代数学社, 1990.